

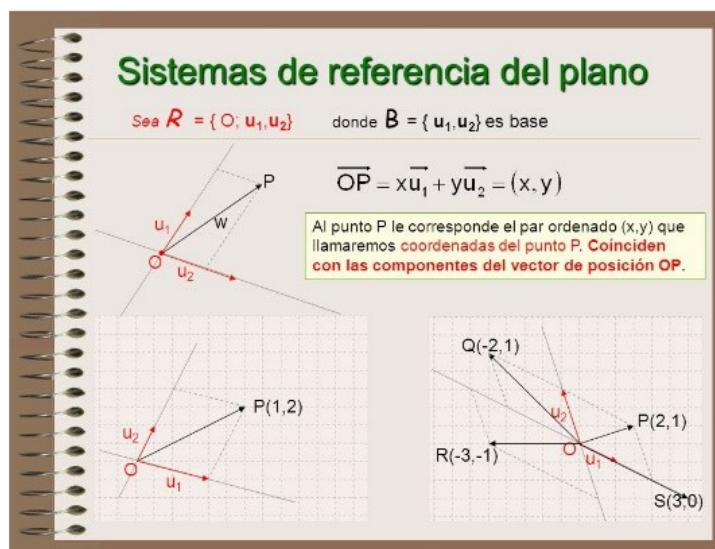
XEOMETRÍA ANALÍTICA. PROBLEMAS AFÍNS E MÉTRICOS.

1. SISTEMA DE REFERENCIA AFÍN

Chamamos sistema de referencia a un conxunto $R = \{O, B\}$ formado por:

- un punto fixo, O , chamado orixe
- Unha base B .

Aínda que podemos formar un sistema de referencia con calquera base, traballaremos no sucesivo ca base canónica $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$. Desta maneira conséguese o sistema de referencia co que xa estás acostumado a traballar.



VECTOR POSICIÓN.-

A cada punto P do plano asociámoslle o vector $\overrightarrow{OP}$ de coordenadas (a, b) , chamado **vector de posición do punto P** . Deste xeito cada punto do plano ten unas coordenadas (a, b) , que escribiremos $P(a, b)$.

VECTOR DIRECCIÓN.-

Os vectores serven tamén para marcar as direccións das recta. Un vector paralelo a unha recta dise que é un **vector dirección da recta**. Cada recta ten infinitos vectores dirección.

Un par de puntos dunha recta determinan un vector dirección.

COORDENADAS DE UN VECTOR QUE UNE DOUS PUNTOS.-

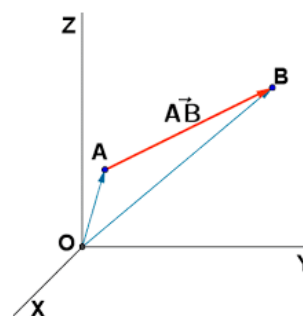
Supoñamos que temos dous puntos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$

. O vector $\overrightarrow{AB}$ verifica que:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

polo tanto

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$



Ej.-

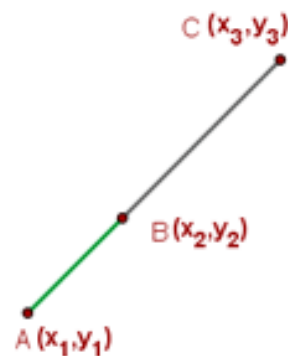
$$M(7, -5) \text{ y } N(-2, -11)$$

$$\overrightarrow{MN} = \text{coordenadas de } N - \text{coordenadas de } M = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (-2, -11) - (7, -5) = (-2-7, -11-(-5)) = (-9, -6)$$

$$\overrightarrow{NM} = \text{coordenadas de } M - \text{coordenadas de } N = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = (7, -5) - (-2, -11) = (7-(-2), -5-(-11)) = (9, 6)$$

CONDICIÓN PARA QUE TRES PUNTOS ESTEAN ALIÑADOS.-

Para que tres puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estean aliñados, os vectores $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$ teñen que ter a mesma dirección, é dicir, ten que existir un escalar tal que $\vec{AB} = k \vec{BC}$, ou o que é o mesmo, as súas coordenadas teñen que ser proporcionais:



$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ aliñados $\Leftrightarrow \vec{AB}$ y $\vec{BC}$ teñen a mesma dirección

(coordenadas proporcionais) $\Leftrightarrow \vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = k \cdot \vec{BC} = k \cdot (x_3 - x_2, y_3 - y_2) \Leftrightarrow \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1}$

Ex1.- $P(7, 11), Q(4, -3), R(10, 25)$ están aliñados?

$\left. \begin{array}{l} \vec{PQ} = (-3, -14) \\ \vec{QR} = (6, 28) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{PQ} \text{ y } \vec{QR} \text{ teñen a mesma dirección } (\vec{PQ} \parallel \vec{QR}) \text{ pq } \vec{QR} = -2 \cdot \vec{PQ} \Rightarrow P, Q \text{ y } R \text{ aliñados}$

Ex2.- Calcula x para que $P(1, 7), Q(3, -4), R(x, 5)$ estean aliñados.

$\left. \begin{array}{l} \vec{PQ} = (2, -11) \\ \vec{QR} = (x-3, 9) \end{array} \right\} \text{ Para que } \vec{PQ} \text{ y } \vec{QR} \text{ teñan a mesma dirección } (\vec{PQ} \parallel \vec{QR}) \text{ e por tanto } P, Q \text{ y } R \text{ estean aliñados:}$

$$\frac{2}{x-3} = \frac{-11}{9} \Rightarrow 18 = -11x + 33 \Rightarrow 11x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{11}$$

PUNTO MEDIO DUN SEGMENTO .-

As coordenadas do punto medio, M, dun segmento de extremos $A(x_1, y_1)$ y $A'(x_2, y_2)$ son:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



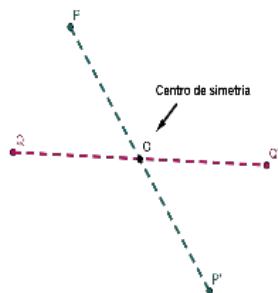
Dem.-

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AA'} = (x_1, y_1) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \left(x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1), y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1)\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ej.-

$$A(2, 3) B(4, 5) \rightarrow \text{Punto medio de } AB = M_{AB} = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = (3, 4)$$

Esta expresión serve tamén para calcular o simétrico P' dun punto P respecto doutro punto O .



En efecto, dado un punto $P(x_1, y_1)$ e un punto $O(x_0, y_0)$, o simétrico de P respecto de O é un punto $P'(x'_1, y'_1)$ tal que O é o punto medio do segmento $\overline{PP'}$.

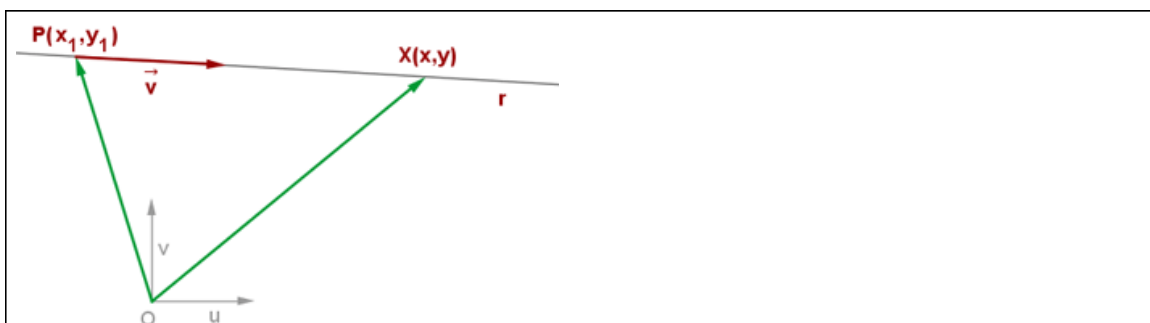
Ex.- Calcula A' o simétrico de $A(2,3)$ respecto a $B(4,5)$.

Se $A'(x, y)$ simétrico de A respecto a $B \rightarrow B$ es punto medio de $AA' \rightarrow M_{AA'} = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+3}{2} \right) = (4, 5)$

$$\begin{cases} \frac{x+2}{2} = 4 \\ \frac{y+3}{2} = 5 \end{cases} \rightarrow x = 6; y = 7 \rightarrow A'(6, 7)$$

ECUACIONES DA RECTA.-

ECUACIÓN VECTORIAL DA RECTA.-



Unha recta no plano está determinada por un punto $P(p_1, p_2)$ e un vector director.

$$\vec{d} = (d_1, d_2)$$

Sexa $\vec{OP}$ o vector de posición do punto e $\vec{OX} = (x, y)$ o vector de posición dun punto X calquera da recta.

Cúmrese que: $\vec{OX} = \vec{OP} + \lambda \vec{d}$

Esta ecuación chámase **ecuación vectorial da recta** e a partir dela obteremos todas as demais.

ECUACIÓN 3 PARAMÉTRICAS.-

Se poñemos as coordenadas no lugar dos vectores, queda así:

$$(x, y) = (p_1, p_2) + \lambda (d_1, d_2)$$

Expresando cada variable por separado obtéñense as **ecuacións paramétricas de r**:

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 \end{cases} \quad \lambda \text{ parámetro} \quad \text{Para cada valor de } \lambda, \text{ se obtiene un punto } (x, y) \text{ de } r$$

ECUACIÓN CONTINUA. ECUACIÓN DA RECTA QUE PASA POR DOUS PUNTOS.-

Se despexamos o parámetro e igualamos o resultado, obtense a **ecuación de r en forma continua**:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{x - p_1}{d_1} \\ \lambda &= \frac{y - p_2}{d_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x - p_1}{d_1} = \frac{y - p_2}{d_2}$$

ECUACIÓN XERAL OU IMPLÍCITA.-

Facendo operacións obtense unha expresión da forma:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{Ecuación xeral ou ecuación implícita de } r.$$

Desenvolvendo a ecuación continua, temos que

$$d_2(x - p_1) = d_1(y - p_2) \Rightarrow d_2x - d_1y - (p_1d_2 - d_1p_2) = 0$$

O vector de coordenadas (A, B) $A = d_2$ $B = -d_1$ é perpendicular á recta. Chámase **vector normal á recta**.

OBSERVACIÓN.-

Se $3x + 5y + 10 = 0$ é a ecuación xeral dunha recta, temos que saber que un vector director da recta é $\vec{d} = (-5, 3)$ e que un vector normal (perpendicular) á recta é $\vec{n} = (3, 5)$.

ECUACIÓN EXPLÍCITA.-

En todas as rectas, salvo nas paralelas ao eixo Y, despexando y, obtense unha expresión da forma:

$$y = mx + n$$

m pendiente

n ordenada en el origen

Ecuación explícita da recta de r

A pendente dunha recta é o incremento da ordeada cando a abscisa increméntase nunha unidade. A pendente dunha recta é a tanxente do ángulo que forma a recta coa parte positiva do eixo das X.

$$\text{Si } \vec{d} = (d_1, d_2) \Rightarrow m = \frac{d_2}{d_1}$$

Si m pendiente de la recta $\Rightarrow (1, m)$ es un vector director de la recta

Se m é a pedente de r , entón $-\frac{1}{m}$ pendente das rectas perpendiculares de r

ECUACIÓN PUNTO-PENDENTE.-

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

m pendiente de la recta
 (x_0, y_0) punto de la recta

Ex1.- Calcula as ecuacións da recta que pasa por P(2,-5) e ten como vector director $\vec{d}(2,-1)$.

$$\vec{OX} = \vec{OP} + \lambda \vec{d} \Rightarrow (x, y) = (2, -5) + \lambda(2, -1) \quad \text{ECUACIÓN VECTORIAL}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda \\ y = -5 - \lambda \end{array} \right\} \quad \text{ECUACIONES PARAMÉTRICAS}$$

$$\lambda = \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-1} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-1} \quad \text{ECUACIÓN CONTINUA}$$

$$-x+2=2y+10 \Rightarrow x+2y+8=0 \quad \text{ECUACIÓN XERAL OU IMPLÍCITA}$$

$$y = \frac{-x-8}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 4 \quad \text{ECUACIÓN EXPLÍCITA}$$

$$y+5 = -\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow y = -5 - \frac{1}{2}(x-2) \quad \text{ECUACIÓN EN FORMA PUNTO-PENDENTE}$$

Ex2.- Calcula as ecuacións da recta que pasa por P(2,-5) e por Q(-7,2).

$$\vec{d} = \vec{PQ} = (-9, 7)$$

$$\vec{OX} = \vec{OP} + \lambda \vec{d} \Rightarrow (x, y) = (2, -5) + \lambda(-9, 7) \quad \text{ECUACIÓN VECTORIAL}$$

$$\left. \begin{array}{l} x=2-9\lambda \\ y=-5+7\lambda \end{array} \right\} \text{ ECUACIONES PARAMÉTRICAS}$$

$$\lambda = \frac{x-2}{-9} = \frac{y+5}{7} \Rightarrow \frac{x-2}{-9} = \frac{y+5}{7} \text{ ECUACIÓN CONTINUA}$$

$$7x-14=-9y-45 \Rightarrow 7x+9y+31=0 \text{ ECUACIÓN XERAL OU IMPLÍCITA}$$

$$y = \frac{-7x-31}{9} \Rightarrow y = -\frac{7}{9}x - \frac{31}{9} \text{ ECUACIÓN EXPLÍCITA}$$

$$y+5 = -\frac{7}{9}(x-2) \Rightarrow y = -5 - \frac{7}{9}(x-2) \text{ ECUACIÓN EN FORMA PUNTO-PENDENTE}$$

FEIXE DE RECTAS.-

Ao conxunto de todas as rectas que pasan por un punto P, chámasele **feixe de rectas de centro P**.

A expresión analítica do feixe de rectas de centro $P(x_0, y_0)$ é:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

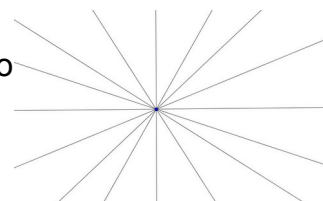
Ou tamén en función dunha pendente m variable:

$$y = y_0 + m(x-x_0)$$

Nesta expresión falta a recta $x=x_0$ que hai que engadir.

Se coñecemos dúas rectas do feixe en forma xeral $r: ax+by+c=0$ e $r': a'x+b'y+c'=0$ o feixe pode ponerse así:

$$k(ax+by+c)+k'(a'x+b'y+c')=0$$



POSICIÓN RELATIVA DE DÚAS RECTAS. PERPENDICULARIDADE E PARALELISMO.-

Dúas rectas no plano poden:

1.-**Cortarse nun punto** (se os vectores directores teñen distinta dirección). O punto de corte pódese obter resolvendo o sistema que forman as ecuacións das rectas.

Dúas rectas son perpendiculares se os seus vectores directores son perpendiculares.

2.-**Ser paralelas** (se os vectores directores teñen a mesma dirección e non teñen ningún punto en común)

3.-**Ser a mesma recta** (se os vectores directores teñen a mesma dirección e todos os puntos son comúns)

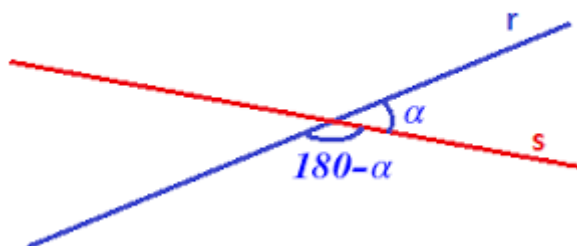
OBSERVACIÓN.-

Dúas rectas son perpendiculares se a pendente dunha é a inversa cambiada de signo da outra $m = \frac{-1}{m'}$

Se dúas rectas son perpendiculares e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ é o vector director dunha delas, entón un vector director da outra será $\vec{v}' = (-v_2, v_1)$

ÁNGULO FORMADO POR DÚAS RECTAS

Chámase ángulo formado por dúas rectas ao menor dos ángulos que forman.

**CASO1.-**

Se $\vec{d}_r$ e $\vec{d}_s$ son vectores directores de r e s

$$\cos(\widehat{r, s}) = \cos(\widehat{\vec{d}_r, \vec{d}_s}) = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r| \cdot |\vec{d}_s|} \Rightarrow \widehat{r, s} = \text{ángulo formado por r e s} = \arccos\left(\frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r| \cdot |\vec{d}_s|}\right)$$

Observa que, ao tomar o valor absoluto do produto escalar, o resultado é positivo e, polo tanto, o ángulo é agudo (ou cero se os vectores directores teñen a mesma dirección). Consideramos o ángulo formado por dúas rectas ao menor dos ángulos que forman, é dicir ao ángulo agudo.

CASO2.-

Se $\vec{n}_r$ e $\vec{n}_s$ son vectores normais de r e s

$$\cos(\widehat{r, s}) = \cos(\widehat{\vec{n}_r, \vec{n}_s}) = \frac{|\vec{n}_r \cdot \vec{n}_s|}{|\vec{n}_r| \cdot |\vec{n}_s|} \Rightarrow \widehat{r, s} = \text{ángulo formado por r e s} = \arccos\left(\frac{|\vec{n}_r \cdot \vec{n}_s|}{|\vec{n}_r| \cdot |\vec{n}_s|}\right)$$

CASO3.-

Se m_r e m_s pendentes das rectas r e s

$$\tan(\widehat{r, s}) = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right| \Rightarrow \widehat{r, s} = \text{ángulo formado por r e s} = \arctan\left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|$$

$m_r = \tan \alpha$, α ángulo que forma r e o eixo OX

$m_s = \tan \beta$, β ángulo que forma s e o eixo OX

$$\tan(\widehat{r,s}) = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \quad \text{supoñemos } \alpha > \beta$$

Tamén:

se m_r e m_s pendentes das rectas r e $s \Rightarrow (1, m_r)$ e $(1, m_s)$ vectores directores de r e $s \Rightarrow \text{CASO 1}$

CÁLCULO DE DISTANCIAS.-

DISTANCIA ENTRE DOUS PUNTOS.-

$$\text{Si } A = (x_0, y_0) \text{ y } B = (x_1, y_1); \quad d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Ex.-

$$\text{Si } A = (2, 3) \text{ y } B = (3, -1); \quad d(A, B) = |(1, -4)| = \sqrt{(3-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

DISTANCIA DUN PUNTO A UNHA RECTA.-

Si $P = (x_0, y_0)$ un punto y r una recta con ecuación general: $r: Ax + By + C = 0$

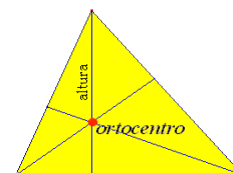
A distancia do punto P á recta r será :

$$d(P(x_0, y_0), r: Ax + By + C = 0) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\text{Ex.- } d(P(1, -5), r: 2x - y + 3 = 0) = \frac{|2 \cdot 1 - (-5) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} \text{ unidades}$$

RECTAS E PUNTOS NOTABLES DUN TRIÁNGULO.-

ALTURA TRIÁNGULO : Recta perpendicular a un dos lados que pasa polo vértice oposto. Nun triángulo hai 3 alturas que se cortan nun punto chamado : **ORTOCENTRO**.



Ex.- Calcula o **ortocentro** do triángulo de vértices: $A(2, -1)$, $B(4, 5)$ e $C(-4, 3)$.

1.- Calculamos a ecuación da altura do lado AB . (recta que pasa polo vértice C e é perpendicular ao vector $\vec{AB}$)

Temos un punto da recta $C(-4,3)$ e un vector director da recta $\vec{d}=(6,-2)$ porque é perpendicular a $\vec{AB}=(2,6)$. Polo tanto, a ecuación da recta en forma continua é:

$$\frac{x+4}{6} = \frac{y-3}{-2} \xrightarrow{\text{Pasando á ecuación xeral}} -2(x+4)=6(y-3) \rightarrow -2x-8=6y-18 \rightarrow 2x+6y-10=0 \rightarrow x+3y-5=0$$

Ecuación da altura do lado AB en forma xeral: $x+3y-5=0$.

2.- Calculamos a ecuación da altura do lado AC. (recta que pasa polo vértice B e é perpendicular ao vector $\vec{AC}$)

Temos un punto da recta B(4,5) e un vector director da recta $\vec{d}=(4,6)$ porque é perpendicular a $\vec{AC}=(-6,4)$. Polo tanto, a ecuación da recta en forma continua é:

$$\frac{x-4}{4} = \frac{y-5}{6} \xrightarrow{\text{Pasando á ecuación xeral}} 6(x-4)=4(y-5) \rightarrow 6x-24=4y-20 \rightarrow 6x-4y-4=0 \rightarrow 3x-2y-2=0$$

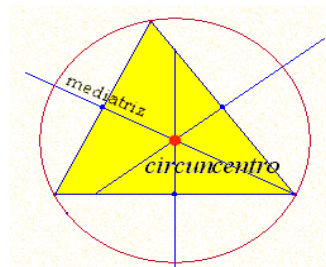
Ecuación da altura do lado AC en forma xeral: $3x-2y-2=0$.

3. Calcúlase o punto de intersección ORTOCENTRO resolvendo o sistema formado polas dúas alturas.

$$\left. \begin{array}{l} x+3y-5=0 \\ 3x-2y-2=0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ORTOCENTRO} : \left(\frac{16}{11}, \frac{13}{11} \right)$$

Pódese calcular a ecuación da altura do lado BC e comprobar que tamén pasa polo ortocentro.

MEDIATRIZ TRIÁNGULO: Recta perpendicular a un dos lados que pasa polo seu punto medio. Nun triángulo hai 3 mediatrices que se cortan nun punto chamado: **CIRCUNCENTRO**. O circuncentro é o centro da circunferencia circunscrita.



Ex.- Calcula o **circuncentro** do triángulo de vértices: A(7,-1), B(4,8) e C(-1,3).

1.- Calculamos a ecuación da mediatriz do lado AB. (recta que pasa polo punto medio de AB e é perpendicular ao vector $\vec{AB}$)

Temos un punto da recta PUNTO MEDIO DE AB = $M_{AB} = \left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2} \right)$ e un vector director da

recta $\vec{d}=(9,3)$ porque é perpendicular a $\vec{AB}=(-3,9)$. Polo tanto, a ecuación da recta en forma continua é:

$$\frac{x-\frac{11}{2}}{9} = \frac{y-\frac{7}{2}}{3} \xrightarrow{\text{Pasando á ecuación xeral}} 3\left(x-\frac{11}{2}\right)=9\left(y-\frac{7}{2}\right) \rightarrow 3x-\frac{33}{2}=9y-\frac{63}{2} \rightarrow 3x-9y+15=0 \rightarrow x-3y+5=0$$

Ecuación da mediatriz do lado AB en forma xeral: $x-3y+5=0$.

1.- Calculamos a ecuación da mediatriz do lado AC. (recta que pasa polo punto medio de AC e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{AC}$)

Temos un punto da recta PUNTO MEDIO DE AC = $M_{AC} = (3, 1)$ e un vector director da recta $\vec{d} = (4, 8)$ porque é perpendicular a $\overrightarrow{AC} = (-8, 4)$. Polo tanto, a ecuación da recta en forma continua é:

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{8} \xrightarrow{\text{Pasando á ecuación xeral}} 8(x-3) = 4(y-1) \rightarrow 8x-24 = 4y-4 \rightarrow 8x-4y-20=0 \rightarrow 2x-y-5=0$$

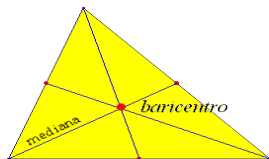
Ecuación da mediatriz do lado AC en forma xeral: $2x-y-5=0$.

3. Calcúlase o punto de intersección CIRCUNCENTRO resolvendo o sistema formado polas dúas mediatrices.

$$\left. \begin{array}{l} x-3y+5=0 \\ 2x-y-5=0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{CIRCUNCENTRO} : (4, 3)$$

Pódese calcular a ecuación da mediatriz do lado BC e comprobar que tamén pasa polo circuncentro.

MEDIANAS TRIÁNGULO: Recta que pasa por un vértice e o punto medio do lado oposto. Nun triángulo hai 3 medianas que se cortan nun punto chamado: **BARICENTRO**.



Ex.- Calcula o **baricentro** do triángulo de vértices: A(7,-1), B(4,8) e C(-1,3).

1.- Calculamos a ecuación da mediana do lado AB. (recta que pasa polo punto medio de AB e polo vértice oposto C)

Temos un punto da recta PUNTO MEDIO DE AB = $M_{AB} = \left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right)$ e un vector director da

recta $\vec{d} = \overrightarrow{M_{AB}C} = \left(\frac{-13}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ que ten a mesma dirección que $\vec{d} = (13, 1)$. Polo tanto, a ecuación da recta en forma continua é:

$$\frac{x-\frac{11}{2}}{13} = \frac{y-\frac{7}{2}}{1} \xrightarrow{\text{Pasando á ecuación xeral}} 1\left(x-\frac{11}{2}\right) = 13\left(y-\frac{7}{2}\right) \rightarrow x-\frac{11}{2} = 13y-\frac{91}{2} \rightarrow x-13y+40=0$$

Ecuación da mediana do lado AB en forma xeral: $x-13y+40=0$.

1.- Calculamos a ecuación da mediana do lado AC. (recta que pasa polo punto medio de AC e polo vértice oposto B)

Temos un punto da recta PUNTO MEDIO DE AC = $M_{AC} = (3, 1)$ e un vector director da recta $\vec{d} = \overrightarrow{M_{AC}B} = (1, 7)$. Polo tanto, a ecuación da recta en forma continua é:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{7} \xrightarrow{\text{Pasando á ecuación xeral}} 7(x-3) = 1(y-1) \rightarrow 7x-21 = y-1 \rightarrow 7x-y-20=0$$

Ecuación da mediana do lado AC en forma xeral: $7x-y-20=0$.

3. Cálculase o punto de intersección BARICENTRO resolvendo o sistema formado polas dúas medianas.

$$\begin{cases} x-13y+40=0 \\ 7x-y-20=0 \end{cases} \rightarrow \text{BARICENTRO} : \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3} \right)$$

Pódese calcular a ecuación da mediana do lado BC e comprobar que tamén pasa polo baricentro.

CALCULAR ÁREA DE UN TRIÁNGULO CONOCIENDO LAS COORDENADAS DE SUS VÉRTICES:

Ex.- Calcula a **área** do triángulo de vértices: A(1,-5), B(4,2) e C(-3,3).

1.- Calculamos a lonxitude da base: $b = |\overrightarrow{AB}| = \text{distancia de A a B} = |(3,7)| = \sqrt{3^2+7^2} = \sqrt{58}$

2.- Calculamos a altura do triángulo que vai ser a distancia de C ao lado AB, é dicir a distancia do punto C á recta que pasa por A e B :

Temos un punto da recta A(1,-5) e un vector director $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (3,7)$. Polo tanto, a ecuación da recta que pasa por AB en forma continua é:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+5}{7} \xrightarrow{\text{Pasando á ecuación xeral}} 7(x-1) = 3(y+5) \rightarrow 7x-7 = 3y+15 \rightarrow 7x-3y-22=0$$

Ecuación da recta que pasa por AB en forma xeral: $7x-3y-22=0$.

A distancia de C á recta $r: 7x-3y-22=0$ vén dada pola fórmula:

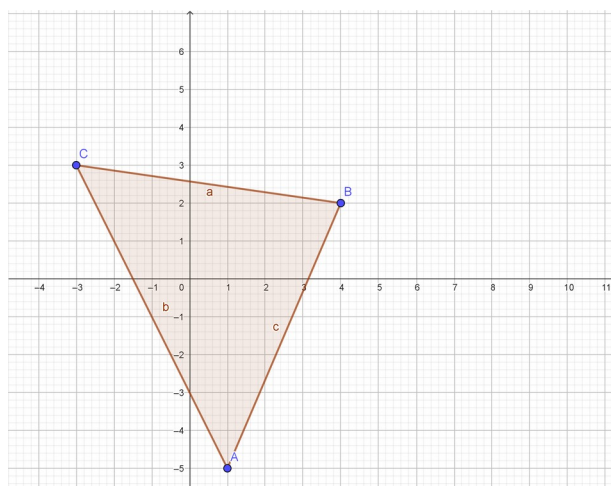
$$\text{altura} = \text{distancia}(C, r_{AB}) = \text{distancia}(C = (-3,3), r_{AB}: 7x-3y-22=0) = \frac{|7 \cdot (-3) - 3 \cdot 3 - 22|}{\sqrt{7^2 + (-3)^2}} = \frac{|-52|}{\sqrt{58}}$$

$$\text{altura} = \text{distancia}(C, r_{AB}) = \frac{52}{\sqrt{58}} \text{ unidades}$$

3.- Calculamos a área do triángulo :

$$\text{Área do triángulo} = \frac{\text{lonxitude da base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot \text{distancia}(C = (-3,3), \text{recta } r_{AB}: 7x-3y-22=0)}{2}$$

$$\text{Área do triángulo} = \frac{\sqrt{58} \cdot \frac{52}{\sqrt{58}}}{2} = \frac{52}{2} = 26 \text{ unidades cuadradas}$$



LUGARES XEOMÉTRICOS NO PLANO. MEDIATRIZ E BISECTRIZ. CÓNICAS. CIRCUNFERENCIA, ELIPSE, HIPÉRBOLA E PARÁBOLA. ECUACIONES E ELEMENTOS.

Un lugar xeométrico do plano é un conxunto de puntos do plano que verifican unha propiedade.

MEDIATRIZ DUN SEGMENTO AB:

Lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan dos extremos A e B.

Exemplo: Mediatriz do segmento que ten os extremos nos puntos A(5,2) e B(1,4).

$$P(x, y) \in \text{mediatriz} \rightarrow d(A, P) = d(B, P) \rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} \rightarrow$$

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2 \rightarrow \cancel{x^2} + 25 - 10x + \cancel{y^2} + 4 - 4y = \cancel{x^2} + 1 - 2x + \cancel{y^2} + 16 - 8y \rightarrow$$

$$-8x + 4y + 12 = 0 \rightarrow -2x + y + 3 = 0 \text{ Ecuación da mediatriz}$$

Exercicio: Mediatriz do segmento que ten os extremos nos puntos A(3,5) e B(-2,1).

BISECTRIZ DUN ÁNGULO:

Lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan das rectas que determinan o ángulo. Nun triángulo hai 3 bisectrices que se cortan nun punto que se chama: INCENTRO. O incentro é o centro da circunferencia inscrita.

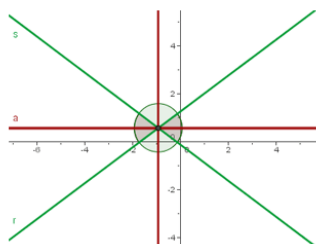


Exemplo: Bisectriz do ángulo formado polas rectas r: 3x-4y+5=0 e s: 6x+8y+1=0.

$$P(x, y) \in \text{bisectriz} \rightarrow d(P, r) = d(P, s) \rightarrow \frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6x + 8y + 1|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} \rightarrow \frac{|3x - 4y + 5|}{5} = \frac{|6x + 8y + 1|}{10} \rightarrow$$

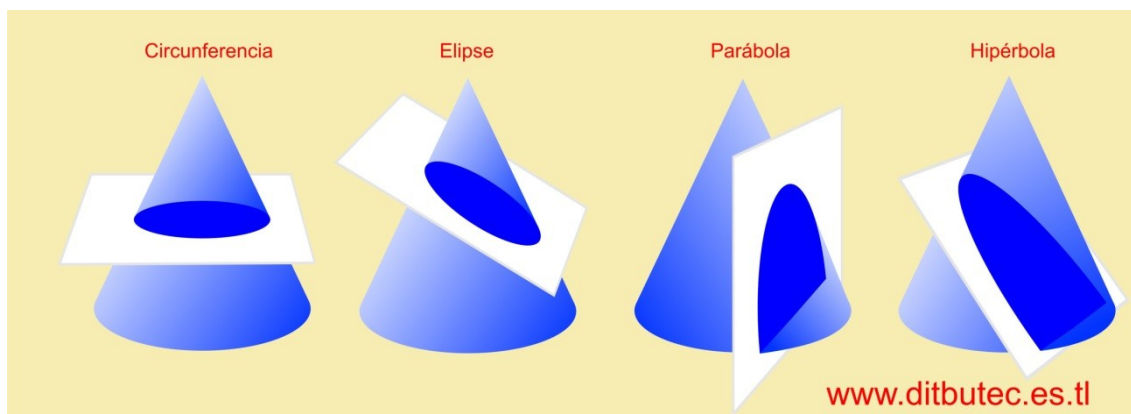
$$\rightarrow 10(3x - 4y + 5) = 5(6x + 8y + 1) \rightarrow 6x - 8y + 10 = 6x + 8y + 1 \rightarrow 16y - 9 = 0 \rightarrow y = \frac{9}{16} \text{ Bisectriz 1}$$

$$\rightarrow 10(3x - 4y + 5) = 5(-6x - 8y - 1) \rightarrow 6x - 8y + 10 = -6x - 8y - 1 \rightarrow 12x + 11 = 0 \rightarrow x = -\frac{11}{12} \text{ Bisectriz 2}$$



Exercicio: Bisectriz do ángulo formado polas rectas $r: x+y+2=0$ e $s: 3x-y+5=0$.

CÓNICAS:



CIRCUNFERENCIA DE CENTRO $C(a,b)$ E RAIÓ r :

Lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan do punto fixo $C(a,b)$ unha distancia r . A súa ecuación é $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$



Exemplo: Calcula a ecuación da circunferencia de centro $C(2,3)$ e $r=4$.

$$P(x,y) \in \text{circunferencia} \rightarrow d(P(x,y), C(2,3)) = 4 \rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 4 \rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16 \rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 16 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \quad \text{Ecuación xeral da circunferencia}$$

Exercicio: Calcula a ecuación da circunferencia de centro $C(3,1)$ e $r=3$.

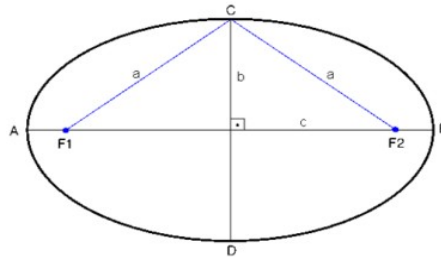
ELIPSE:

Lugar xeométrico dos puntos do plano tales que a suma das distancias a dous puntos fixos chamados focos é constante e igual a $2a$.

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a$$

Ecuación reducida: Focos no eixo X $a > b$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Relación fundamental } a^2 = b^2 + c^2 \quad F(c, 0) \quad F'(-c, 0)$$



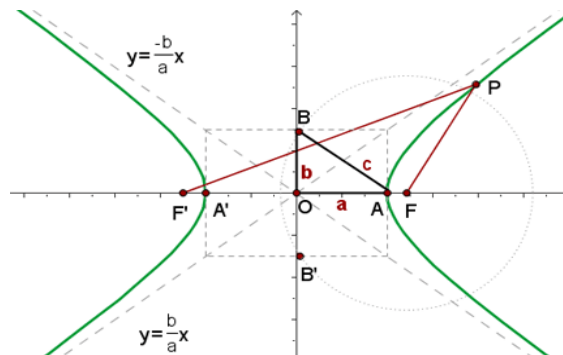
HIPÉRBOLE:

Lugar xeométrico dos puntos do plano tales que a diferenza das distancias a dous puntos fixos chamados focos é constante e igual a $2a$.

$$d(P, F) - d(P, F') = 2a$$

Ecuación reducida: Focos no eixo X $a > b$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Relación fundamental } a^2 + b^2 = c^2 \quad F(c, 0) \quad F'(-c, 0)$$



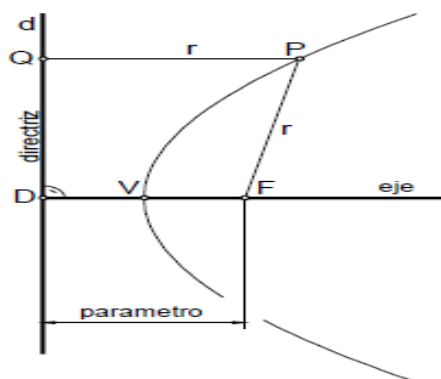
PARÁBOLA:

Lugar xeométrico dos puntos do plano tales que están a igual distancia dun punto fixo chamado foco e dunha recta fixa chamada directriz.

$$d(P, F) = d(P, d)$$

Ecuación reducida: Foco no eixo X

$$x = \frac{y^2}{2p} \quad F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \quad V(0, 0) \quad x = -\frac{p}{2} \text{ directriz } d(F, d) = p$$



Ecuación reducida: Foco no eixo Y

$$y = \frac{x^2}{2p} \quad F(0, \frac{p}{2}) \quad V(0,0) \quad y = -\frac{p}{2} \quad \text{directriz} \quad d(F, d) = p$$

