

(Soluc: anchura $\approx 15,73$ m; altura 7,07 y 5 m respectivamente)

Razones trigonométricas en cualquier cuadrante:

5. Expresar los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo positivo menor de 360° o 2π rad (hacer el dibujo en el caso de los cinco primeros):

a) 1100° b) $19\pi/3$ rad c) 2970° d) -300° e) -1040° f) 10π rad g) $43\pi/4$ rad
h) 3500° i) $32\pi/3$ rad j) -2620° k) $63\pi/5$ rad l) $43\pi/6$ rad m) 4980°

(Soluc: a) 20° ; b) $\pi/3$ rad; c) 90° ; d) 60° ; e) 40° ; f) 0 rad; g) $3\pi/4$ rad; h) 260° ; i) $2\pi/3$ rad; j) 260° ; k) $3\pi/5$ rad; l) $7\pi/6$ rad; m) 300°)

6. Sobre **papel milimetrado**, y para cada uno de los apartados que figuran a continuación, trazar una circunferencia de radio unidad (usar e indicar una escala conveniente), señalar en ella los ángulos en cuestión (utilizar para ello un transportador de ángulos) y trazar su seno y coseno, medir éstos aproximadamente, y comparar el resultado obtenido con la calculadora:

a) 30° y 150° b) 45° y 225° c) 90° , 180° y 270° d) 60° y 300° e) 0° , 60° y 120°

7. Utilizando la calculadora, construir una tabla de valores apropiada para representar, sobre **papel milimetrado**, las funciones $\sin x$, $\cos x$ y $\tan x$ (Pueden verse dichas gráficas en el anexo final de este libro)

8. Sabiendo que $\cos \alpha = -3/5$ y $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, calcular las restantes razones trigonométricas mediante identidades trigonométricas (no usar decimales). Comprobar el resultado hallando α con la calculadora.

(Soluc: $\sin \alpha = -4/5$, $\tan \alpha = 4/3$; $\alpha \approx 233^\circ 7' 48''$)

9. Sabiendo que $\tan \alpha = -3/4$ y $\alpha \in 4^\circ$ cuadrante, calcular las restantes razones trigonométricas, y comprobar.

(Soluc: $\sin \alpha = -3/5$, $\cos \alpha = 4/5$; $\alpha \approx 323^\circ 7' 48''$)

10. Ídem con $\sec \alpha = 2$ y $0 < \alpha < \pi/2$

(Soluc: $\sin \alpha = \sqrt{3}/2$, $\cos \alpha = 1/2$, $\tan \alpha = \sqrt{3}$; $\alpha = 60^\circ$)

11. Ídem con $\tan \alpha = -3$ y $\pi/2 < \alpha < \pi$

(Soluc: $\sin \alpha = 3\sqrt{10}/10$, $\cos \alpha = -\sqrt{10}/10$)

12. Ídem con $\cos \alpha = 0,2$ y $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$

(Soluc: $\sin \alpha = -2\sqrt{6}/5$, $\tan \alpha = -2\sqrt{6}$)

13. Ídem con $\sin \alpha = -0,3$ y $\pi < \alpha < 3\pi/2$

(Soluc: $\cos \alpha \approx -0,95$, $\tan \alpha \approx 0,31$; $\alpha \approx 197^\circ 27' 27''$)

14. Ídem con $\tan \alpha = 4/3$ y $\pi < \alpha < 3\pi/2$

(Soluc: $\sin \alpha = -4/5$, $\cos \alpha = -3/5$)

15. Calcular las restantes razones trigonométricas sabiendo que:

a) $\cos \alpha = 4/5$ $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

b) $\tan \alpha = 3/4$ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

c) $\sin \alpha = 3/5$ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

d) $\cotg \alpha = -2$ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

e) $\sin \alpha = 1/4$ $\alpha \in 1^\text{er}$ cuad.

f) $\cos \alpha = -1/3$ $\alpha \in 2^\circ$ cuad.

g) $\operatorname{cosec} \alpha = -2$ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

h) $\sec \alpha = 1$ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

i) $\tan \alpha = 3/4$ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

j) $\sec \alpha = -\sqrt{2}$ $\alpha \in 3^\text{er}$ cuad.

k) $\operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{5}$ $\alpha \in 2^\circ$ cuad.

(Soluc: b) $\sin \alpha = -3/5$, $\cos \alpha = -4/5$; d) $\sin \alpha = \sqrt{5}/5$, $\cos \alpha = -2\sqrt{5}/5$; g) $\sin \alpha = -1/2$, $\cos \alpha = -\sqrt{3}/2$; k) $\sin \alpha = -\sqrt{2}/2$, $\tan \alpha = 1$; l) $\sin \alpha = \sqrt{5}/5$, $\cos \alpha = -2\sqrt{5}/5$)

g) $\frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$

[Soluc: $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$]

h) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

(Soluc: $\cos x$)

55. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$

b) $\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha = \sin \alpha$

c) $\cos \alpha \cos(\alpha - \beta) + \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) = \cos \beta$

d) $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

e) $\sec^2 A - \operatorname{tg}^2 A = 1$

f) $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \operatorname{cosec} A - \operatorname{ctg} A$

g) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$

h) $\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \sin \alpha \sin \beta$

i) $\sin^2 A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2A$

j) $\frac{2 \sin x}{\operatorname{tg} 2x} = \cos x - \sin x \cdot \operatorname{tg} x$

k) $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \sin x$

l) $\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} = \sec x + \operatorname{tg} x$

m) $\frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1} = \operatorname{tg}^2 x$

56. Demostrar las siguientes fórmulas, llamadas **transformaciones de productos en sumas**:

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2}$$

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x - y) + \sin(x + y)}{2}$$

Ecuaciones trigonométricas:

57. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas elementales:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Sol: $x = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$)

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Sol: $x = 135^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x = 225^\circ + k \cdot 360^\circ$)

c) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ (Sol: $x = 150^\circ + k \cdot 180^\circ$)

d) $\sin x = \frac{1}{3}$ ($x \geq 19^\circ 28' 16'' + k \cdot 360^\circ$; $x \geq 160^\circ 31' 44'' + k \cdot 360^\circ$)

e) $\cos x = -\frac{4}{5}$ ($x \geq 143^\circ 7' 48'' + k \cdot 360^\circ$; $x \geq 216^\circ 52' 12'' + k \cdot 360^\circ$)

f) $\sin x = 0$ (Sol: $x = k \cdot 180^\circ$)

g) $\cos x = -1$ (Sol: $x = (2k+1) \cdot 180^\circ$)

h) $\operatorname{cosec} x = -2$ (Sol: $x = 210^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x = 330^\circ + k \cdot 360^\circ$)

i) $\sec x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (Sol: $x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x = 210^\circ + k \cdot 360^\circ$)

j) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ (Sol: $x = 60^\circ + k \cdot 180^\circ$)

k) $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{2}$ (Sol: $\nexists$ soluc)

l) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (Sol: Se verifica $\forall x \in \mathbb{R}$)

m) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Sol: $x=10^\circ+k \cdot 120^\circ$; $x=110^\circ+k \cdot 120^\circ$)

n) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ [Sol: $x=2k\pi$; $x=(4k+1) \cdot \pi/2$]

58. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas más elaboradas:

a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ (Sol: $x=45^\circ+k \cdot 360^\circ$)

b) $\sin x - 2\cos 2x = -\frac{1}{2}$
(Sol: 30° , 150° , $\cong 311^\circ 24' 35''$ y $\cong 228^\circ 35' 25''$)

c) $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$ (Sol: $x=45^\circ+k \cdot 180^\circ$)

d) $\sin 2x = \cos x$
(Sol: $x=30^\circ+k \cdot 360^\circ$; $x=150^\circ+k \cdot 360^\circ$; $x=90^\circ+k \cdot 180^\circ$)

e) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$ (Sol: $x=k \cdot 360^\circ$; $x=120^\circ+k \cdot 360^\circ$)

f) $2\cos^2 x - \sin^2 x + 1 = 0$ (Sol: $x=90^\circ+k \cdot 180^\circ$)

g) $\sin^2 x - \sin x = 0$ (Sol: $x=k \cdot 180^\circ$; $x=90^\circ+k \cdot 360^\circ$)

h) $2\cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0$
(Sol: $x=90^\circ+k \cdot 180^\circ$; $x=30^\circ+k \cdot 360^\circ$; $x=330^\circ+k \cdot 360^\circ$)

i) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$ (Sol: $x=90^\circ+k \cdot 180^\circ$)

j) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$ (Sol: $x=45^\circ+k \cdot 90^\circ$)

k) $2\cos^2 x + \sin x = 1$
(Sol: $x=90^\circ+k \cdot 360^\circ$; $x=210^\circ+k \cdot 360^\circ$; $x=330^\circ+k \cdot 360^\circ$)

l) $3\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$
(Sol: $x=k \cdot 180^\circ$; $x=30^\circ+k \cdot 360^\circ$; $x=210^\circ+k \cdot 360^\circ$)

m) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2} \sin x = 0$ (Sol: $x=\pi/4+k \cdot \pi$)

n) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$
(Sol: $x=60^\circ+k \cdot 360^\circ$; $x=300^\circ+k \cdot 360^\circ$)

o) $\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$ (Sol: $x=90^\circ+k \cdot 180^\circ$; $x=45^\circ+k \cdot 180^\circ$)

p) $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$ (Sol: $x=30^\circ+k \cdot 360^\circ$; $x=150^\circ+k \cdot 360^\circ$)

q) $4\sin^2 x \cos^2 x + 2\cos^2 x - 2 = 0$ (Sol: $x=k \cdot 180^\circ$; $x=45^\circ+k \cdot 90^\circ$)

r) $4\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$
(Sol: $x=36^\circ 52' 11,6'' + k \cdot 180^\circ$; $x=135^\circ + k \cdot 180^\circ$)

s) $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = \frac{1}{2}$ (Sol: $x=90^\circ+k \cdot 180^\circ$)

t) $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 = \cos x$ (Sol: $x=k \cdot 360^\circ$)

u) $2\sin^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$
(Sol: $x=90^\circ+k \cdot 180^\circ$; $x=60^\circ+k \cdot 360^\circ$; $x=300^\circ+k \cdot 360^\circ$)

v) $\cos 2x + 3\sin x = 2$

w) $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x = 1$

x) $\cos x \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$

y) $2\sin x = \operatorname{tg} 2x$

z) $\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$

α) $\sin 2x \cos x = 6\sin^3 x$

β) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg} x = 1$

γ) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$ (Sol: $x=150^\circ+k \cdot 360^\circ$)

59. Resolver las siguientes ecuaciones, transformando las sumas y diferencias en productos:

a) $\sin 3x - \sin x = \cos 2x$

b) $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1$

c) $\frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x - \cos x} = \sqrt{3}$

d) $\sin 3x - \cos 3x = \sin x - \cos x$

Resolución de triángulos oblicuángulos:

60. Resolver los siguientes triángulos y hallar su área (con * se indica el caso dudoso):

a) $a=6$ m, $B=45^\circ$, $C=105^\circ$ (Soluc: $A=30^\circ$, $b \cong 8,49$ m, $c \cong 11,59$ m, $S_{ABC} \cong 24,60$ m²)

b) $a=10$ dam, $b=7$ dam, $C=30^\circ$ (Soluc: $c \cong 5,27$ dam, $B \cong 41^\circ 38'$, $A \cong 108^\circ 22'$)

- c) $b=35,42 \text{ dm}$, $A=49^\circ 38'$, $B=70^\circ 21'$ (Soluc: $C=60^\circ 1'$, $a=28,66 \text{ dm}$, $c=32,58 \text{ dm}$, $S_{ABC} \approx 439,94 \text{ dm}^2$)
- d) $a=13 \text{ m}$, $b=14 \text{ m}$, $c=15 \text{ m}$ (Soluc: $A=53^\circ 7' 48''$, $B=59^\circ 29' 23''$, $C=67^\circ 22' 48''$, $S_{ABC} \approx 84 \text{ m}^2$)
- * e) $a=42$, $b=32$, $B=40^\circ 32'$ (Soluc: $A_1=58^\circ 32'$, $C_1=80^\circ 56'$, $c_1=48,62$; $S_{ABC} \approx 663,55$
 $A_2=121^\circ 27'$, $C_2=18^\circ$, $c_2=15,22$; $S_{ABC} \approx 207,72$)
- f) $a=15$, $b=22$, $c=17$ (Soluc: $A=42^\circ 54'$, $B=86^\circ 38'$, $C=50^\circ 28'$)
- g) $a=10 \text{ mm}$, $b=7 \text{ mm}$, $C=60^\circ$ (Soluc: $c=8,89 \text{ mm}$, $A=76^\circ 59' 46''$, $B=43^\circ 0' 14''$, $S_{ABC} \approx 30,31 \text{ mm}^2$)
- h) $a=10$, $b=9$, $c=7$ (Soluc: $A=76^\circ 13'$, $B=60^\circ 57'$, $C=42^\circ 50'$)
- * i) $a=60 \text{ cm}$, $b=40 \text{ cm}$, $A=42^\circ$ (Soluc: $B=26^\circ 30'$, $c=83,43 \text{ cm}$, $C=111^\circ 30'$, $S_{ABC} \approx 116,5 \text{ cm}^2$)
- * j) $a=40 \text{ cm}$, $b=60 \text{ cm}$, $A=72^\circ$ (Soluc: $\nexists$ soluc)
- * k) $a=50$, $b=60$, $A=42^\circ$ (Soluc: $B_1=53^\circ 25'$, $C_1=84^\circ 35'$, $c_1=74,39$
 $B_2=126^\circ 35'$, $C_2=11^\circ 25'$, $c_2=14,39$)
- l) $A=30^\circ$, $B=45^\circ$, $b=\sqrt{2} \text{ m}$ (Soluc: $C=105^\circ$, $a=1 \text{ m}$, $c=1,93 \text{ m}$, $S_{ABC} \approx 0,68 \text{ m}^2$)
- m) $b=3 \text{ hm}$, $c=2 \text{ hm}$, $A=60^\circ$ (Soluc: $a=\sqrt{7} \text{ hm}$, $B=79^\circ$, $C=40^\circ 54'$, $S_{ABC} = 3\sqrt{3}/2 \text{ hm}^2$)
- n) $A=30^\circ$, $b=\sqrt{3}$, $c=1$
- * o) $a=4$, $b=5$, $B=30^\circ$
- p) $a=1792$, $b=4231$, $c=3164$
- * q) $a=12 \text{ hm}$, $b=57 \text{ hm}$, $A=150^\circ$ (Soluc: $\nexists$ soluc)
- r) $a=72$, $b=57$, $C=75^\circ 47'$
- s) $c=3,78$, $A=105^\circ$, $B=38^\circ 47'$
- * t) $a=40$, $b=60$, $A=12^\circ$
- * u) $a=60$, $b=40$, $A=82^\circ$
- v) $a=8 \text{ m}$, $B=30^\circ$, $C=105^\circ$ (Soluc: $b=5,66 \text{ m}$, $c=10,93 \text{ m}$, $S_{ABC} \approx 21,86 \text{ m}^2$)
- w) $A=60^\circ$, $B=75^\circ$, $c=\sqrt{2} \text{ m}$
- x) $a=4 \text{ km}$, $B=45^\circ$, $C=60^\circ$
- y) $a=4 \text{ mm}$, $b=3 \text{ mm}$, $c=6 \text{ mm}$
- z) $a=1 \text{ cm}$, $c=2 \text{ cm}$, $B=60^\circ$
- α) $a=5 \text{ dam}$, $b=3 \text{ dam}$, $c=4 \text{ dam}$
- * β) $b=10 \text{ dm}$, $c=9 \text{ dm}$, $C=45^\circ$
- γ) $A=30^\circ$, $b=10 \text{ m}$, $C=75^\circ$ (Soluc: $B=75^\circ$, $a=5,18 \text{ m}$, $c=10 \text{ m}$, $S_{ABC}=25 \text{ m}^2$)

61. Resolver el triángulo ABC sabiendo que su perímetro es 24 cm, es rectángulo en A y $\sin B=3/5$
(Soluc: $a=10 \text{ cm}$, $b=6 \text{ cm}$, $c=8 \text{ cm}$)

62. Calcular el área de un triángulo de datos $a=8 \text{ m}$, $B=30^\circ$, $C=45^\circ$

63. En un paralelogramo ABCD el lado AB mide 6 cm, el AD 8 cm, y el ángulo $A=30^\circ$. Hallar sus diagonales.

64. Hallar los lados de un triángulo sabiendo que su área mide 18 cm^2 y dos de sus ángulos $A=30^\circ$ y $B=45^\circ$
(Soluc: $a=5,13 \text{ cm}$, $b=7,26 \text{ cm}$, $c=9,92 \text{ cm}$)