

PROBLEMAS VECTORES

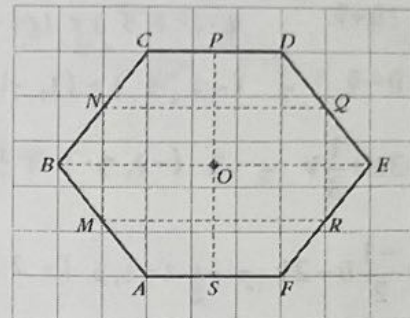
1.- A figura $ABCDEF$ é un hexágono. Compara o módulo, a dirección e o sentido dos seguintes pares de vectores:

a) $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$ Mesmo módulo, $\neq$ dirección e sentido

b) $\vec{FE}$ e $\vec{BC}$ Mesmo módulo, dirección e sentido

c) $\vec{BM}$ e $\vec{DE}$ $|\vec{BM}| = \frac{1}{2} |\vec{DE}|$, $=$ dirección e sentido

d) $\vec{OS}$ e $\vec{OE}$ Diferente módulo, dirección e sentido. $\vec{OS} \perp \vec{OE}$ (ortogonais = perpend.)



2.- Substitúe os puntos suspensivos por un número, de forma que estas igualdades sexan verdadeiras para o hexágono do exercicio 1.

a) $\vec{CD} = 2 \vec{CP}$

b) $\vec{MN} = \frac{1}{2} \vec{AC}$

c) $\vec{OP} = \dots \vec{OS}$

d) $\vec{NB} = \dots \vec{BC}$

3.- Completa as igualdades seguintes coas letras que faltan para que, no hexágono do exercicio 1, sexan verdadeiras:

a) $\vec{AF} + \vec{BC} = \vec{AE}$

b) $\vec{AS} + \vec{OC} = \vec{SF}$

c) $\vec{OP} + \vec{SO} = \vec{FD}$

d) $\vec{AM} + \vec{AM} = \vec{AB}$

4.- Observa o rombo da figura e calcula:

Expresa os resultados utilizando os vértices do rombo.

a) $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

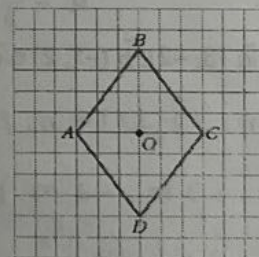
b) $\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OC} = \vec{AB}$

c) $\vec{OA} + \vec{OD} = \vec{CD}$

d) $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AA}$

e) $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

f) $\vec{DB} - \vec{CA} = 2 \vec{DC}$



5.- Se $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ é unha base dos vectores do plano, sinala cales dos seguintes pares de vectores poden ser outra base:

a) $\{3\vec{a}, -2\vec{b}\}$

Son BASE (son independentes ($\neq$ dirección))

b) $\{-\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}\}$

Non son BASE (son dependentes ($=$ dirección): $-\vec{a} - \vec{b} = (-1) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$)

c) $\{\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}\}$

Son BASE (son independentes ($\neq$ dirección))

d) $\{\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a}\}$

Non son BASE (son dependentes ($=$ dirección): $\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a})$)

6.- Se $\vec{u} = (-2, 5)$ e $\vec{v} = (1, -4)$ son as coordenadas de dous vectores respecto dunha base, determina as coordenadas respecto da mesma base de:

a) $2\vec{u} + \vec{v} = 2 \cdot (-2, 5) + (1, -4) = (-4, 10) + (1, -4) = (-3, 6)$

b) $\vec{u} - \vec{v} = (-2, 5) - (1, -4) = (-3, 9)$

c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = 3 \cdot (-2, 5) + \frac{1}{3}(1, -4) = (-6, 15) + \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{17}{3}, \frac{41}{3}\right)$

d) $\frac{-1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} = -\frac{1}{2}(-2, 5) - 2(1, -4) = \left(1, -\frac{5}{2}\right) - (2, -8) = \left(-1, \frac{11}{2}\right)$

7.- Indica o vector $\vec{b}$ tal que $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, onde $\vec{a}(-1, 3)$ e $\vec{c}(7, -2)$.

$\vec{b} = (x, y)$

$(7, -2) = 3 \cdot (-1, 3) - \frac{1}{2} \cdot (x, y)$

$(7, -2) = (-3, 9) - \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$

$7 = -3 - \frac{x}{2} \Rightarrow 10 = -\frac{x}{2} \Rightarrow x = -20$

$-2 = 9 - \frac{y}{2} \Rightarrow -11 = -\frac{y}{2} \Rightarrow y = 22$

$\vec{b} = (-20, 22)$

8.- Cales dos seguintes pares de vectores forman unha base?

a) $\vec{u}(3, -1), \vec{v}(1, 3)$ TÊNEN $\neq$ DIRECCIÓN (INDEPENDENTES) $\Rightarrow$ BASE

(pq. $\vec{u} = k\vec{v}, \nexists k \in \mathbb{R}$)

b) $\vec{u}(2, 6), \vec{v}\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ TÊNEN A MESMA DIRECCIÓN (DEPENDENTES) $\Rightarrow$ NON BASE

$\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{v}$

9.- Dados os vectores $\vec{a}(3, -2), \vec{b}(-1, 2)$ e $\vec{c}(0, -5)$, calcula m e n de modo que: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$

$(0, -5) = m \cdot (3, -2) + n \cdot (-1, 2)$

$(0, -5) = (3m, -2m) + (-n, 2n)$

$(0, -5) = (3m - n, -2m + 2n) \Rightarrow \begin{cases} 3m - n = 0 \\ -2m + 2n = -5 \end{cases} \begin{matrix} 2E_1 \\ E_2 \end{matrix} \begin{matrix} 6m - 2n = 0 \\ -2m + 2n = -5 \end{matrix}$

$4m = -5$

$m = -\frac{5}{4}$

$n = 3m = -\frac{15}{4}$

$\vec{c} = -\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{15}{4}\vec{b}$

10.- Expresa o vector $\vec{a}(-1, -8)$ como combinación lineal de $\vec{b}(3, -2)$ e $\vec{c}\left(4, -\frac{1}{2}\right)$

$\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$

$(-1, -8) = m(3, -2) + n\left(4, -\frac{1}{2}\right)$

$\begin{cases} -1 = 3m + 4n \\ -8 = -2m - \frac{n}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = 3m + 4n \\ -16 = -4m - n \end{cases} \begin{matrix} G_1 \\ 4E_2 \end{matrix} \begin{matrix} -1 = 3m + 4n \\ -64 = -16m - 4n \end{matrix}$

$-65 = -13m$

$m = \frac{65}{13} = 5$

$n = -4m + 16 = -4 \cdot 5 + 16 = -4$

11.- Nunha base ortonormal as coordenadas dun vector son $\vec{v} = (2, -5)$

Determina as coordenadas de $\vec{v}$ na base $B = \{(1, -1), (0, -1)\}$.

$$\vec{v} = a(1, -1) + b(0, -1)$$

$$(a, b) = \vec{v}$$

$$(2, -5) = a \cdot (1, -1) + b(0, -1)$$

$$\begin{cases} 2 = a \\ -5 = -a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ -5 = -2 - b \Rightarrow b = -2 + 5 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

$$\vec{v} = (2, 3) \text{ p.q. } \vec{v} = \underline{2} \cdot (1, -1) + \underline{3} \cdot (0, -1)$$

respecto a $B = \{(1, -1), (0, -1)\}$

12.- Dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ cumpren que: $|\vec{u}| = 4, |\vec{v}| = \frac{3}{2}$ e o ángulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 30° . Calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos 30^\circ = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

b) $\vec{v} \cdot \vec{u} \stackrel{\text{COMUTATIVA}}{=} \vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{3}$

c) $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -3\sqrt{3}$

d) $3\vec{u} \cdot (-5\vec{v}) = -15(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -15 \cdot (3\sqrt{3}) = -45\sqrt{3}$

e) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cos \angle(\vec{u}, \vec{u}) = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cos 0^\circ = 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$

f) $\vec{v} \cdot (-\vec{v}) = -(\vec{v} \cdot \vec{v}) = -(|\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cos 0^\circ) = -\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1\right) = -\frac{9}{4}$

13.- Se $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 5$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$, determina o ángulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (Usa a calculadora).

$$\cos \alpha = \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-2}{3 \cdot 5} = -\frac{2}{15} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{2}{15}\right) = 97^\circ 39' 44''$$

14.- Indica $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{u})$ e $\vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{u})$ se sabes que $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 5$ e o ángulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 120° .

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) \stackrel{\text{P. DISTR.}}{=} \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos 120^\circ + |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cos 0^\circ = 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot 3 \cdot 1 = -\frac{15}{2} + 9 = \frac{3}{2}$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) \stackrel{\text{P. DISTR.}}{=} \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cos 0^\circ - |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cos 120^\circ = 5 \cdot 5 \cdot 1 - 5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 25 + \frac{15}{2} = \frac{65}{2}$$

15.- Indica se o resultado das seguintes operacións é un número ou un vector:

a) $2\vec{a} \cdot \vec{b}$

(Nº)

b) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$

(VECTOR)

c) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{c}$

(Nº)

d) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

(Nº)

16.- Dados os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mediante as súas coordenadas respecto a unha base ortonormal, $\vec{u}=(3, -4)$, $\vec{v}=(-1, 3)$, indica:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e $\vec{v} \cdot \vec{u}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -4) \cdot (-1, 3) = 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 = -3 - 12 = -15$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} \stackrel{\text{P. CONMUT.}}{=} \vec{u} \cdot \vec{v} = -15$$

b) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ e ángulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-15}{\sqrt{3^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 3^2}} = \frac{-15}{5 \cdot \sqrt{10}} = \frac{-3}{\sqrt{10}}$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = 161^\circ 33' 54''$$

c) O valor de k para que $(4, k)$ sexa perpendicular a $\vec{v}$.

$$(4, k) \perp \vec{v} \Leftrightarrow (4, k) \cdot (-1, 3) = 0 \Rightarrow -4 + 3k = 0 \Rightarrow 3k = 4 \Rightarrow k = \frac{4}{3}$$

d) Un vector unitario perpendicular a $\vec{u}$. $\vec{u} = (3, -4)$

$$\vec{u}_\perp = (4, 3) \quad \left(\begin{array}{l} \text{perpendicular a } \vec{u} \\ |\vec{u}_\perp| = \sqrt{16+9} = 5 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{u}_\perp = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{perpend. a } \vec{u} \\ \text{e unitario} \end{array} \right)$$

17.- Calcula k para que o produto $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sexa igual a 0 nos seguintes casos:

a) $\vec{u}(6, k), \vec{v}(-1, 3)$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 3k = 0 \Rightarrow k = 2$

b) $\vec{u}\left(\frac{1}{5}, -2\right), \vec{v}(k, 3)$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{k}{5} - 6 = 0 \Rightarrow k = 30$

Se dividimos un vector polo seu módulo obtemos un vector coa mesma dirección, sentido e unitario (módulo 1)

18.- Dados $\vec{u}(2, 3)$, $\vec{v}(-3, 1)$ e $\vec{w}(5, 2)$, calcula:

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w} = 3\vec{u} \cdot \vec{w} + 2\vec{v} \cdot \vec{w} = 3 \cdot (2, 3) \cdot (5, 2) + 2 \cdot (-3, 1) \cdot (5, 2) = 3 \cdot 16 + 2 \cdot (-13) = 48 - 26 = 22$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w} = (2, 3) \cdot (5, 2) - (-3, 1) \cdot (5, 2) = 16 - (-13) = 16 + 13 = 29$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} = ((2, 3) \cdot (-3, 1)) \cdot (5, 2) = (-6 + 3) \cdot (5, 2) = -3 \cdot (5, 2) = (-15, -6)$

d) $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (2, 3) \cdot ((-3, 1) \cdot (-3, 1)) = (2, 3) \cdot (9 + 1) = (2, 3) \cdot 10 = (20, 30)$

19.- Determina o módulo de cada un dos seguintes vectores:

a) $\vec{u}(3, 2)$ $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

b) $\vec{v}(-2, 3)$ $|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

c) $\vec{z}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $|\vec{z}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

$\hookrightarrow$ vector unitario (módulo = 1)

20.- Calcula o valor de m para que o módulo do vector $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, m\right)$, m sexa igual a 1.

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + m^2} = 1 \Rightarrow \left(\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + m^2}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + m^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9}{25} + m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow m^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow m = \pm \frac{4}{5}$$

21.- Calcula o ángulo que forman os seguintes pares de vectores:

a) $\vec{u}(3,2), \vec{v}(1,-5)$ $\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v})$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(3,2) \cdot (1,-5)}{\sqrt{3^2+2^2} \sqrt{1^2+(-5)^2}} = \frac{3-10}{\sqrt{13} \sqrt{26}} = \frac{-7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}}\right) = 112^\circ 22' 48''$$

b) $\vec{m}(4,6), \vec{n}(3,-2)$ $\beta = \angle(\vec{m}, \vec{n})$

$$\cos \beta = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(4,6) \cdot (3,-2)}{\sqrt{4^2+6^2} \cdot \sqrt{3^2+(-2)^2}} = \frac{12-12}{\sqrt{52} \sqrt{13}} = 0$$

$$\beta = 90^\circ$$

22.- Calcula x , para que os vectores de $\vec{a}(7,1)$ e $\vec{b}(1,x)$ formen un ángulo de 45° .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 45^\circ \Rightarrow 7+x = \sqrt{7^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7+x = \sqrt{50} \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 14+2x = \sqrt{100 \cdot (1+x^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (14+2x)^2 = (\sqrt{100(1+x^2)})^2 \Rightarrow 196+4x^2+56x = 100+100x^2 \Rightarrow 96x^2-56x-96=0$$

$$\Rightarrow 12x^2-7x-12=0 \begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} \\ x_2 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

23.- Calcula x , para que $\vec{a}(3,x)$ e $\vec{b}(5,2)$ formen un ángulo de 60° .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 60^\circ \Rightarrow 15+2x = \sqrt{9+x^2} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30+4x = \sqrt{29 \cdot (9+x^2)} \Rightarrow (30+4x)^2 = (129(9+x^2)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 900+16x^2+240x = 261+29x^2 \Rightarrow 13x^2-240x-639=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 20,82 \\ x_2 = -2,36 \end{cases}$$

outras solucións: $\vec{b}_1(1, \frac{4}{3})$ ou $\vec{b}_2(1, -\frac{3}{4})$
outras solucións: $\vec{a}_1(3, 20,82)$ ou $\vec{a}_2(3, -2,36)$

24.- Determina as coordenadas de certo vector $\vec{x}$, sabendo que forma un ángulo de 60° con $\vec{a}(2,4)$ e que os módulos dos dous son iguais.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x}(x,y) \\ |\vec{x}| = \sqrt{x^2+y^2} \end{array} \right\} \vec{x} \cdot \vec{a} = |\vec{x}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x+4y = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{2^2+4^2} \cdot \frac{1}{2} \\ \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{x^2+y^2} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x+4y = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{20} \cdot \frac{1}{2} \\ \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{20} \quad (E_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x+4y = \sqrt{20} \cdot \sqrt{20} \cdot \frac{1}{2} \\ x^2+y^2 = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x+4y = 10 \\ x^2+y^2 = 20 \end{array} \right\}$$

$$E_1: x = \frac{10-4y}{2} = 5-2y \quad E_2: x^2+y^2 = 20 \Rightarrow (5-2y)^2+y^2 = 20 \Rightarrow 25+4y^2-20y+y^2 = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y^2-20y+5=0 \Rightarrow y^2-4y+1=0 \Rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Se $y = 2+\sqrt{3} \Rightarrow x = 5-2y = 5-2(2+\sqrt{3}) = 1-2\sqrt{3}$
Se $y = 2-\sqrt{3} \Rightarrow x = 5-2y = 5-2(2-\sqrt{3}) = 1+2\sqrt{3}$

$$\vec{x}_1 = (1-2\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$$

$$\vec{x}_2 = (1+2\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$$

25.- Determina un vector $\vec{a}$ que forme con $\vec{b}(-1, -2)$ un ángulo de 30° e tal que $|\vec{a}| = \sqrt{3}|\vec{b}|$.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (x, y) & |\vec{a}| &= \sqrt{3}|\vec{b}| \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 30^\circ & \left. \begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} \\ -x - 2y &= \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{15} \\ -x - 2y &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 15 \\ -x - 2y &= \frac{15}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 15 \\ 2x + 4y &= -15 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Resolviendo}} \begin{aligned} \vec{a}_1 &= (-1/5 - \sqrt{3}, -3 + \frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \text{ou} \\ \vec{a}_2 &= (-1/5 + \sqrt{3}, -3 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \end{aligned}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{15}$$

26.- Dado o vector $\vec{u}(-5, k)$ calcula k de modo que:

a) $\vec{u}$ sexa ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \Rightarrow -20 - 2k = 0 \Rightarrow \underline{k = -10}$$

b) O módulo $|\vec{u}|$ de sexa igual a $\sqrt{34}$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{34} \Rightarrow \sqrt{25 + k^2} = \sqrt{34} \Rightarrow 25 + k^2 = 34 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow \underline{k = \pm 3}$$

27.- Se $\vec{u}(5, -b)$ e $\vec{v}(a, 2)$, determina a e b , sabendo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son ortogonais e que $|\vec{v}| = \sqrt{13}$

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} \perp \vec{v} &\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 5a - 2b = 0 \\ |\vec{v}| = \sqrt{13} &\Rightarrow \sqrt{a^2 + 4} = \sqrt{13} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 5a - 2b &= 0 \\ a^2 + 4 &= 13 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} 5a - 2b &= 0 \\ a^2 &= 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{a = \pm 3}$$

Para $a = 3$, $5a - 2b = 0 \Rightarrow 15 - 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{15}{2}$
 Para $a = -3$, $5a - 2b = 0 \Rightarrow -15 - 2b = 0 \Rightarrow b = -\frac{15}{2}$

$$\vec{u}_1 = (5, +\frac{15}{2}) \text{ e } \vec{v}_1 = (3, 2) \quad \text{ou} \quad \vec{u}_2 = (5, -\frac{15}{2}) \text{ e } \vec{v}_2 = (-3, 2)$$

28.- Indica as coordenadas dun vector $\vec{v}(x, y)$, ortogonal a $\vec{u}(3, 4)$ e que mida o dobre ca $\vec{u}$.

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} \perp \vec{u} &\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 3x + 4y = 0 \\ |\vec{v}| = 2|\vec{u}| &\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \cdot \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 10 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 3x + 4y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 100 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} E_1: y &= -\frac{3x}{4} \\ E_2: x^2 + \left(-\frac{3x}{4}\right)^2 &= 100 \Rightarrow x^2 + \frac{9x^2}{16} = 100 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{16x^2 + 9x^2}{16} = \frac{1600}{16} \Rightarrow 25x^2 = 1600 \Rightarrow x^2 = \frac{1600}{25} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1600}{25}} = \pm \frac{40}{5} = \pm 8$$

$$\vec{v}_1 = (8, -6) \text{ ou } \vec{v}_2 = (-8, 6)$$

29.- Dado o vector $\vec{u}(6, -8)$ determina:

a) Os vectores unitarios (módulo 1) da mesma dirección ca $\vec{u}$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow \pm \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \pm \left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10} \right) \Rightarrow \begin{aligned} \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right) &= \vec{u}_1 \\ \left(-\frac{3}{5}, +\frac{4}{5} \right) &= \vec{u}_2 \end{aligned}$$

↓
vector unitario
coa mesma dirección

b) Os vectores ortogonais a $\vec{u}$ que teñan o mesmo módulo ca $\vec{u}$.

Vectores ortogonais a $\vec{u}$ co mesmo módulo ca $\vec{u}$ $\rightarrow \vec{u}_1(8,6)$ e $\vec{u}_2(-8,-6)$

c) Os vectores unitarios e ortogonais a $\vec{u}$.

$$\frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} = \left(\frac{8}{10}, \frac{6}{10} \right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|} = \left(\frac{-8}{10}, \frac{-6}{10} \right) = \left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5} \right)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{p. conmut.})$$

30.- De dous vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sabemos que $|\vec{a}|=3$ e $|\vec{b}|=5$ e que forman un ángulo de 120° . Calcula $|\vec{a}-\vec{b}|$.

$$\begin{aligned} |\vec{a}-\vec{b}|^2 &= (\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 120^\circ = \\ &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = 9 + 25 + 15 = 49 \end{aligned}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{49} = 7$$

31.- Sabendo que: $|\vec{u}|=5$ e $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=9$, calcular $|\vec{v}|$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (\text{p. conmut.})$$

$$(\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 9$$

$$\text{Como } |\vec{u}|=5$$

$$5^2 - |\vec{v}|^2 = 9 \Rightarrow |\vec{v}|^2 = 5^2 - 9 \Rightarrow |\vec{v}|^2 = 16$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{16} \Rightarrow |\vec{v}| = 4$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{p. conmut.})$$

32.- Calcular $\vec{a} \cdot \vec{b}$, sabendo que: $|\vec{a}+\vec{b}|=6$, $|\vec{a}|=3$ e $|\vec{b}|=5$. ¿Qué ángulo forman $\vec{a}$ e $\vec{b}$?

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$\Rightarrow 36 = 3^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 5^2 \Rightarrow 36 - 9 - 25 = 2\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow 2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = 1 \Rightarrow 3 \cdot 5 \cdot \cos \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{15}\right) \approx 86^\circ 10' 39''$$

$$\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{p. conmut.})$$

33.- De dous vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sabemos que $|\vec{a}|=6$ e $|\vec{b}|=9$ e que forman un ángulo de 120° . Calcula $|\vec{a}-\vec{b}|$.

$$\begin{aligned} |\vec{a}-\vec{b}|^2 &= (\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = \\ &= |\vec{a}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 120^\circ + |\vec{b}|^2 = 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + 9^2 = \end{aligned}$$

$$= 36 + 54 + 81 = 171 \Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{171}$$

34.- Demuestra que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ teñen o mesmo módulo, entón $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ son vectores ortogonais.

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0 \Rightarrow$$

Como $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

$\Rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v})$ (p. produto escalar é cero)

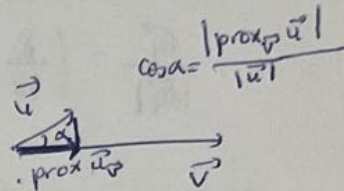
35.- Dados os vectores: $\vec{u} = (-1, 2)$ e $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$ calcula: $\vec{v} = (3, -1)$

a) Proxección do vector $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

$\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v})$

Proxección do vector $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = |\vec{u}| \cdot \cos \alpha = |\vec{u}| \cdot \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$

$= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{|(-1, 2) \cdot (3, -1)|}{|(3, -1)|} = \frac{|-3 - 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$



O vector proxección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \frac{-5}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\frac{5}{\sqrt{10}} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}} \right) = \left(-\frac{15}{10}, \frac{5}{10} \right)$

b) Os módulos de $\vec{u} + \vec{v}$ e $2\vec{u} - \vec{v}$.

$\vec{u} + \vec{v} = (-1, 2) + (3, -1) = (2, 1) \quad |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$2\vec{u} - \vec{v} = 2(-1, 2) - (3, -1) = (-2, 4) - (3, -1) = (-5, 5) \quad |2\vec{u} - \vec{v}| = |(-5, 5)| = \sqrt{50}$

c) O produto escalar: de $(3\vec{u} + \vec{v})$ e $\vec{u} - 2\vec{v}$.

$(3\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) = 3\vec{u} \cdot \vec{u} - 3 \cdot 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - 2\vec{v} \cdot \vec{v} = 3|\vec{u}|^2 - 6\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2|\vec{v}|^2 =$

$= 3 \cdot 5 - 6 \cdot |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha - 2 \cdot 10 = 15 - 6 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{(-5)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} - 20 = 15 + 30 - 20 = 25$

$\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v})$

$|\vec{u}| = \sqrt{5} \Rightarrow |\vec{u}|^2 = 5$

$|\vec{v}| = \sqrt{10} \Rightarrow |\vec{v}|^2 = 10$

$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-3 - 2}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = \frac{-5}{\sqrt{5} \sqrt{10}}$

d) O valor de x para que o vector $\vec{y} = (x, 3)$ forme un ángulo de 60° co vector $\vec{v}$.

$\vec{y} \cdot \vec{v} = |\vec{y}| |\vec{v}| \cos 60^\circ$

$(x, 3) \cdot (3, -1) = \sqrt{x^2 + 9} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 2(3x - 3) = \sqrt{10(x^2 + 9)}$

$\Rightarrow (6x - 6)^2 = (\sqrt{10(x^2 + 9)})^2 \Rightarrow 36x^2 + 36 - 72x = 10x^2 + 90 \Rightarrow$

$\Rightarrow 26x^2 - 72x - 54 = 0 \Rightarrow 13x^2 - 36x - 27 = 0 \Rightarrow$

$x = \frac{36 \pm \sqrt{2700}}{2 \cdot 13} = \frac{36 \pm 30\sqrt{3}}{26}$

$x_1 = \frac{36 + 30\sqrt{3}}{26} = \frac{18 + 15\sqrt{3}}{13}$

$x_2 = \frac{36 - 30\sqrt{3}}{26} = \frac{18 - 15\sqrt{3}}{13}$