

PROBLEMAS GEOMETRÍA ANALÍTICA

COORDENADAS VECTOR. PUNTOS ALIÑADOS. PUNTO MEDIO. SIMÉTRICO.

1.- Indica as coordenadas de $\vec{MN}$ e $\vec{NM}$, onde $M(7, -5)$ e $N(-2, -11)$.

2.- Determina nos seguintes casos se os puntos A, B e C están aliñados

a) $A(5, -2)$, $B(3, -2)$, $C(-5, -2)$

b) $A(-1, -2)$, $B(2, 7)$, $C(1, 2)$

c) $A(0, 3)$, $B(2, 2)$, $C(4, 1)$

Solución: a) SI, b) NON, c) SI

3.- Calcula o valor de k para que os puntos de coordenadas A (1, 7) B (-3, 4) C (k, 5) estean aliñados.

Solución: $k = -\frac{5}{3}$

4.- Determina k para que os puntos A(-3, 5), B(2, 1) e C(6, k) estean aliñados.

Solución: $k = -\frac{11}{5}$

5.- Dados os puntos P(3, 9) e Q(8, -1):

a) Indica o punto medio de PQ.

b) Indica o simétrico de P respecto de Q.

c) Indica o simétrico de Q respecto de P.

d) Obtén un punto A de PQ tal que $\frac{\vec{PA}}{\vec{AQ}} = 2/3$.

e) Obtén un punto B de PQ tal que $\frac{\vec{PB}}{\vec{PQ}} = 1/5$

Solución: a) $\left(\frac{11}{2}, 4\right)$; b) $P' = (13, -11)$; c) $Q' = (-2, 19)$; d) $A = (5, 5)$; e) $B = (4, 7)$

6.- O punto P(5, -2) é o punto medio do segmento AB, do que coñecemos o extremo A(2, 3). Indica B.

Solución: B=(8,-7)

7.- Indica o punto simétrico de P(1, -2) respecto do punto H(3, 0).

Solución: P'=(5,2)

8.- Calcula as coordenadas do punto P que divide o segmento de extremos A(3, 4) e B (0, -2) en dúas partes tales que $\vec{BP} = 2\vec{PA}$.

Solución: P=(2,2)

9.- Indica as coordenadas do vértice D do paralelogramo ABCD, se sabes que A(1, 2), B(5, -1) e C(6, 3).

Solución: D=(2,6)

ECUACIONES DA RECTA.

10.- Escribe as ecuacións da recta que pasa por A e que ten unha dirección paralela ao vector $\vec{d}$.

a) $A(-3, 7)$, $\vec{d}(4, -1)$

b) $A(-1, 0)$, $\vec{d}(0, 2)$

11.- Indica as ecuacións paramétricas, continua, implícita e explícita da recta que pasa por A e B, onde:

- a) A(-1, -1), B (3, 3)
c) A(3, 5), B (-1, 4)

- b) A(0, 4), B (6, 0)
d) A(3, 5), B (3, 2)

12.- Escribe a ecuación da recta que pasa por P e Q de todas as formas posibles. Indica, en todos os casos, un vector de dirección unitario.

- a) P(6, -2) e Q(0, 5) b) P(3, 2) e Q(3, 6)
c) P(0, 0) e Q(8, 0) d) P(2,1) e Q (-5,1)

13.- Escribe as ecuacións explícitas e implícitas dos eixes de coordenadas.

Solución: Eixe X: $y=0$ Eixe Y: $x=0$

POSICIÓN RELATIVAS.PUNTO DE CORTE.

14.- Indica a posición relativa destes pares de rectas:

- a) $r: 3x+5y-8=0$ b) $r: 2x+y-6=0$
 $s: 6x+10y+4=0$ $s: x-y=0$
 c) $r: \begin{cases} x=7+5t \\ y=-2-3t \end{cases}; \quad s: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \end{cases}$ d) $r: 3x-5y=0; \quad s: \begin{cases} x=2+5t \\ y=1+3t \end{cases}$

Solución: a) Paralelas; b) Córtanse en P(2,2); c) Córtanse en P(2,1); d) Paralelas

15.- Indica o punto de corte das rectas r e s en cada caso:

- a) $r: 2x-y+5=0$; $s: x+y+4=0$ b) $r: x-2y-4=0; \quad s: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-3t \end{cases}$
 c) $r: \begin{cases} x=2 \\ y=1+3t \end{cases}; \quad s: \begin{cases} x=3+2t \\ y=t \end{cases}$

Solución: a) P(-3,-1); b) P(2,-1); c) $P\left(2, -\frac{1}{2}\right)$

16.- Calcula o valor dos parámetros k e t para que as seguintes rectas se corten no punto A(1, 2):

$$r: kx - ty - 4 = 0$$

$$s: 2tx + ky - 2 = 0$$

Solución: k=2 e t=-1

17.- Determina o valor de k para que as rectas r e s sexan paralelas.

$$a) r: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} \quad s: \frac{x+5}{-6} = \frac{y-1}{k}$$

Solución: k=4

18.- Indica o valor de k para que as seguintes rectas sexan coincidentes:

$$r: 2x+3y+5=0; \quad s: \begin{cases} x=-6t+k \\ y=4t+2 \end{cases}$$

Solución: $k = \frac{-11}{2}$

19.- Estuda a posición relativa dos seguintes pares de rectas:

$$a) r: 5x + y + 7 = 0; \quad s: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -10t - 3 \end{cases}$$

$$b) r: 3x + 5y + 10 = 0; \quad s: -3x + 5y + 10 = 0$$

$$c) r: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 3 \end{cases}; \quad s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$$

Solución: a) Paralelas; b) Secantes (córtanse nun punto) ; c) Secantes (córtanse nun punto)

CÁLCULO DE RECTAS PARALELAS E PERPENDICULARES A UNHA DADA.

20.- Escribe as ecuacións paramétricas de dúas rectas que pasen por $P(4, -3)$ e sexan paralela e perpendicular, respectivamente, a $r: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$

Solución: $s_{\text{paralela a } r}: \begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = -3 + 2t \end{cases} \quad t_{\text{perpendicular a } r}: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3 + 5t \end{cases}$

21.- A pendente de r é $3/5$. Indica:

- As coordenadas dun vector paralelo á recta r .
- A pendente dunha recta perpendicular á recta r .
- As coordenadas dun vector perpendicular á recta r .

Solución: $a) d_{\text{paral}} = (5, 3); b) m = -\frac{5}{3}; c) M_{\text{perpen}} = (-3, -5)$

22.- Sexa $s: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases}$ Indica:

- Ecuación continua dunha recta, r_1 , perpendicular a s que pase por $P_1(5, -3)$.
- Ecuación implícita de r_2 paralela a s que pase por $P_2(0, 4)$.
- Ecuación explícita de r_3 perpendicular a s que pase por $P_3(-3, 0)$.

Solución: $a) \frac{x-5}{3} = \frac{y+3}{1}; b) 3x + y - 4 = 0; c) y = \frac{x}{3} + 1$

23.- Determina as ecuacións implícitas de dúas rectas que pasen por $P(-3, 4)$ e sexan paralela e perpendicular, respectivamente, a $r: 5x - 2y + 3 = 0$.

Solución: $a) 5x - 2y + 23 = 0; b) 2x + 5y - 14 = 0$

24.- Dada a recta $r: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$, escribe as ecuacións (en forma explícita) das seguintes rectas:

- Paralela a r que pasa por $A(-1, -3)$.
- Perpendicular a r que pasa por $B(-2, 5)$.

Solución: $a) y = \frac{-x}{5} - \frac{16}{5}; b) y = 5x + 15$

25.- Indica, en cada caso, a ecuación da recta que pasa polo punto $P(1, -3)$ e é:

- Paralela á recta $2x - 3y + 5 = 0$. En forma paramétrica.
- Perpendicular á recta $x + y - 3 = 0$. En forma continua.
- Paralela á recta $2y - 3 = 0$.
- Perpendicular á recta $x + 5 = 0$.

Solución:

26.- Indica a ecuación da paralela a $2x - 3y = 0$ cuxa ordenada na orixe é -2 .

Solución: $2x - 3y - 6 = 0$

27.- Dada a recta $4x + 3y - 6 = 0$, escribe a ecuación da recta perpendicular a ela no punto de corte co eixe de ordenadas.

Solución: $3x - 4y + 8 = 0$

28.- Escribe as ecuacións paramétricas das seguintes rectas:

a) O seu vector de posición é $\vec{a}=(-3,1)$ e o seu vector de dirección é perpendicular a $\vec{v}=(0,-2)$.

b) Pasa por $A(5, -2)$ e é paralela a: $\begin{cases} x=1-t \\ y=2t \end{cases}$

c) Pasa por $A(1, 3)$ e é perpendicular á recta de ecuación $2x - 3y + 6 = 0$.

d) É perpendicular ao segmento PQ no seu punto medio, onde $P(0, 4)$ e $Q(-6, 0)$.

29.- Dunha certa recta r coñecemos a pendente $m=\frac{2}{3}$. Indica a recta s en cada caso:

a) s é paralela á recta r e pasa pola orixe de coordenadas.

b) s é perpendicular á recta r e contén ao punto $(1, 2)$.

30.- Dada a recta: $r: \begin{cases} x=-1+3t \\ y=2+kt \end{cases}$ indica un valor para k de modo que r sexa paralela á bisectriz do segundo cuadrante.

Solución: $k = -3$

ÁNGULO FORMADO POR DÚAS RECTAS.

31.- Indica o ángulo que forman os seguintes pares de rectas:

a) $r_1: \begin{cases} x=3-2t \\ y=7+t \end{cases}$, $r_2: \begin{cases} x=1-4t \\ y=4+3t \end{cases}$ b) $r_1: \begin{cases} x=3-2t \\ y=7+t \end{cases}$, $r_2: 3x-5y+4=0$

c) $r_1: y=5x-1$, $r_2: y=4x+3$

a) $\alpha = 10^\circ 18' 17''$; b) $\alpha = 57^\circ 31' 44''$; c) $\alpha = 2^\circ 43' 35''$

Solución:

32.- Indica o ángulo que forman os seguintes pares de rectas:

a) $\begin{cases} y=2x+5 \\ y=-3x+1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-5y+7=0 \\ 10x+6y-3=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=3-t \\ y=2t \end{cases}$, $\begin{cases} x=-1-3t \\ y=4+t \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ 2y+3=0 \end{cases}$

a) $\alpha = 45^\circ$; b) $\alpha = 90^\circ$; c) $\alpha = 45^\circ$; d) $\alpha = 63^\circ 26' 6''$

Solución:

33.- Que ángulo forma a recta $3x - 2y + 6 = 0$ co eixe de abscisas?

Solución: $\alpha = 56^\circ 18' 36''$

34.- Calcula m e n nas rectas de ecuacións:

$r: mx - 2y + 5 = 0$

$s: nx + 6y - 8 = 0$

se sabes que r pasa polo punto $P(1, 4)$ e que r e s forman un ángulo de 45° .

Solución: $m = 3$ e $n = -1,2$ ou $n = 30$

DISTANCIA ENTRE DOUS PUNTOS. DISTANCIA DUN PUNTO A UNHA RECTA.

35.- $P(-6, -3)$, $Q(9, 5)$ $r: 3x - 4y + 9 = 0$, $s: 5x + 15 = 0$

Indica a distancia entre os dous puntos. Indica tamén as distancias de cada un dos puntos a cada recta.

$$a) d(A, B) = 17; b) d(P, r) = \frac{3}{5}; c) d(Q, r) = \frac{16}{5}; d) d(P, s) = 3; e) d(Q, s) = 12$$

Solución:

36.- Calcula k de modo que a distancia entre os puntos $A(5, k)$ e $B(3, -2)$ sexa igual a 2.

Solución: $k = -2$

37.- Indica o valor que debe ter a para que a distancia entre $A(a, 2)$ e $B(-3, 5)$ sexa igual a $\sqrt{13}$.

Solución: Dúas solucións: $a_1 = -1$ ou $a_2 = -5$

38.- Indica a lonxitude do segmento que determina a recta $x - 2y + 5 = 0$ ao cortar aos eixes de coordenadas.

Solución: $\sqrt{\frac{125}{4}}$

39.- Indica a distancia do punto $P(2, -3)$ ás seguintes rectas:

a) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \end{cases}$ b) $y = \frac{9}{4}$ c) $2x + 5 = 0$

Solución: a) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$; b) $\frac{21}{4}$; c) $\frac{9}{2}$

40.- Calcula a distancia da orixe de coordenadas ás seguintes rectas:

a) $3x - 4y + 12 = 0$ b) $2y - 9 = 0$
c) $x = 3$ d) $3x - 2y = 0$

Solución: a) $\frac{12}{5}$; b) $\frac{9}{2}$; c) 3; d) 0

41.- Determina c para que a distancia da recta $x - 3y + c = 0$ ao punto $(6, 2)$ sexa de $\sqrt{10}$ unidades. (Hai dúas solucións).

Solución: $c_1 = 10$ ou $c_2 = -10$

42.- Determina un punto na recta $y = 2x$ que diste 3 unidades da recta $3x - y + 8 = 0$.

Solución: Dúas solucións $A_1 = (-8 + 3\sqrt{10}, -16 + 6\sqrt{10})$, $A_2 = (-8 - 3\sqrt{10}, -16 - 6\sqrt{10})$

43.- Atopa o punto da recta $r: 4x - 8y + 7 = 0$ que equidista dos puntos $A(2, 1)$ e $B(1, -3)$.

44.- Calcula a ecuación das rectas paralelas a $r: 3x - 4y + 6 = 0$ que disten de ela 2 unidades.

45.- Calcula a ecuación da recta que pasa polo punto $P(2, -3)$ e forma un ángulo de 45° coa recta $r: 3x - y + 3 = 0$.

PERÍMETRO E ÁREA DUN TRIÁNGULO. CÁLCULO RECTAS NOTABLES: MEDIATRIZ, MEDIANA E ALTURA DUN TRIÁNGULO.

46.- Comproba que o triángulo de vértices $A(-3, 1)$, $B(0, 5)$ e $C(4, 2)$ é rectángulo e indica a área.

Solución: $\text{Área} = 12,5 u^2$

47.- Os vértices dun triángulo son: $A(4,4)$, $B(-1,3)$ e $C(3,-1)$. Comproba que é isósceles e calcula a súa área.

Solución: $\text{Área} = 12 u^2$

48.- Indica a área e o perímetro do triángulo cuxos vértices son $P(-1, 2)$, $Q(4, 7)$, $R(7, 0)$.

Solución: $\text{Área} = 25 u^2$ e $\text{Perímetro} = 5\sqrt{2} + \sqrt{58} + 2\sqrt{17} u$

49.- Calcula a área do triángulo de lados sobre as rectas: $r: x = 3$, $s: 2x + 3y - 6 = 0$ e $t: x - y - 7 = 0$.

50.- O lado desigual do triángulo isósceles ABC , ten por extremos $A(1, -2)$ e $B(4, 3)$. O vértice C está na recta $3x - y + 8 = 0$. Indica as coordenadas de C e a área do triángulo.

51.- No triángulo cuxos vértices son $A(1, 0)$, $B(-3, 2)$ e $C(3, 5)$, calcula:

a) Medida dos lados a , b e o ángulo C no triángulo ABC .

b) Perímetro

c) Área

d) Un punto D de tal forma que o cuadrilátero $ABCD$ sexa un paralelogramo e calcular a súa área e perímetro.

Solución:

$$a) a = \sqrt{45}; b = \sqrt{29}; c = \sqrt{20}; C = 41^\circ 38' \quad b) \text{Perímetro} = \sqrt{45} + \sqrt{29} + \sqrt{20} = 5\sqrt{5} + \sqrt{29} \text{ unidades}$$

$$c) \text{Área} = 12 u^2 \quad d) D(7, 1)$$

52.- No triángulo cuxos vértices son $O(0, 0)$, $A(4, 2)$ e $B(6, -2)$, calcula:

a) Perímetro

b) Área

c) Mediatriz segmento AB

d) Altura relativa ao lado AO

e) Mediana relativa ao lado OB

Solución:

$$a) \text{Perímetro} = \sqrt{20} + \sqrt{40} + \sqrt{20} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{10} \text{ unidades} \quad b) \text{Área} = 10 u^2 \quad c) \text{mediatriz}_{AB}: x - 2y - 5 = 0$$

$$d) h_{AO}: 2x + y - 10 = 0 \quad e) \text{mediana}_{OB}: 3x - y - 10 = 0$$

53.- No triángulo de vértices $A(-2, 3)$, $B(5, 1)$, $C(3, -4)$, indica as ecuacións:

a) Da altura que parte de B .

b) Da mediana que parte de A .

c) Da mediatriz do lado CA .

d) Área

Solución:

$$a) h_B: 5x - 7y - 18 = 0 \quad b) \text{mediana}_B: x - 3y - 2 = 0 \quad c) \text{mediatriz}_{CA}: 5x - 7y - 6 = 0 \quad d) A = \frac{39}{2} u^2$$

54.- A recta $2x + 3y - 6 = 0$ determina, ao cortar os eixes de coordenadas, o segmento AB . Indica a ecuación da mediatriz de AB .

CÁLCULO DO SIMÉTRICO DUN PUNTO RESPECTO A UNHA RECTA (SIMETRÍA AXIAL)

55.- Indica o punto simétrico de $P(1, 1)$ respecto á recta $x - 2y - 4 = 0$.

Solución: $P' = (3, -3)$

56.- Indica o punto simétrico de $P(2, 3)$ respecto á recta $3x - y + 2 = 0$.

Solución: $P' = (-1, 4)$

FEIXE DE RECTAS.

- 57.- Indica a recta do feixe de centro $P(-3, 5)$ que pasa por $(8, 4)$.
- 58.- Os feixes de rectas cuxos centros son $P(4, 0)$ e $Q(-6, 4)$ teñen unha recta en común. Cal é?
- 59.- As rectas $r: 3x - 5y - 7 = 0$ e $s: x + y + 4 = 0$ forman parte dun mesmo feixe. Cal das rectas dese feixe ten pendente 4?
- 60.- As rectas $r: y = 3$ e $s: y = 2x - 1$ forman parte do mesmo feixe de rectas. Indica a ecuación da recta dese feixe de pendente -2 .
- 61.- Consideramos o feixe de rectas de centro $(3, -2)$.
- Escribe a ecuación deste feixe de rectas.
 - Indica a ecuación da recta deste feixe que pasa polo punto $(-1, 5)$.
 - Cal das rectas do feixe é paralela a $2x + y = 0$?
 - Indica a recta do feixe cuxa distancia á orixe é igual a 3.

MÁIS EXERCICIOS DE REPASO...

- 62.- Sexan o punto $P(-2, -1)$ e as rectas $r: x + 2y - 1 = 0$ e $s: \begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$. Calcula:
- Simétrico do punto P respecto á recta r .
 - Ángulo formado polas rectas r e s .
 - Ecuación da recta que pasa polo punto P e forma coa recta s un ángulo de 45° .
 - Un punto da recta r que dista 5 unidades da recta s .
- 63.- Os puntos $P(-2, 4)$ e $Q(6, 0)$ son vértices consecutivos dun paralelogramo que ten o centro na orixe de coordenadas. Indica:
- Os outros dous vértices.
 - Os ángulos do paralelogramo.
- 64.- Calcula os seguintes lugares xeométricos:
- Bisectrices determinadas polas rectas: $r: 5x - 12y + 22 = 0$
 $s: 4x - 3y + 11 = 0$
 - Mediatriz do segmento determinado por $A(2, 5)$ e $B(-4, 3)$.
 - Circunferencia de centro $C(4, 5)$ e $r = 3$.
 - Circunferencia que pasa polos puntos $A(4, 2)$, $B(-2, 2)$ e $C(1, 5)$.
 - Lugar xeométrico dos puntos do plano que teñen igual distancia do punto $A(1, 2)$ e a recta $y = 3$.
 - Lugar xeométrico dos puntos P tales que a razón de distancias a dous puntos dados, $A(0, 0)$ e $B(6, 3)$, sexa igual a 2. : $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 2$
- 65.- Dados os puntos $A(-1, 1)$ e $B(5, 3)$, escribe a condición que deben cumprir en cada caso as coordenadas do punto $C(x, y)$ para que o triángulo ABC sexa:
- Isósceles, co lado AB desigual.
 - De área 5.
 - Equilátero.
 - Rectángulo en C .
- 66.- Se os vértices opostos dun cadrado son $A(0, 3)$ e $B(4, 0)$. Calcula os outros dous vértices.
- 67.- Dous vértices consecutivos dun cadrado son: $A(1, 2)$ e $B(3, -2)$. Calcula:
- As coordenadas dos outros dous vértices. Ten dúas solucións, calcula só unha delas.
 - As ecuacións da circunferencia inscrita e circunscrita.
 - Ecuacións da recta tanxente á circunferencia circunscrita trazada polo punto $P(5, 4)$.