

TRIGONOMETRÍA. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.

MEDIDAS DUN ÁNGULO. RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DUN ÁNGULO AGUDO.-

Un ángulo é a rexión do plano comprendida entre dúas semirrectas cunha orixe común. Ás semirrectas chámanse lados e a orixe común, vértice.



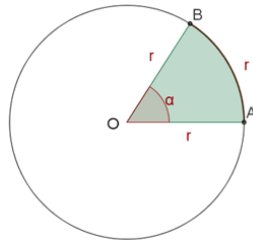
MEDIDAS DUN ÁNGULO.-

Para **medir ángulos** utilízanse as seguintes unidades:

Grao sexagesimal (°): Se se divide a circunferencia en 360 partes iguais, o ángulo central correspondente a cada unha das súas partes é un ángulo dun grao (1°) sexagesimal.

Un **grao** ten **60 minutos (')** e un **minuto** ten **60 segundos (")**.

Radián (rad): É a medida dun **ángulo** tal que o seu **arco mide un raio**.



$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

1 radián mide algo menos de 60°. $1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 45''$

1.- Responde:

- Cantos radiáns corresponden aos 360° dunha circunferencia?
- Cantos graos mide 1 radián?
- Cantos graos mide un ángulo que ten $\frac{\pi}{2}$ radiáns?
- Cantos radiáns equivalen a 270°?

2.- Expresa en graos sexagesimais os seguintes ángulos dados en radiáns:

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| a) $\frac{\pi}{6}$ | b) $\frac{2\pi}{3}$ | c) $\frac{4\pi}{3}$ |
| d) $\frac{5\pi}{4}$ | e) $\frac{7\pi}{6}$ | f) $\frac{9\pi}{2}$ |

3.- Pasa a radiáns os seguintes ángulos dados en graos. Exprésaos en función de π e en forma decimal.

- | | | |
|---------|---------|---------|
| a) 40° | b) 108° | c) 135° |
| d) 240° | e) 270° | f) 126° |

NOTA.-

Dous triángulos ABC e A'B'C' son semellantes se:

Primeiro criterio: $\hat{A}=\hat{A}'$ y $\hat{B}=\hat{B}'$ (dous ángulos iguais)

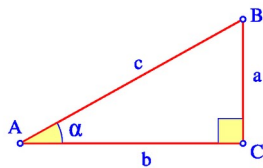
Segundo criterio: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ (lados proporcionais)

Terceiro criterio: $\hat{A}=\hat{A}'$ y $\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ (lados proporcionais e ángulo comprendido igual)

RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DUN ÁNGULO AGUDO.-

As razóns trigonométricas dun ángulo agudo defínense a partir dun triángulo rectángulo construído sobre el.

As razóns trigonométricas son independentes do triángulo rectángulo escollido (todos os triángulos rectángulos construídos sobre o ángulo son semellantes e por tanto os lados son proporcionais).



$$\text{seno de } \alpha = \frac{\text{lonxitude do cateto oposto a } \alpha}{\text{lonxitude da hipotenusa}}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\text{coseno de } \alpha = \frac{\text{lonxitude do cateto contiguo a } \alpha}{\text{lonxitude da hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{tangente de } \alpha = \frac{\text{lonxitude do cateto opuesto a } \alpha}{\text{lonxitude do cateto contiguo a } \alpha}$$

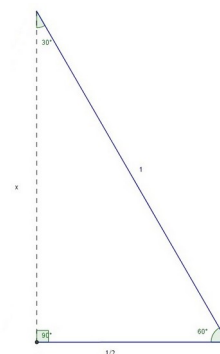
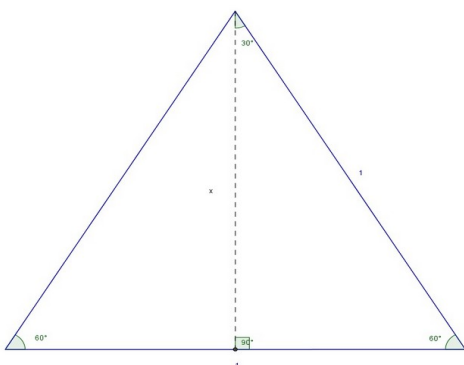
$$\text{tan } \alpha = \frac{a}{b}$$

RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DE 30° E 60°.-

Consideramos un triángulo equilátero de lado 1. Trazamos a altura, dividímolos en dous triángulos e quedamos cun deles.

O triángulo considerado é rectángulo de ángulos : 60°, 30° e 90° e lados : 1 (hipotenusa) e $\frac{1}{2}$. O outro podémolo calcular utilizando o teorema de Pitágoras:

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = +\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



	30°	60°
$\operatorname{sen} \alpha$	$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{x}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\cos 30^\circ = \frac{x}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

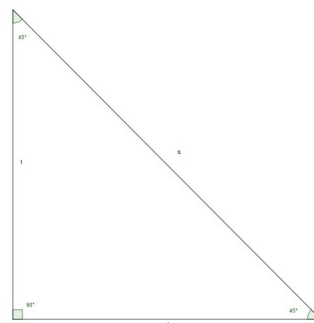
RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DE 45°.-

Consideramos un triángulo isósceles rectángulo no que os lados iguais miden 1.

O triángulo considerado é rectángulo de ángulos : 45°, 45° e 90° e lados :1 (catetos) . O outro o podemos calcular utilizando o teorema de Pitágoras:

$$1^2 + 1^2 = x^2 \Rightarrow 2 = x^2 \Rightarrow x = +\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

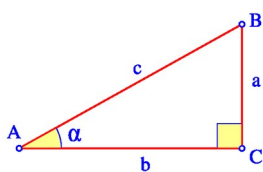
	45°
$\operatorname{sen} \alpha$	$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos \alpha$	$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan \alpha$	$\tan 45^\circ = 1$



RELACIÓNS FUNDAMENTAIS.-

1.- $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (Fórmula fundamental da trigonometría)

Dem.-

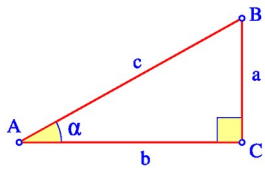


$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} \stackrel{\text{TEOREMA PITÁGORAS}}{=} \frac{c^2}{c^2} = 1 \text{ c.q.d.}$$

2.- $\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$

Dem.-



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} = \tan \alpha \quad \text{c.q.d.}$$

$$3.- \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{y} \quad 4.- \quad 1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

Dem.-

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \xRightarrow{\text{DIVIDINDO A IGUALDADE ENTRE } \cos^2 \alpha} \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \xRightarrow{\text{DIVIDINDO A IGUALDADE ENTRE } \operatorname{sen}^2 \alpha} \quad 1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

4.- Calcula as demais razóns trigonométricas do ángulo α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) utilizando as relacións fundamentais:

a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{8}$

e) $\cos \alpha = 0,72$

f) $\tan \alpha = 3$

CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA. RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CALQUERA. -

Trazamos unha circunferencia de raio 1.

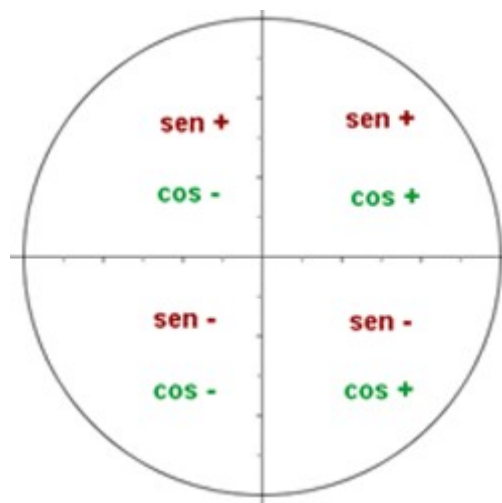
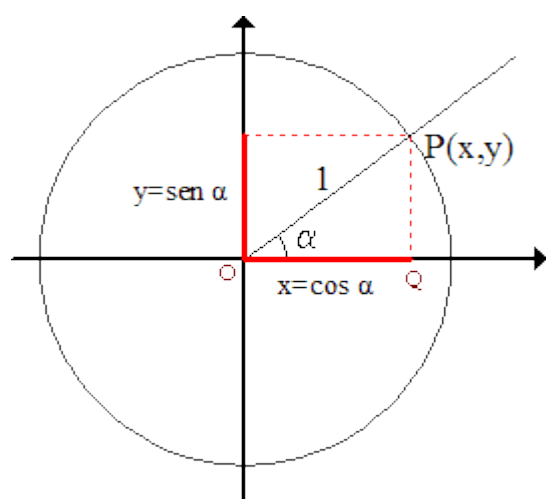
Tomamoso sistema de coordenadas coa orixe no centro da circunferencia.

Os ángulos sitúanse sobre a circunferencia do seguinte modo:

-O vértice no centro.

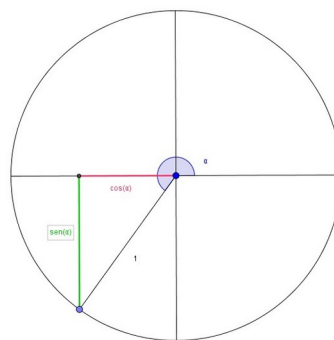
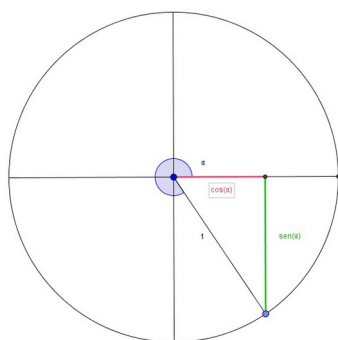
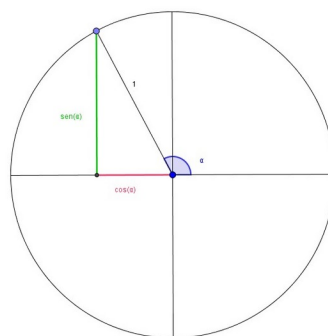
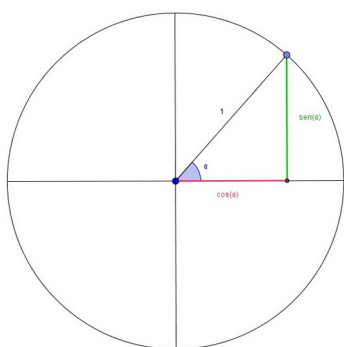
-Un dos lados coincidindo co semieixo positivo das x.

-O outro lado, onde corresponda, abríndose o ángulo no sentido contrario ao movemento das agullas do reloxo.



Defínese o $\text{sen } \alpha$ como a **ordenada** do punto no que o segundo lado do ángulo α corta á circunferencia goniométrica.

Defínese o $\text{cos } \alpha$ como a **abscisa** do punto no que o segundo lado do ángulo α corta á circunferencia goniométrica.



RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS .-

	$0^\circ=360^\circ$ 2π	$30^\circ \frac{\pi}{6}$	$45^\circ \frac{\pi}{4}$	$60^\circ \frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	$180^\circ \pi$	270° $\frac{3\pi}{2}$
$\operatorname{sen} \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non existe	0	Non existe

5.- Indica las restantes razones trigonométricas de α (sin usar la calculadora para calcular α). Luego compruébalas utilizando la calculadora.

a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{-4}{5}$ $\alpha < 270^\circ$ b) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ $\tan \alpha < 0$ c) $\tan \alpha = -3$ $\alpha < 180^\circ$

NOTA.-

Dous triángulos ABC e A'B'C' son IGUAIS se:

Primeiro criterio: Teñen os seus tres lados iguais.

Segundo criterio: Teñen dous lados e o ángulo comprendido entre eles iguais.

Terceiro criterio: Teñen iguais un lado e os seus ángulos adxacentes.

Cuarto criterio: Teñen iguais dous lados e o ángulo oposto ao maior iguais.

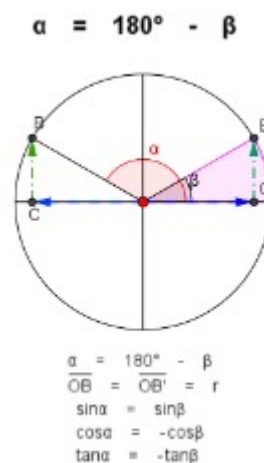
REDUCCIÓN AO PRIMEIRO CUADRANTE.-

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS (SUMAN 180°)

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180 - \beta) = \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos \alpha = \cos(180 - \beta) = -\cos \beta$$

$$\tan \alpha = \tan(180 - \beta) = -\tan \beta$$

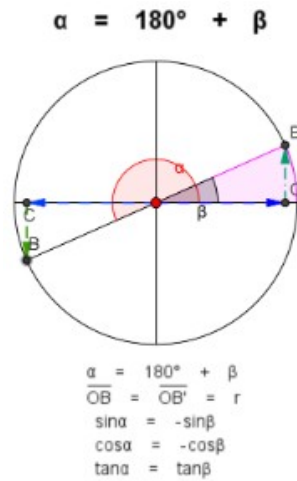


ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN 180°

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180 + \beta) = -\operatorname{sen} \beta$$

$$\cos \alpha = \cos(180 + \beta) = -\cos \beta$$

$$\tan \alpha = \tan(180 + \beta) = \tan \beta$$

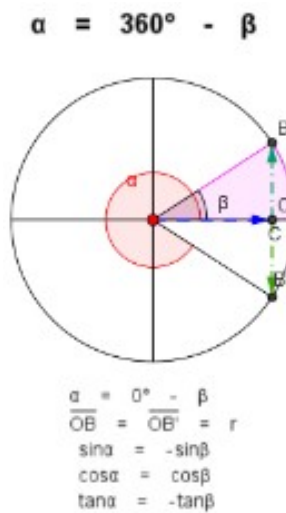


ÁNGULOS OPUESTOS (SUMAN 360°)

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(360 - \beta) = -\operatorname{sen} \beta$$

$$\cos \alpha = \cos(360 - \beta) = \cos \beta$$

$$\tan \alpha = \tan(360 - \beta) = -\tan \beta$$

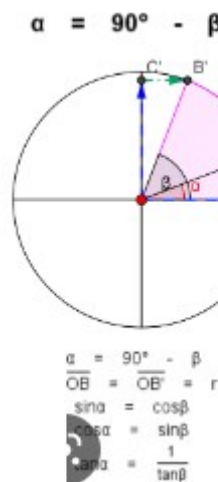


ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS (SUMAN 90°)

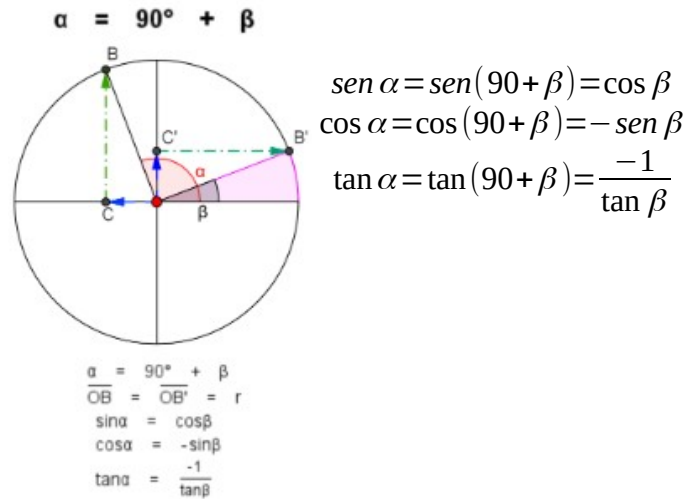
$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(90 - \beta) = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \cos(90 - \beta) = \operatorname{sen} \beta$$

$$\tan \alpha = \tan(90 - \beta) = \frac{1}{\tan \beta}$$



ÁNGULOS DIFIEREN EN 90°

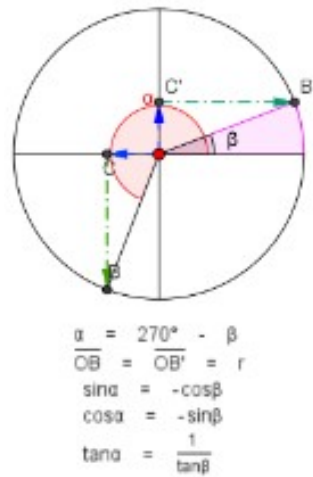


ÁNGULOS QUE SUMAN 270°

$$\sin \alpha = \sin(270 - \beta) = -\cos \beta$$

$$\cos \alpha = \cos(270 - \beta) = -\sin \beta$$

$$\tan \alpha = \tan(270 - \beta) = \frac{1}{\tan \beta}$$

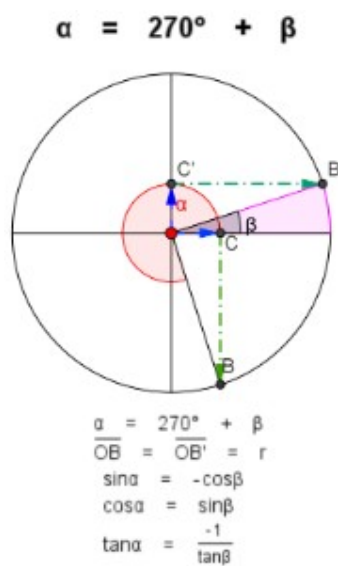


ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN 270°

$$\sin \alpha = \sin(270 + \beta) = -\cos \beta$$

$$\cos \alpha = \cos(270 + \beta) = \sin \beta$$

$$\tan \alpha = \tan(270 + \beta) = \frac{-1}{\tan \beta}$$



RESUMINDO.-

Ángulos opostos:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

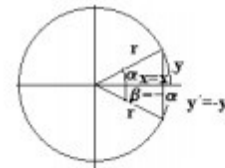
$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\sin(360-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(360-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(360-\alpha) = -\tan \alpha$$

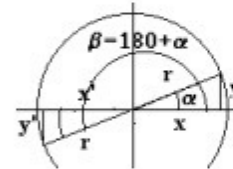
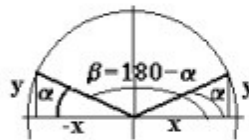


Ángulos suplementarios e ángulos que difieren en 180°:

$$\sin(180 \mp \alpha) = \pm \sin \alpha$$

$$\cos(180 \mp \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180 \mp \alpha) = \mp \tan \alpha$$

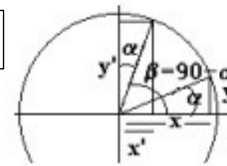


Ángulos complementarios e ángulos que difieren en 90°:

$$\sin(90 \mp \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90 \mp \alpha) = \pm \sin \alpha$$

$$\tan(90 \mp \alpha) = \frac{\pm 1}{\tan \alpha}$$



6.- Relaciona as razóns trigonométricas dos seguintes ángulos coas dun ángulo do primeiro cuadrante:

a) 150°

b) 135°

c) 210°

d) 225°

e) 315°

f) 120°

g) 340°

h) 200°

i) 290°

7.- Se $\sin \alpha = 0,35$, determina:

a) $\sin(180^\circ - \alpha)$

b) $\sin(\alpha + 90^\circ)$

c) $\sin(180^\circ + \alpha)$

d) $\sin(360^\circ - \alpha)$

e) $\sin(90^\circ - \alpha)$

f) $\sin(360^\circ + \alpha)$

8.- Calcula as razóns trigonométricas de 55°, 125°, 145°, 215°, 235°, 305° e 325° a partir das razóns trigonométricas de 35°: $\sin 35^\circ = 0,57$; $\cos 35^\circ = 0,82$; $\tan 35^\circ = 0,70$.

9.- Se $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ e $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, determina:

a) $\sin(\alpha)$

b) $\cos(\alpha)$

c)

$\tan(90^\circ - \alpha)$

d) $\sin(180^\circ - \alpha)$

e) $\cos(180^\circ + \alpha)$

f) $\tan(360^\circ - \alpha)$

10.- Calcula o resultado das seguintes operacións sen utilizar a calculadora:

a) $5 \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 + 2 \cos \pi - \cos \frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi$

b) $5 \tan \pi + 3 \cos \frac{\pi}{2} + 2 \tan 0 + \sin \frac{3\pi}{2} - 2 \sin 2\pi$

c) $\frac{2}{3} \sin \frac{\pi}{2} - 4 \sin \frac{3\pi}{2} + 3 \sin \pi - \frac{5}{3} \sin \frac{\pi}{2}$

11.- Proba que:

a) $4 \sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \pi = 2$

$$b) 2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 3$$

12.- Calcula o resultado das seguintes operacións sen utilizar a calculadora:

$$a) \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \pi$$

$$b) \cos \pi - \cos 0 + \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2}$$

$$c) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{7\pi}{6} + \tan \frac{4\pi}{3} + \tan \frac{11\pi}{6}$$

13.- Calcula o resultado das seguintes operacións sen utilizar a calculadora:

$$a) \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}$$

$$b) \cos \frac{5\pi}{3} + \tan \frac{4\pi}{3} - \tan \frac{7\pi}{6}$$

$$c) \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$$

$$d) -2 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} + 2\sqrt{6} \cos \frac{5\pi}{6} - 2 \cos \frac{5\pi}{3} + \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} - \cos \pi$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.-

Resolver un triángulo é calcular os datos descoñecidos (lados e ángulos) a partir dos que coñecemos.

Nun triángulo rectángulo se coñecemos dous datos (ademais do ángulo de 90°), un deles un lado, podemos calcular todos os demais (utilizando as **razóns trigonométricas apropiadas**, o **teorema de Pitágoras** e sabendo que a **suma dos ángulos dun triángulo é 180°**).

14.- Resolve os seguintes triángulos rectángulos ($C = 90^\circ$) calculando a medida de todos os elementos descoñecidos:

$$a) a = 5 \text{ cm}, b = 12 \text{ cm. Halla } c, A, B.$$

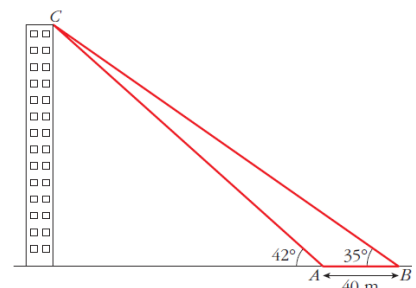
$$b) a = 43 \text{ m}, A = 37^\circ. \text{ Halla } b, c, B.$$

$$c) a = 7 \text{ m}, B = 58^\circ. \text{ Halla } b, c, A.$$

$$d) c = 5,8 \text{ km}, A = 71^\circ. \text{ Halla } a, b, B.$$

15.- Para determinar a altura dun poste afastámonos 7 m da súa base e despois medimos o ángulo que forma a visual ao punto máis alto coa horizontal, co que obtemos un valor de 40° . Canto mide o poste?

16.- Estamos en A, medimos o ángulo baixo o que se ve o edificio (42°), despois afastámonos 40 m e volvemos medir o ángulo (35°). Cal coidas que é a altura do edificio e a que distancia nos atopamos del? Observa a ilustración:



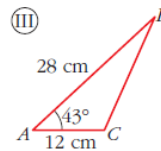
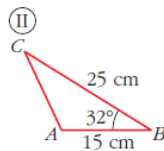
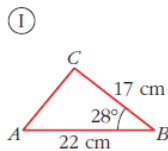
17.- Se queremos que unha cinta transportadora de 25 metros eleve a carga ata unha altura de 15 metros, que ángulo se deberá inclinar a cinta?

18.- Unha escada de 2 m está apoiada nunha parede formando un ángulo de 50° co chan. Calcula a altura á que chega e a distancia que separa a súa base da parede.

19.- O lado dun rombo mide 8 cm e o ángulo menor deste é de 38° . Canto miden as diagonais do rombo?

20.-

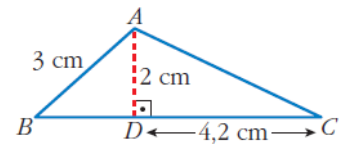
a) Calcula a altura correspondente ao lado AB en cada un dos seguintes triángulos:



b) Calcula a área de cada triángulo.

21.- Nun triángulo ABC coñecemos $a = 20$ cm, $c = 33$ cm e $B = 53^\circ$. Calcula a lonxitude do lado b .

22.- No triángulo ABC, AD é a altura relativa ao lado BC. Cos datos da figura, indica os ángulos do triángulo ABC.

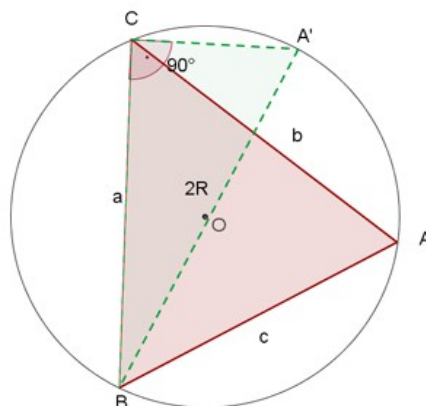


RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CALQUERA.-

TEOREMA DO SENO

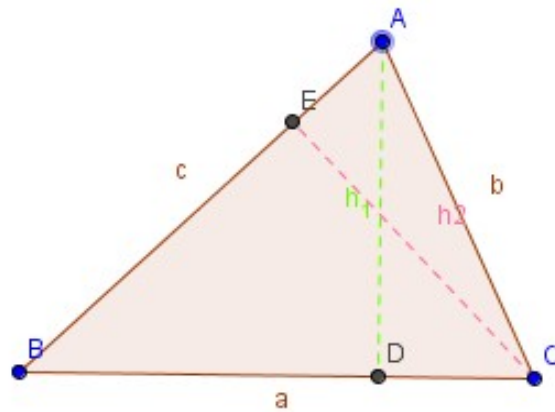
Nun triángulo calquera de lados a, b, c e de ángulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, cúmprense as seguintes igualdades:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad R \text{ raio da circunferencia circunscrita}$$



OBSERVACIÓN: Isto explica que en todo triángulo o ángulo maior ten en fronte ao lado maior e o ángulo menor ten en fronte ao lado menor.

DEMOSTRACIÓN:



Se trazamos la altura h_1 desde el vértice A. Los triángulos ADC y ADB son rectángulos.

Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} B &= \frac{h_1}{c} \Rightarrow h_1 = c \cdot \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} C &= \frac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b \cdot \operatorname{sen} C \end{aligned} \right\} \Rightarrow c \cdot \operatorname{sen} B = b \cdot \operatorname{sen} C \Rightarrow \frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

Se trazamos la altura h_2 desde el vértice A, obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} B &= \frac{h_2}{a} \Rightarrow h_2 = a \cdot \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} A &= \frac{h_2}{b} \Rightarrow h_2 = b \cdot \operatorname{sen} A \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \cdot \operatorname{sen} B = b \cdot \operatorname{sen} A \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

Por tanto,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Como $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{a}{\operatorname{sen} A'} = \frac{a}{\operatorname{sen} 90^\circ} = 2R$ $A = A'$ pq son ángulos que abarcan el mismo arco

Entón: $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$ R radio da circunferencia circunscrita

APLICACIONES:

- Cando coñecemos dous ángulos e un lado.
- Cando coñecemos dous lados e o ángulo oposto a un deles.

23.- Calcula a e b no triángulo ABC no que: $A = 55^\circ$, $B = 40^\circ$, $c = 15$ m.

24.- Calcula o ángulo C e o lado b no triángulo ABC no que: $A = 50^\circ$, $a = 23$ m, $c = 18$ m.

25.- Resolve os seguintes triángulos:

- a) $A = 35^\circ$ $C = 42^\circ$ $b = 17$ m
- b) $B = 105^\circ$ $b = 30$ m $a = 18$ m

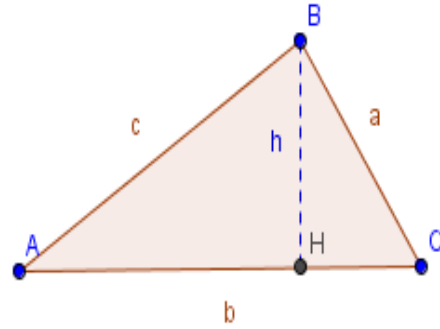
TEOREMA DO COSENO

Nun triángulo calquera de lados a, b, c , cúmprese que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

**DEMOSTRACIÓN:**

Trazamos a altura h , sobre o lado b .

$$\cos A = \frac{AH}{c} \quad (1) \quad AH = c \cdot \cos A$$

$$(2) \quad HC = b - AH = b - c \cdot \cos A$$

Aplicando Pitágoras nos triángulos AHB e BHC, e tendo en conta (1) e (2), resulta:

$$a^2 = h^2 + HC^2 = h^2 + (b - c \cdot \cos A)^2 = h^2 + b^2 + c^2 \cdot \cos^2 A - 2bc \cos A$$

$$c^2 = h^2 + AH^2 = h^2 + (c \cdot \cos A)^2 = h^2 + c^2 \cdot \cos^2 A$$

$$\text{Restando as dúas igualdades: } a^2 - c^2 = b^2 - 2bc \cos A \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

De xeito análogo chégase as outras dúas relacións.

APLICACIÓNS:

- Cando coñecemos os tres lados.
- Cando coñecemos dous lados e o ángulo comprendido entre eles.

26.- Calcula a no triángulo ABC, no que: $A = 48^\circ$, $b = 27,2$ m, $c = 15,3$ m.

27.- Determina os ángulos do triángulo ABC no que $a = 11$ m, $b = 28$ m, $c = 35$ m.

28.- Resolve os seguintes triángulos:

- $b = 32$ cm $a = 17$ cm $C = 40^\circ$
- $a = 23$ cm $b = 14$ cm $c = 34$ cm

RESUMINDO:**UN TRIÁNGULO SEMPRE SE PODE RESOLVER SE COÑECAMOS TRES DATOS, UN DELES UN LADO:**

CASO1.-Se coñecemos os tres lados a, b, c .

A solución sempre existe se a suma de dous dos lados é maior ca o terceiro.

Co teorema do coseno:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \text{ou} \quad C = 180 - (A + B)$$

CASO2.-Se coñecemos dous ángulos e un lado. Por exemplo: A, B e a .

A solución sempre existe se a suma dos dous ángulos é menor ca 180° . $C=180-(A+B)$

Co teorema do seno: $b=\frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$ e $c=\frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$

CASO3.- Se coñecemos dous lados e o ángulo comprendido entre eles. Por exemplo: a,b e C.

A solución sempre existe.

Co teorema do coseno, calculamos c: $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$

Como un lado menor ten en fronte un ángulo menor co teorema dos senos calculamos ese ángulo ,descartando así a posibilidade do ángulo obtuso, pois entre 0° e 180° hai dous ángulos que teñen o mesmo seno, un agudo e outro obtuso.

O outro ángulo será 180° menos a suma do que xa sabíamos e o que calculamos no paso anterior.

Tamén ,unha vez teñamos os tres lados, estamos no caso 1 e co teorema do coseno calculamos os ángulos.

CASO4.- Se coñecemos dous lados e o ángulo oposto a un deles. Po exemplo; a,b e A.

Este caso pode ter unha, dúas ou ningunha solución.

Co teorema dos senos, calculamos $\operatorname{sen} B$, $\operatorname{sen} B=\frac{b \operatorname{sen} A}{a}$

Se $\operatorname{sen} B > 1$

NON HAI SOLUCIÓN!!!!!!

Se $\operatorname{sen} B = 1 \Rightarrow B = 90^\circ$ Se $A+B < 180^\circ$

UNHA SOLUCIÓN!!!!!!

Se $\operatorname{sen} B < 1 \Rightarrow B_1$ e $B_2 = \pi - B_1$ Se $A+B_1 < 180^\circ$ e $A+B_2 < 180^\circ$ DÚAS SOLUCIÓN!!!!!!

Tamén: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \xrightarrow{a,b,A \text{ coñecidos}} c^2 - (2b \cos A)c + (b^2 - a^2) = 0$ Ecuación de 2ª grao.
Resolvemos e calculamos c, pode haber unha , dúas ou ningunha solución.

Ex.- a=2m , b=10m y A=60°

Polo teorema do seno,

$\frac{2}{\operatorname{sen} 60} = \frac{10}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow \operatorname{sen} B = \frac{10 \operatorname{sen} 60}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} B = 4,33$ O seno dun ángulo non pode tomar valores maiores ca 1!!! Non hai ningún triángulo con a=2m , b=10m e A=60°.

Ex.- a=3m , b=4m y A=35°

Polo teorema do seno,

$\frac{3}{\operatorname{sen} 35} = \frac{4}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow \operatorname{sen} B = \frac{4 \operatorname{sen} 35}{3} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 49^\circ 53' 11'' \Rightarrow C_1 = 95^\circ 6' 49'' \Rightarrow c_1 = 5,21 m \\ B_2 = 130^\circ 6' 49'' \Rightarrow C_2 = 14^\circ 53' 11'' \Rightarrow c_2 = 1,34 m \end{cases}$

Hai dous triángulos que teñen a=3m , b=4m e A=35°.

$\frac{3}{\operatorname{sen} 35} = \frac{4}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow \operatorname{sen} B = \frac{4 \operatorname{sen} 35}{3} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 49^\circ 53' 11'' \Rightarrow C_1 = 95^\circ 6' 49'' \Rightarrow c_1 = 5,21 m \\ B_2 = 130^\circ 6' 49'' \Rightarrow C_2 = 14^\circ 53' 11'' \Rightarrow c_2 = 1,34 m \end{cases}$

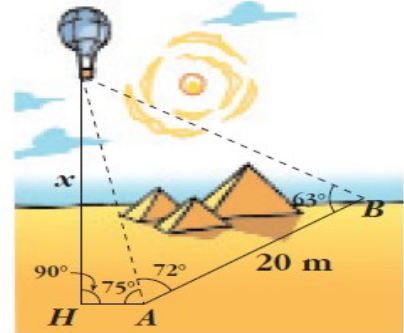
Hai dous triángulos que teñen a=3m , b=4m e A=35°.

Tamén se podería facer co teorema do coseno,

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow 3^2 = 4^2 + c^2 - 2 \cdot 4 \cdot c \cdot \cos 35 \Rightarrow c^2 - 6,55c + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 5,21 \Rightarrow C_1 = 95^\circ 6' 49'' \Rightarrow B_1 = 49^\circ 53' 11'' \\ c_2 = 1,34 \Rightarrow C_2 = 14^\circ 53' 11'' \Rightarrow B_2 = 130^\circ 6' 49'' \end{cases}$

29.- Un barco B pide socorro e recíbense os seus sinais en dúas estacións de radio, A e C , que distan entre si 50 km. Desde as estacións mídense os seguintes ángulos: $\widehat{BAC}=46^\circ$ e $\widehat{BCA}=53^\circ$. A que distancia de cada estación consideras que se encontra o barco?

30.- Para calcular a altura dun globo, realizamos as medicións indicadas na figura. Canto dista o globo do punto A ? Canto do punto B ? A que altura está o globo?



31.- Dous amigos situados en dous puntos, A e B , que distan 500 m, ven a torre dunha igrexa, C , baixo os ángulos: $\widehat{BAC}=40^\circ$ e $\widehat{ABC}=55^\circ$. Que distancia hai entre cada un deles e a igrexa?

32.- Desde a porta da miña casa, A , vexo o cine, C , que está a 120 m, e o quiosco, K , que está a 85 m, baixo un ángulo $\widehat{CAK}=40^\circ$. Que distancia hai entre o cine e o quiosco?

33.- Resolve os seguintes triángulos:

a) $a = 12$ cm; $b = 16$ cm; $c = 10$ cm

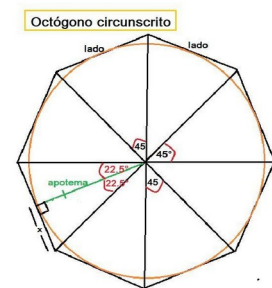
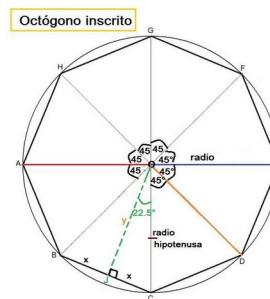
b) $b = 22$ cm; $a = 7$ cm; $C = 40^\circ$

c) $b = 5$ m; $A = C = 35^\circ$

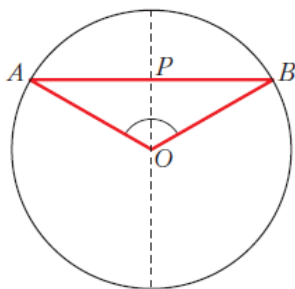
d) $b = 4$ cm; $c = 3$ cm; $A = 105^\circ$

34.- Un avión voa entre dúas cidades, A e B , que distan 80 km. As visuais desde o avión a A e a B forman ángulos de 29° e 43° coa horizontal, respectivamente. A que altura está o avión?

35.- Determina o lado do octógono inscrito e do octógono circunscrito nunha circunferencia de raio 5 cm.



36.- Nunha circunferencia de raio 6 cm trazamos unha corda AB a 3 cm do centro. Indica o ángulo $\widehat{AOB}$.



37.- Para localizar unha emisora clandestina, dous receptores, A e B , que distan entre eles 10 km, orientan as súas antenas cara ao punto onde está a emisora. Estas direccións forman con AB ángulos de 40° e 65° . A que distancia de A e B se encontra a emisora?

38.- Nun adestramento de fútbol colócase o balón nun punto situado a 5 m e 8 m de cada un dos postes da portería, cuxo ancho é de 7 m. Baixo que ángulo calculas que se ve a portería desde ese punto?

39.- Dous barcos parten dun porto con rumbos distintos que forman un ángulo de 127° . O primeiro sae ás 10 h da mañá cunha velocidade de 17 nós, e o segundo sae ás 11 h 30 min, cunha velocidade de 26 nós. Se o alcance dos seus equipos de radio é de 150 km, poderán poñerse en contacto ás 3 da tarde?

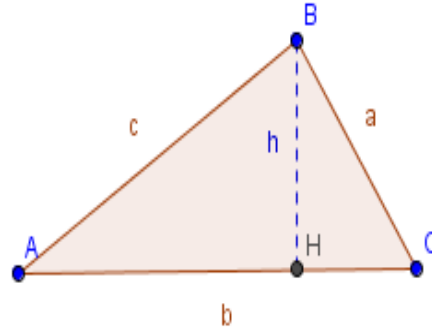
TEOREMA DA TANXENTE

Nun triángulo calquera de lados a, b, c e ángulos A, B, C cúmprese que:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}$$



Este teorema, aínda que menos coñecido que o do seno e o do coseno, relaciona as lonxitudes do triángulo e as tanxentes dos seus ángulos. Pódese utilizar cando coñecemos dous lados e un ángulo ou cando coñecemos dous ángulos e un lado.

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

$$(1) \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = AC \cdot \operatorname{sen} \alpha \quad (2) \quad \cos \alpha = \frac{DE}{CD} \Rightarrow DE = CD \cdot \cos \alpha$$

$$(3) \quad \operatorname{sen} \beta = \frac{CD}{AD} \Rightarrow CD = AD \cdot \operatorname{sen} \beta \quad (4) \quad \cos \beta = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC = AD \cdot \cos \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{FD}{AD} = \frac{DE + EF}{AD} = \frac{DE}{AD} + \frac{EF}{AD}$$

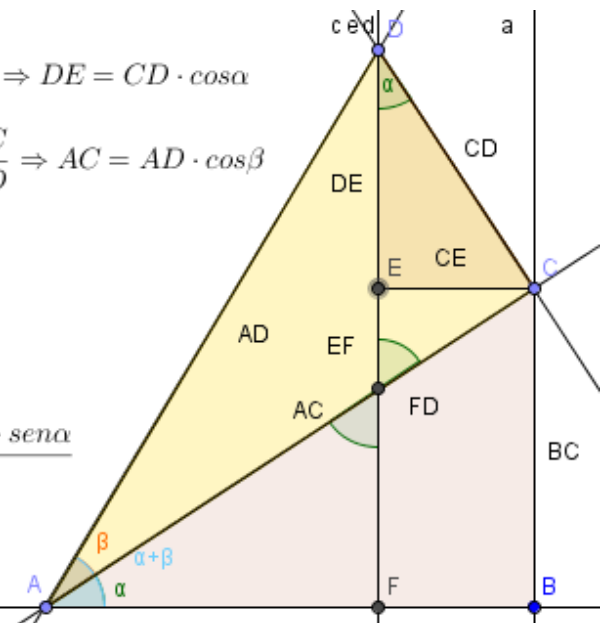
Por (1) e (2)

Por (3) e (4)

$$= \frac{CD \cos \alpha}{AD} + \frac{AC \operatorname{sen} \alpha}{AD} = \frac{AD \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha}{AD} + \frac{AD \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{sen} \alpha}{AD}$$

Simplificando

$$= \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$



Entón, $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$

40.- Calcula o coseno e a tanxente da suma.

Solución.-

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &\stackrel{\text{ángulos complementarios}}{=} \sin(90 - (\alpha + \beta)) = \sin((90 - \alpha) + (-\beta)) = \\ &= \sin(90 - \alpha) \cos(-\beta) + \cos(90 - \alpha) \sin(-\beta) \stackrel{\text{ángulos complementarios}}{=} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \stackrel{\text{dividiendo por } \cos \alpha \cos \beta}{=} \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DA SUMA DE DOUS ÁNGULOS.-

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos(\beta) + \cos \alpha \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos(\beta) - \sin \alpha \cdot \sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

41.- Determina as razóns trigonométricas do ángulo de 75° se sabes que $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$

42.- Calcula o seno, coseno e a tanxente da diferenza.

Solución.-

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) \stackrel{\text{seno de la suma}}{=} \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \sin \alpha \cos(\beta) + \cos \alpha \cdot (-\sin(\beta)) = \\ &= \sin \alpha \cos(\beta) - \cos \alpha \sin(\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) \stackrel{\text{coseno de la suma}}{=} \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos(\beta) - \sin \alpha \cdot (-\sin(\beta)) = \\ &= \cos \alpha \cos(\beta) + \sin \alpha \sin(\beta)\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} \stackrel{\text{dividiendo por } \cos \alpha \cos \beta}{=} \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DA DIFERENZA DE DOUS ÁNGULOS.-

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos(\beta) - \cos \alpha \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos(\beta) + \sin \alpha \cdot \sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

43.- Calcula as razóns trigonométricas do ángulo dobre.

Solución.-

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) \stackrel{\text{seno de la suma}}{=} \sin \alpha \cos(\alpha) + \cos \alpha \sin(\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos(\alpha + (-\beta)) \stackrel{\text{cos de la suma}}{=} \cos \alpha \cos(\alpha) - \sin \alpha \sin(\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \tan(\alpha + \alpha) \stackrel{\text{tanxente da suma}}{=} \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DOU ÁNGULO DOBRE.-

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

44.- Demuestra a seguinte igualdade: $\frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\sin(a+b) + \sin(a-b)} = \frac{1}{\tan a}$

45.- Demuestra que: $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$

46.- Demuestra que:

a) $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$

b) $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$

47- Simplifica a expresión $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$ e calcula o seu valor para $\alpha = \frac{\pi}{4}$

48.- Calcula as razóns trigonométricas do ángulo metade.

Solución.-

$$E_1 \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$E_2 \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos(2\alpha)$$

$$\text{Restando } E_1 - E_2: \quad 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos(2\alpha)$$

$$\text{Despexando: } \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}} \quad \text{Ou o que é o mesmo,}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} \quad \text{Escollemos o signo + ou o - dependendo do cadrante onde se atopa o ángulo } \frac{\alpha}{2}$$

$$E_1 \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$E_2 \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos(2\alpha)$$

$$\text{Sumando } E_1 + E_2: \quad 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos(2\alpha)$$

Despexando: $\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}}$ Ou o que é o mesmo,

$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$ Escollemos o signo + ou o - dependendo do cadrante onde se atopa o ángulo $\frac{\alpha}{2}$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$$

RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DO ÁNGULO METADE

$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$ Escollemos o signo + ou o - dependendo do cadrante onde se atopa o ángulo $\frac{\alpha}{2}$

$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$ Escollemos o signo + ou o - dependendo do cadrante onde se atopa o ángulo $\frac{\alpha}{2}$

$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$ Escollemos o signo + ou o - dependendo do cadrante onde se atopa o ángulo $\frac{\alpha}{2}$

49.- Indica as razóns trigonométricas do ángulo de 15° de dous xeitos, considerando:

a) $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$

b) $15^\circ = 30^\circ/2$

50.- Demostra que: $2 \tan \alpha \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin \alpha = \tan \alpha$

51.- Demostra que: $\frac{2 \sin \alpha - \sin(2\alpha)}{2 \sin \alpha + \sin(2\alpha)} = \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

52.- Sabemos que $\cos x = \frac{-3}{4}$ e $\sin x < 0$. Sen determinar o valor de x , calcula:

a) $\sin x$

b) $\cos(\pi + x)$

c) $\cos(2x)$

d) $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

e) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

f) $\cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$

FÓRMULAS QUE TRANSFORMAN SUMAS E DIFERENZAS DE SENOS E COSENOS EN PRODUCTOS.-

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

53.- Demuestra as igualdades anteriores.

Solución:

$$\text{Se } A = \alpha + \beta \text{ e } B = \alpha - \beta$$

$$\text{Entón, } \alpha = \frac{A+B}{2} \text{ e } \beta = \frac{A-B}{2}$$

$$\text{Como, } E_1 \quad \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen } \beta$$

$$E_2 \quad \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{sen } \beta$$

$$\text{Sumando } E_1 + E_2 \quad \text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = 2 \text{sen } \alpha \cos \beta$$

$$\text{Facendo o cambio : } \text{sen } A + \text{sen } B = 2 \text{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\text{Restando } E_1 - E_2 \quad \text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \text{sen } \beta$$

$$\text{Facendo o cambio : } \text{sen } A - \text{sen } B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \text{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\text{Como, } E_3 \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta$$

$$E_4 \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \text{sen } \alpha \text{sen } \beta$$

$$\text{Sumando } E_3 + E_4 \quad \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\text{Facendo o cambio : } \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\text{Restando } E_3 - E_4 \quad \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \text{sen } \alpha \text{sen } \beta$$

$$\text{Facendo o cambio : } \cos A - \cos B = -2 \text{sen} \frac{A+B}{2} \text{sen} \frac{A-B}{2}$$

Exemplo: Transforma en produto $\cos 3x + \cos x$

$$\text{Solución: } \cos 3x + \cos x = 2 \cos \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} = 2 \cos(2x) \cos x$$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.-

As ecuacións trigonométricas resólvense utilizando:

- As relacións fundamentais. (1.2. Sobre todo: $\cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha, \text{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$)
- As fórmulas trigonométricas (5.1.;5.2.;5.3.;5.4.;5.5.)
- Os cambios de variable (t=senx ,t=cosx,...)

- Outros: Pasar todos os termos para un membro , sacar factor común e igualar a cero cada un dos factores;...

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.-

54.- Escribe, en radiáns, a expresión xeral de todos os ángulos que verifican:

a) $\tan x = -\sqrt{3}$

b) $\operatorname{sen} x = \cos x$

c) $\operatorname{sen}^2 x = 1$

d) $\operatorname{sen} x = \tan x$

55.- Resuelve estas ecuaciones:

$$\text{a) } 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\text{b) } 2 \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$$

c) $\tan^2 x + \tan x = 0$

d) $2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos x = 3$

Soluciones: a) $60^\circ, 180^\circ$ e 300° ; b) $-45^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ$ e 315° ; c) $0^\circ, 45^\circ, 180^\circ$ e 225° ; d) $-60^\circ, 0^\circ, 60^\circ$ e 300°

56.- Resolve:

a) $4 \cos 2x + 3 \cos x = 1$

b) $\tan 2x + 2 \cos x = 0$

$$\text{c) } \sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos x = 1$$

d) $2 \operatorname{sen} x \cos^2 x - 6 \operatorname{sen}^3 x = 0$

Soluciones: a) $-51^{\circ} 19' 4''$, $51^{\circ} 19' 4''$ e 180° ; b) -30° , 90° , 210° , 270° e 330° ; c) 90° e 180° ; d) 30° , 150° , 210° e 330°

57.- Resuelve as seguintes ecuacións:

$$a) 2 \cos^2 x - \sin^2 x + 1 = 0$$

b) $\text{sen}^2 x - \text{sen} x = 0$

c) $2 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0$

58.- Resolve:

a) $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$

b) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0$

c) $2 \cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$

d) $3 \tan^2 x - \sqrt{3} \tan x = 0$

59.-

a) Transforma en produto $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x$ e resolve despois a ecuación $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 0$.

b) Transforma en produto $\cos 3x + \cos x$ e resolve despois a ecuación $\cos 3x + \cos x = 0$.

60.- Resolve:

$$\text{a) } \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{2}$$

b) $\operatorname{sen} 2x - 2 \cos^2 x = 0$

c) $\cos 2x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

$$\text{d) } \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{2} \operatorname{sen} x=0$$

61.-

a) Demuestra que $\frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2 \alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2 \alpha} = \tan \alpha$

b) Calcula sen utilizar a calculadora: $2 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} + 2\sqrt{6} \cos \frac{11\pi}{6} - 4 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} - 2 \cos \frac{4\pi}{3} + \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}$

62.- Sabendo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$ e α é un ángulo do primeiro cuadrante, e que $\beta = 180^\circ + \alpha$, utiliza as fórmulas trigonométricas para calcular **expresando o resultado con fraccións ou radicais**:

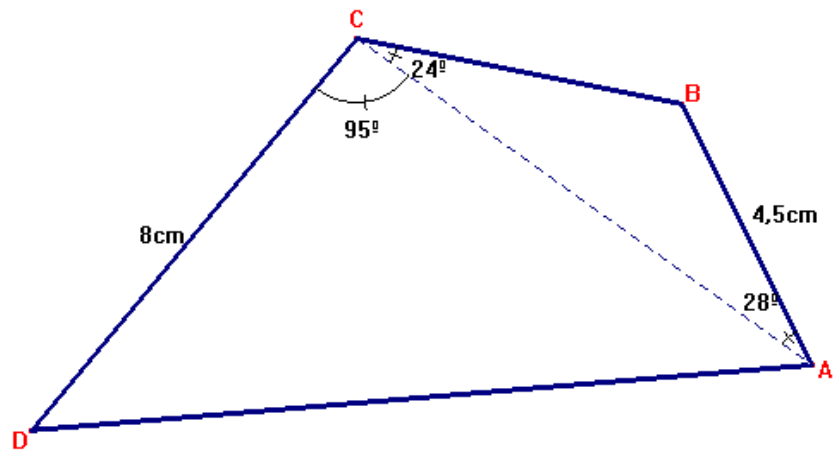
- a) Coseno e tanxente de α
- b) Seno, coseno e tanxente de β
- c) $\cos 2\alpha$
- d) $\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)$

63.- Unha árbore e un observador están en beiras opostas dun río. O observador mide o ángulo que forma súa visual co punto máis alto da árbore e obtén 35° . Retrocede 10 metros e ao medir de novo o ángulo obtén 25° . Que altura ten a árbore?.

64.-Unha antena reprodutora de sinais de radio é observada desde dous puntos do chan separados entre eles 150 metros. Os ángulos que forman as visuais á parte superior da antena coa horizontal son 75° e 55° . Calcula:

- a) As distancias de cada punto de observación á parte superior da antena.
b) A altura da antena

65.- Calcula o perímetro do cuadrilátero adxunto :



66.- Resolve as seguintes ecuacións trigonométricas

- a) $\cos 2x = 1 + 4 \cos x$ b) $2 \tan x \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin x = 1$