

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CALQUERA. TEOREMA DO SENO E DO COSENO.

23.- Calcula a e b no triángulo ABC no que: $A = 55^\circ$, $B = 40^\circ$, $c = 15$ m.

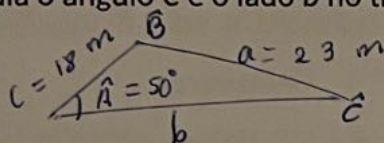
$$\hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180 - (55 + 40) = 180 - 95 = 85^\circ$$

Polo TH. SENO: $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$

$$\frac{a}{\text{sen } 55^\circ} = \frac{15}{\text{sen } 85^\circ} \Rightarrow a \cdot \text{sen } 85^\circ = 15 \cdot \text{sen } 55^\circ \Rightarrow \underline{a = \frac{15 \cdot \text{sen } 55^\circ}{\text{sen } 85^\circ} = 12'33 \text{ m}}$$

$$\frac{b}{\text{sen } 40^\circ} = \frac{15}{\text{sen } 85^\circ} \Rightarrow b \cdot \text{sen } 85^\circ = 15 \cdot \text{sen } 40^\circ \Rightarrow \underline{b = \frac{15 \cdot \text{sen } 40^\circ}{\text{sen } 85^\circ} = 9'68 \text{ m}}$$

24.- Calcula o ángulo C e o lado b no triángulo ABC no que: $A = 50^\circ$, $a = 23$ m, $c = 18$ m.



Polo TH. SENO: $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$

$$\frac{23}{\text{sen } 50^\circ} = \frac{18}{\text{sen } \hat{C}} \Rightarrow 23 \cdot \text{sen } \hat{C} = 18 \cdot \text{sen } 50^\circ \Rightarrow \text{sen } \hat{C} = \frac{18 \cdot \text{sen } 50^\circ}{23} \Rightarrow \hat{C} = \arcsen\left(\frac{18 \cdot \text{sen } 50^\circ}{23}\right)$$

COINCIDIDO! Dúas solucións: un agudo α e un obtuso $180 - \alpha$. Collemos o agudo porque é o ángulo correspondente ao lado máis pequeno.

$$\hat{C} = 36^\circ 50' 6'' \quad \hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 93^\circ 9' 54'' \quad \frac{23}{\text{sen } 50^\circ} = \frac{b}{\text{sen } 93^\circ 9' 54''} \Rightarrow \underline{b = 29'98 \text{ m}}$$

25.- Resolve os seguintes triángulos:

a) $A = 35^\circ$, $C = 42^\circ$, $b = 17$ m

$$\hat{B} = 180^\circ - (35^\circ + 42^\circ) = 180^\circ - 77^\circ = 103^\circ$$

Polo TH. SENO: $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$

$$\frac{a}{\text{sen } 35^\circ} = \frac{17}{\text{sen } 103^\circ} \Rightarrow a \cdot \text{sen } 103^\circ = 17 \cdot \text{sen } 35^\circ \Rightarrow \underline{a = \frac{17 \cdot \text{sen } 35^\circ}{\text{sen } 103^\circ} = 10'01 \text{ m}}$$

$$\frac{c}{\text{sen } 42^\circ} = \frac{17}{\text{sen } 103^\circ} \Rightarrow c \cdot \text{sen } 103^\circ = 17 \cdot \text{sen } 42^\circ \Rightarrow \underline{c = \frac{17 \cdot \text{sen } 42^\circ}{\text{sen } 103^\circ} = 11'67 \text{ m}}$$

b) $B = 105^\circ$, $b = 30$ m, $a = 18$ m

Polo TH. SENO: $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$

$$\frac{30}{\text{sen } 105^\circ} = \frac{18}{\text{sen } A} \Rightarrow 30 \cdot \text{sen } A = 18 \cdot \text{sen } 105^\circ \Rightarrow \text{sen } A = \frac{18 \cdot \text{sen } 105^\circ}{30}$$

COINCIDIDO! 2 solucións!

$$\hat{A} = \arcsen\left(\frac{18 \cdot \text{sen } 105^\circ}{30}\right) = \begin{cases} 35^\circ 25' 9'' = \hat{A} \\ 144^\circ 34' 51'' = 180^\circ - \hat{A} \end{cases}$$

Collemos o ángulo agudo
pq. $a < b \Rightarrow A < B$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 39^\circ 34' 51''$$

$$\frac{30}{\text{sen } 105^\circ} = \frac{c}{\text{sen } (39^\circ 34' 51'')} \Rightarrow \underline{c = \frac{30 \cdot \text{sen } (39^\circ 34' 51'')}{\text{sen } 105^\circ} = 19'79 \text{ m}}$$

26.- Calcula a no triângulo ABC, no que: $A = 48^\circ$, $b = 27,2$ m, $c = 15,3$ m.

Pelo TH. COSENO. $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 48^\circ$

$$a = \sqrt{(27,2)^2 + (15,3)^2 - 2 \cdot 27,2 \cdot 15,3 \cdot \cos 48^\circ} = \sqrt{739,84 + 234,09 - 556,93} = \underline{\underline{20,42 \text{ m}}}$$

Como temos os 3 lados, pelo TH. SENOS: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\frac{20,42}{\sin 48^\circ} = \frac{15,3}{\sin C} \Rightarrow 20,42 \cdot \sin C = 15,3 \cdot \sin 48^\circ \Rightarrow \sin C = \frac{15,3 \cdot \sin 48^\circ}{20,42}$

$\Rightarrow \underline{\underline{C = \arcsin\left(\frac{15,3 \cdot \sin 48^\circ}{20,42}\right) = 33^\circ 50' 8''}}$

$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = \underline{\underline{98^\circ 9' 52''}}$

descartamos a outra solução 180-α (obtusos)

27.- Determina os ângulos do triângulo ABC no que $a = 11$ m, $b = 28$ m, $c = 35$ m.

TH. COSENO (despejando os cossenos)

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{28^2 + 35^2 - 11^2}{2 \cdot 28 \cdot 35} = \frac{1888}{1960} \Rightarrow \underline{\underline{\hat{A} = \arccos\left(\frac{1888}{1960}\right) = 15^\circ 34' 41''}}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{11^2 + 35^2 - 28^2}{2 \cdot 11 \cdot 35} = \frac{562}{770} \Rightarrow \underline{\underline{\hat{B} = \arccos\left(\frac{562}{770}\right) = 48^\circ 7' 28''}}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{11^2 + 28^2 - 35^2}{2 \cdot 11 \cdot 28} = \frac{-320}{616} \Rightarrow \underline{\underline{\hat{C} = \arccos\left(-\frac{320}{616}\right) = 121^\circ 17' 51''}}$$

28.- Resolva os seguintes triângulos:

a) $b = 32$ cm $a = 17$ cm $C = 40^\circ$

Pelo TH. COSENO: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 40^\circ$

$$c = \sqrt{17^2 + 32^2 - 2 \cdot 17 \cdot 32 \cdot \cos 40^\circ} = \underline{\underline{21,9 \text{ cm}}}$$

Como temos os 3 lados, pelo TH. COSENO:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{32^2 + 21,9^2 - 17^2}{2 \cdot 32 \cdot 21,9} \Rightarrow \underline{\underline{\hat{A} = \arccos\left(\frac{1214,61}{1401,6}\right) = 29^\circ 56' 8''}}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{17^2 + 21,9^2 - 32^2}{2 \cdot 17 \cdot 21,9} \Rightarrow \underline{\underline{\hat{B} = \arccos\left(\frac{-2553,9}{744,6}\right) = 110^\circ 3' 33''}}$$

b) $a = 23$ cm $b = 14$ cm $c = 34$ cm

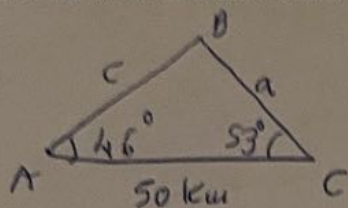
TH. COSENO:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{14^2 + 34^2 - 23^2}{2 \cdot 14 \cdot 34} \Rightarrow \underline{\underline{\hat{A} = \arccos\left(\frac{823}{952}\right) = 30^\circ 10' 29''}}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{23^2 + 34^2 - 14^2}{2 \cdot 23 \cdot 34} \Rightarrow \underline{\underline{\hat{B} = \arccos\left(\frac{1480}{1564}\right) = 17^\circ 48' 5''}}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{23^2 + 14^2 - 34^2}{2 \cdot 23 \cdot 14} \Rightarrow \underline{\underline{\hat{C} = \arccos\left(\frac{-431}{644}\right) = 132^\circ 0' 0''}}$$

29.- Un barco B pide socorro e recíbense os seus sinais en dúas estacións de radio, A e C, que distan entre si 50km. Desde as estacións mídense os seguintes ángulos: $\widehat{BAC}=46^\circ$ e $\widehat{BCA}=53^\circ$. A que distancia de cada estación consideras que se encontra o barco?



Polo TH. SENO: $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 180^\circ - (46^\circ + 53^\circ) = 180^\circ - 99^\circ = 81^\circ$$

$$\frac{50}{\text{sen } 81^\circ} = \frac{a}{\text{sen } 46^\circ} \Rightarrow a \cdot \text{sen } 81^\circ = 50 \cdot \text{sen } 46^\circ \Rightarrow a = \frac{50 \cdot \text{sen } 46^\circ}{\text{sen } 81^\circ} = 36'17 \text{ km}$$

$$\frac{50}{\text{sen } 81^\circ} = \frac{c}{\text{sen } 53^\circ} \Rightarrow c \cdot \text{sen } 81^\circ = 50 \cdot \text{sen } 53^\circ \Rightarrow c = \frac{50 \cdot \text{sen } 53^\circ}{\text{sen } 81^\circ} = 40'15 \text{ km}$$

O barco está a 40'15 km de A e a 36'17 km de B.

30.- Para calcular a altura dun globo, realizamos as medicións indicadas na figura. Canto dista o globo do punto A? Canto do punto B? A que altura está o globo?

$\triangle AGB$ $\hat{AGB} = 180^\circ - (63^\circ + 72^\circ) = 45^\circ$

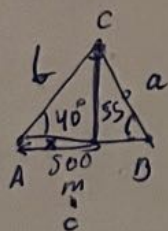
Co TH. SENO $\frac{20}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{x_1}{\text{sen } 72^\circ} \Rightarrow x_1 = 26'90 \text{ m}$

$\frac{20}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{x_2}{\text{sen } 63^\circ} \Rightarrow x_2 = 25'20 \text{ m}$

$x = \text{altura globo}$ Como HGA é triángulo rectángulo: $\text{sen } 75^\circ = \frac{x}{25'20} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 25'20 \cdot \text{sen } 75^\circ = 24'34 \text{ m}$. O globo está a 25'20 m de A, a 26'90 m de B e a altura é de 24'34 m.

31.- Dous amigos situados en dous puntos, A e B, que distan 500 m, ven a torre dunha igrexa, C, baixo os ngulos: $\widehat{BAC}=40^\circ$ e $\widehat{ABC}=55^\circ$. Que distancia hai entre cada un deles e a igrexa?



$\hat{C} = 180 - (40 + 55) = 180 - 95 = 85^\circ$

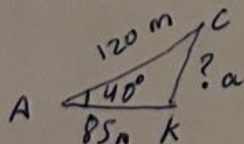
Co TH. SENO: $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$

$\frac{500}{\text{sen } 85^\circ} = \frac{a}{\text{sen } 40^\circ} \Rightarrow a \cdot \text{sen } 85^\circ = 500 \cdot \text{sen } 40^\circ \Rightarrow a = \frac{500 \cdot \text{sen } 40^\circ}{\text{sen } 85^\circ} = 322'62 \text{ m}$

$\frac{500}{\text{sen } 85^\circ} = \frac{b}{\text{sen } 55^\circ} \Rightarrow b \cdot \text{sen } 85^\circ = 500 \cdot \text{sen } 55^\circ \Rightarrow b = \frac{500 \cdot \text{sen } 55^\circ}{\text{sen } 85^\circ} = 411'14 \text{ m}$

A distancia de A á base igrexa é $b \cdot \cos A = 411'14 \cdot \cos 40^\circ = 314'95 \text{ m}$
 " " " " " " " " $a \cdot \cos B = 322'62 \cdot \cos 55^\circ = 185'05 \text{ m}$

32.- Desde a porta da miña casa, A, vexo o cine, C, que está a 120 m, e o quiosco, K, que está a 85 m, baixo un ángulo $\widehat{CAK}=40^\circ$. Que distancia hai entre o cine e o quiosco?



POLO TH. COSENO:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$a^2 = 120^2 + 85^2 - 2 \cdot 120 \cdot 85 \cdot \cos 40^\circ$

$a = 77'44 \text{ m}$

A distancia entre o cine e o quiosco é de 77'44 m.

33.- Resolva os seguintes triângulos:

a) $a = 12 \text{ cm}$; $b = 16 \text{ cm}$; $c = 10 \text{ cm}$ $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} ?$

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{16^2 + 10^2 - 12^2}{2 \cdot 16 \cdot 10} \Rightarrow \hat{A} = \arccos\left(\frac{212}{320}\right) = \underline{48^\circ 30' 33''}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{12^2 + 10^2 - 16^2}{2 \cdot 12 \cdot 10} \Rightarrow \hat{B} = \arccos\left(\frac{-12}{240}\right) = \underline{92^\circ 51' 58''}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{12^2 + 16^2 - 10^2}{2 \cdot 12 \cdot 16} \Rightarrow \hat{C} = \arccos\left(\frac{300}{384}\right) = \underline{38^\circ 37' 29''}$$

b) $b = 22 \text{ cm}$; $a = 7 \text{ cm}$; $C = 40^\circ$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \Rightarrow c^2 = 7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cdot \cos 40^\circ \Rightarrow \underline{c = 17' 24 \text{ cm}}$$

Xa temos os 3 lados!

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{22^2 + 17'24^2 - 7^2}{2 \cdot 22 \cdot 17'24} \Rightarrow \hat{A} = \arccos\left(\frac{732'22}{758'56}\right) = \underline{15^\circ 8' 35''}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{7^2 + 17'24^2 - 22^2}{2 \cdot 7 \cdot 17'24} \Rightarrow \hat{B} = \arccos\left(\frac{-137'78}{241'36}\right) = \underline{124^\circ 48' 34''}$$

c) $b = 5 \text{ m}$; $A = C = 35^\circ$

$$\hat{B} = 180^\circ - (35^\circ + 35^\circ) = \underline{110^\circ}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} ; \quad \frac{5}{\sin 110^\circ} = \frac{a}{\sin 35^\circ} \Rightarrow \underline{a = \frac{5 \cdot \sin 35^\circ}{\sin 110^\circ} = 3'05 \text{ m}}$$

$$\frac{5}{\sin 110^\circ} = \frac{c}{\sin 35^\circ} \Rightarrow \underline{c = \frac{5 \cdot \sin 35^\circ}{\sin 110^\circ} = 3'05 \text{ m}}$$

d) $b = 4 \text{ cm}$; $c = 3 \text{ cm}$; $A = 105^\circ$

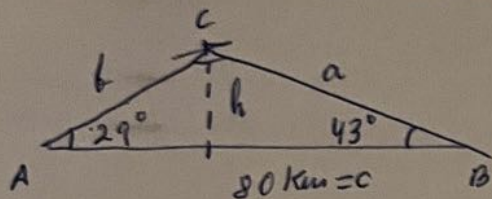
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow a = \sqrt{4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 105^\circ} = \underline{5'59 \text{ cm}}$$

Xa temos os 3 lados!

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5'59^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 5'59 \cdot 3} \Rightarrow \hat{B} = \arccos\left(\frac{24'2481}{33'54}\right) = \underline{43^\circ 47' 2''}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5'59^2 + 4^2 - 3^2}{2 \cdot 5'59 \cdot 4} \Rightarrow \hat{C} = \arccos\left(\frac{38'2481}{44'72}\right) = \underline{31^\circ 12' 34''}$$

34.- Un avión voo entre dúas cidades, A e B, que distan 80 km. As visuais desde o avión a A e a B forman ángulos de 29° e 43° coa horizontal, respectivamente. A que altura está o avión?



$$\hat{C} = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (29 + 43) = 108^\circ$$

TH. SEND $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$

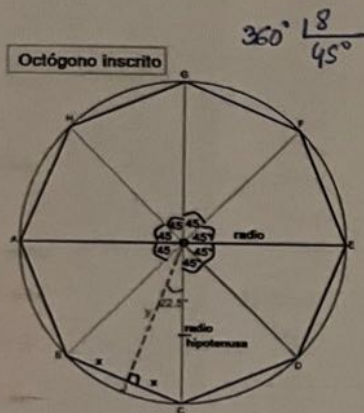
$$\frac{80}{\text{sen } 108^\circ} = \frac{a}{\text{sen } 29^\circ} \Rightarrow a = \frac{80 \cdot \text{sen } 29^\circ}{\text{sen } 108^\circ} = 40'78 \text{ km}$$

$$\frac{80}{\text{sen } 108^\circ} = \frac{b}{\text{sen } 43^\circ} \Rightarrow b = \frac{80 \cdot \text{sen } 43^\circ}{\text{sen } 108^\circ} = 57'37 \text{ km}$$

Como $\text{sen } B = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \text{sen } B = 40'78 \cdot \text{sen } 43^\circ = 27'81 \text{ km}$

O avión está a 27'81 km

35.- Determina o lado do octógono inscrito e do octógono circunscrito nunha circunferencia de raio 5 cm.



INSCRITO $r = 5 \text{ cm} = r_{\text{circunf.}}$

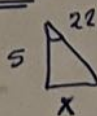


$$\text{sen } 22'5^\circ = \frac{x}{5}$$

$$x = 5 \cdot \text{sen } 22'5^\circ$$

$$x = 1'91 \text{ cm} \Rightarrow \text{lado octógono inscrito} = 2x = 3'83 \text{ cm}$$

CIRCUNSCRITO: $r_{\text{circunf.}} = 5 \text{ cm} = \text{apotecna}$

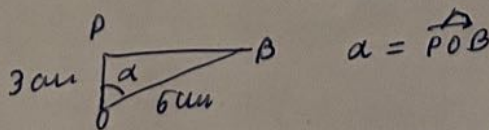
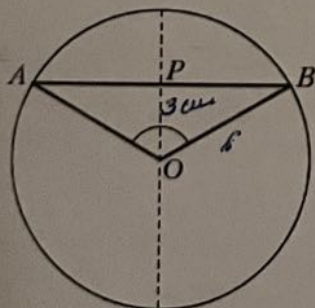


$$\tan 22'5^\circ = \frac{x}{5}$$

$$x = 5 \cdot \tan 22'5^\circ = 2'07 \text{ cm}$$

$$\text{lado octógono circunscrito} = 2x = 4'14 \text{ cm}$$

36.- Nunha circunferencia de raio 6 cm trazamos unha corda AB a 3 cm do centro. Indica o ángulo $\widehat{AOB}$.



$$\cos \alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \widehat{POB} = 60^\circ$$

$$\widehat{AOB} = 2\alpha = 2 \widehat{POB} = 120^\circ$$