

TRIGONOMETRÍA. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.

MEDIDAS DUN ÁNGULO. RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DUN ÁNGULO AGUDO.-

Un ángulo é a rexión do plano comprendida entre dúas semirrectas cunha orixe común. Ás semirrectas chámanse lados e a orixe común, vértice.



MEDIDAS DUN ÁNGULO.-

Para **medir ángulos** utilízanse as seguintes unidades:

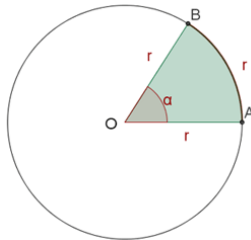
Grao sexagesimal ($^{\circ}$): Se se divide a circunferencia en 360 partes iguais, o ángulo central correspondente a cada unha das súas partes é un ángulo dun grao (1°) sexagesimal.

Un **grao** ten **60 minutos ($'$)** e un **minuto** ten **60 segundos ($''$)**.

Radián (rad): É a medida dun **ángulo** tal que o seu **arco mide un raio**.

$$2\pi \text{ rad} = 360^{\circ}$$

$$\pi \text{ rad} = 180^{\circ}$$



1 radián mide algo menos de 60° . $1 \text{ rad} = 57^{\circ} 17' 45''$

NOTA.-

Dous triángulos ABC e A'B'C' son semellantes se:

Primeiro criterio: $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$ (dous ángulos iguais)

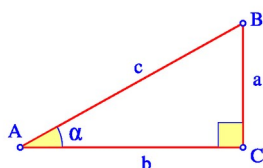
Segundo criterio: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (lados proporcionais)

Terceiro criterio: $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (lados proporcionais e ángulo comprendido igual)

RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DUN ÁNGULO AGUDO.-

As razóns trigonométricas dun ángulo agudo defínense a partir dun triángulo rectángulo construído sobre el.

As razóns trigonométricas son independentes do triángulo rectángulo escollido (todos os triángulos rectángulos construídos sobre o ángulo son semellantes e por tanto os lados son proporcionais).



$$\text{seno de } \alpha = \frac{\text{lonxitude do cateto oposto a } \alpha}{\text{lonxitude da hipotenusa}}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\text{coseno de } \alpha = \frac{\text{lonxitude do cateto contiguo a } \alpha}{\text{lonxitude da hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{tangente de } \alpha = \frac{\text{lonxitude do cateto opuesto a } \alpha}{\text{lonxitude do cateto contiguo a } \alpha}$$

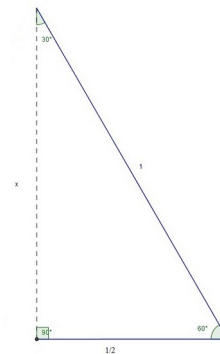
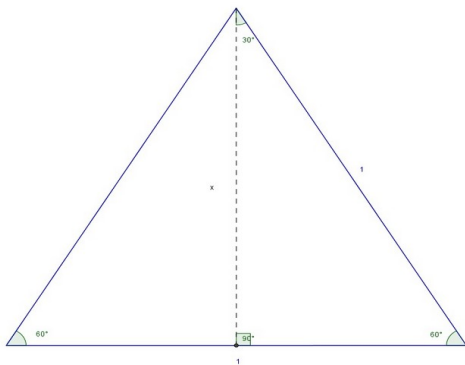
$$\text{tan } \alpha = \frac{a}{b}$$

RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DE 30° E 60°.-

Consideramos un triángulo equilátero de lado 1. Trazamos a altura, dividímo-lo en dous triángulos e quedamos cun deles.

O triángulo considerado é rectángulo de ángulos : 60°, 30° e 90° e lados :1 (hipotenusa) e $\frac{1}{2}$. O outro podémolo calcular utilizando o teorema de Pitágoras:

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = +\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



	30°	60°
$\text{sen } \alpha$	$\text{sen } 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$	$\text{sen } 60^\circ = \frac{x}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\text{cos } \alpha$	$\text{cos } 30^\circ = \frac{x}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{cos } 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$
$\text{tan } \alpha$	$\text{tan } 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\text{tan } 60^\circ = \sqrt{3}$

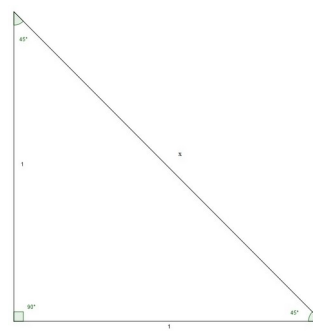
RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DE 45°.-

Consideramos un triángulo isósceles rectángulo no que os lados iguais miden 1.

O triángulo considerado é rectángulo de ángulos : 45°, 45° e 90° e lados :1 (catetos). O outro o podemos calcular utilizando o teorema de Pitágoras:

$$1^2 + 1^2 = x^2 \Rightarrow 2 = x^2 \Rightarrow x = +\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

	45°
$\text{sen } \alpha$	$\text{sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

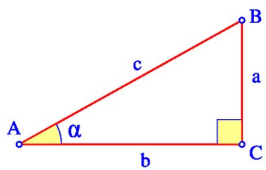


$\cos \alpha$	$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan \alpha$	$\tan 45^\circ = 1$

RELACIÓNS FUNDAMENTAIS.-

1.- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (Fórmula fundamental da trigonometría)

Dem.-

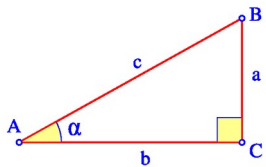


$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} \stackrel{\text{TEOREMA PITÁGORAS}}{=} \frac{c^2}{c^2} = 1 \text{ c.q.d.}$$

2.- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

Dem.-



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} = \tan \alpha \text{ c.q.d.}$$

3.- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ y 4.- $1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

Dem.-

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \stackrel{\text{DIVIDINDO A IGUALDADE ENTRE } \cos^2 \alpha}{\Rightarrow} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \stackrel{\text{DIVIDINDO A IGUALDADE ENTRE } \sin^2 \alpha}{\Rightarrow} 1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

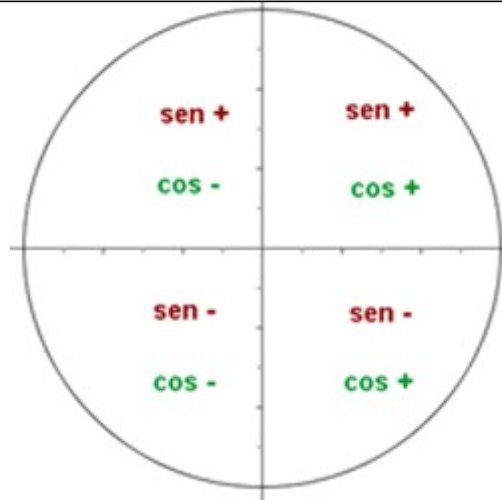
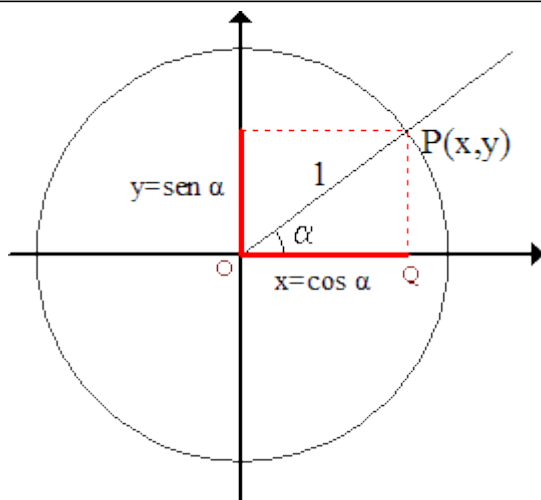
CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA. RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CALQUERA. -

Trazamos unha circunferencia de raio 1.

Tomamos sistema de coordenadas coa orixe no centro da circunferencia.

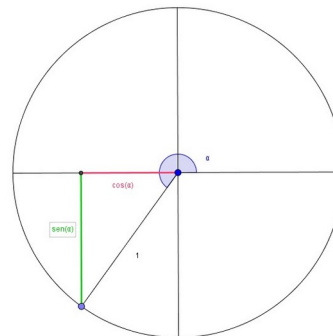
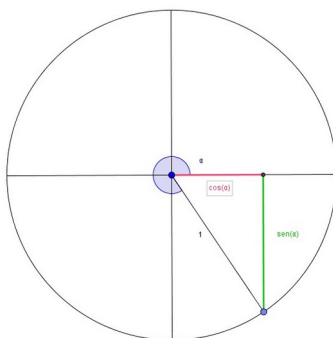
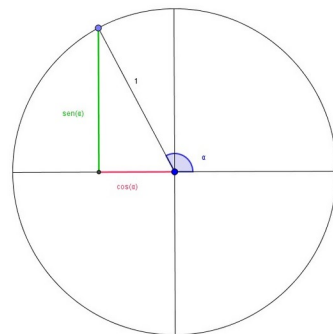
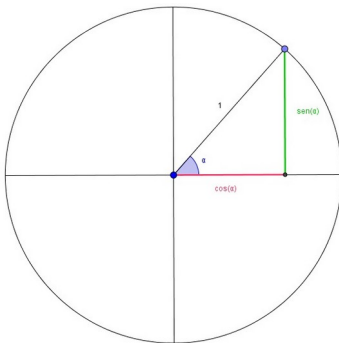
Os ángulos sitúanse sobre a circunferencia do seguinte modo:

- O vértice no centro.
- Un dos lados coincidindo co semieixo positivo das x.
- O outro lado, onde corresponda, abríndose o ángulo no sentido contrario ao movemento das agullas do reloxo.



Defínese o $\text{sen } \alpha$ como a **ordenada** do punto no que o segundo lado do ángulo α corta á circunferencia goniométrica.

Defínese o $\text{cos } \alpha$ como a **abscisa** do punto no que o segundo lado do ángulo α corta á circunferencia goniométrica.



RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS .-

	$0^\circ=360^\circ$ 2π	$30^\circ \frac{\pi}{6}$	$45^\circ \frac{\pi}{4}$	$60^\circ \frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	$180^\circ \pi$	270° $\frac{3\pi}{2}$
$\operatorname{sen} \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non existe	0	Non existe

NOTA.-

Dous triángulos ABC e A'B'C' son IGUAIS se:

Primeiro criterio: Teñen os seus tres lados iguais.

Segundo criterio: Teñen dous lados e o ángulo comprendido entre eles iguais.

Terceiro criterio: Teñen iguais un lado e os seus ángulos adxacentes .

Cuarto criterio: Teñen iguais dous lados e o ángulo oposto ao maior iguais.

REDUCCIÓN AO PRIMEIRO CUADRANTE.-

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS (SUMAN 180°)

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180 - \beta) = \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos \alpha = \cos(180 - \beta) = -\cos \beta$$

$$\tan \alpha = \tan(180 - \beta) = -\tan \beta$$

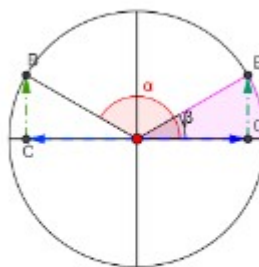
ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN 180°

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180 + \beta) = -\operatorname{sen} \beta$$

$$\cos \alpha = \cos(180 + \beta) = -\cos \beta$$

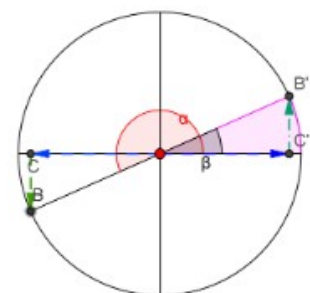
$$\tan \alpha = \tan(180 + \beta) = \tan \beta$$

$$\alpha = 180^\circ - \beta$$



$$\begin{aligned} \alpha &= 180^\circ - \beta \\ \overline{OB} &= \overline{OB'} = r \\ \operatorname{sen} \alpha &= \operatorname{sen} \beta \\ \cos \alpha &= -\cos \beta \\ \tan \alpha &= -\tan \beta \end{aligned}$$

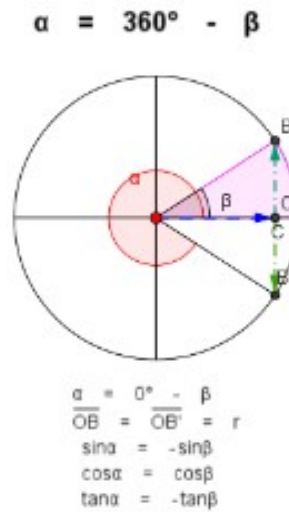
$$\alpha = 180^\circ + \beta$$



$$\begin{aligned} \alpha &= 180^\circ + \beta \\ \overline{OB} &= \overline{OB'} = r \\ \operatorname{sen} \alpha &= -\operatorname{sen} \beta \\ \cos \alpha &= -\cos \beta \\ \tan \alpha &= \tan \beta \end{aligned}$$

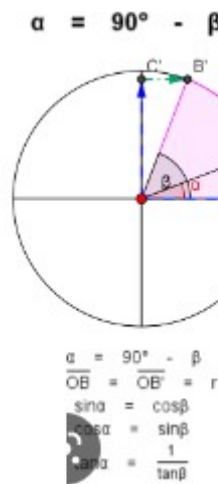
ÁNGULOS OPUESTOS (SUMAN 360°)

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \operatorname{sen}(360 - \beta) = -\operatorname{sen} \beta \\ \cos \alpha &= \cos(360 - \beta) = \cos \beta \\ \tan \alpha &= \tan(360 - \beta) = -\tan \beta\end{aligned}$$

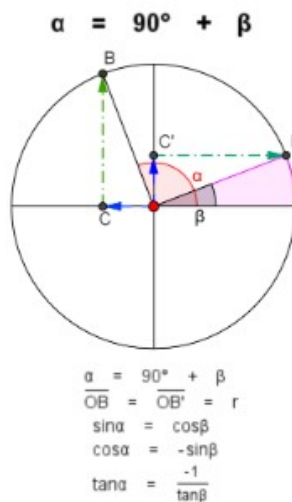


ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS (SUMAN 90°)

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \operatorname{sen}(90 - \beta) = \cos \beta \\ \cos \alpha &= \cos(90 - \beta) = \operatorname{sen} \beta \\ \tan \alpha &= \tan(90 - \beta) = \frac{1}{\tan \beta}\end{aligned}$$



ÁNGULOS DIFIEREN EN 90°



$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \operatorname{sen}(90 + \beta) = \cos \beta \\ \cos \alpha &= \cos(90 + \beta) = -\operatorname{sen} \beta \\ \tan \alpha &= \tan(90 + \beta) = \frac{-1}{\tan \beta}\end{aligned}$$

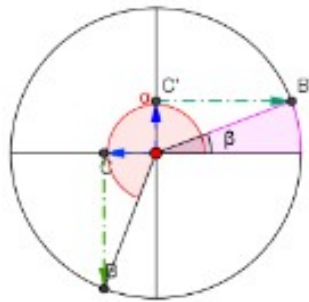
ÁNGULOS QUE SUMAN 270°

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(270 - \beta) = -\cos \beta$$

$$\cos \alpha = \cos(270 - \beta) = -\operatorname{sen} \beta$$

$$\tan \alpha = \tan(270 - \beta) = \frac{1}{\tan \beta}$$

$$\alpha = 270^\circ - \beta$$



$$\begin{aligned} \alpha &= 270^\circ - \beta \\ \overline{OB} &= \overline{OB'} = r \\ \operatorname{sen} \alpha &= -\cos \beta \\ \cos \alpha &= -\operatorname{sen} \beta \\ \tan \alpha &= \frac{1}{\tan \beta} \end{aligned}$$

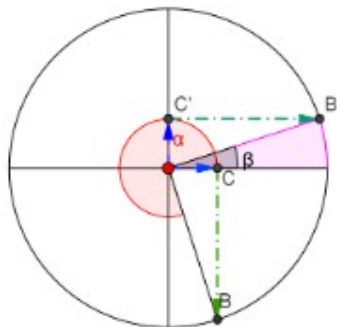
ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN 270°

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(270 + \beta) = -\cos \beta$$

$$\cos \alpha = \cos(270 + \beta) = \operatorname{sen} \beta$$

$$\tan \alpha = \tan(270 + \beta) = \frac{-1}{\tan \beta}$$

$$\alpha = 270^\circ + \beta$$



$$\begin{aligned} \alpha &= 270^\circ + \beta \\ \overline{OB} &= \overline{OB'} = r \\ \operatorname{sen} \alpha &= -\cos \beta \\ \cos \alpha &= \operatorname{sen} \beta \\ \tan \alpha &= \frac{-1}{\tan \beta} \end{aligned}$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.-

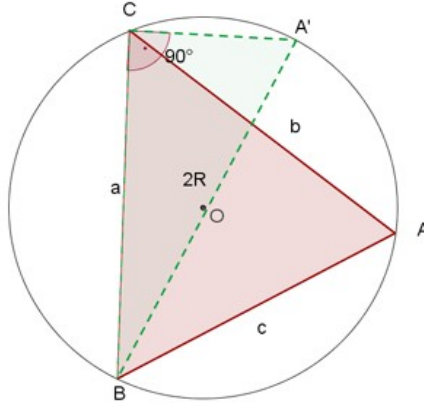
Resolver un triángulo é calcular os datos descoñecidos (lados e ángulos) a partir dos que coñecemos.

Nun triángulo rectángulo se coñecemos dous datos (ademais do ángulo de 90°) , un deles un lado, podemos calcular todos os demais (utilizando as **razóns trigonométricas apropiadas** , o **teorema de Pitágoras** e sabendo que a **suma dos ángulos dun triángulo é 180°** .

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CALQUERA.-**TEOREMA DO SENO**

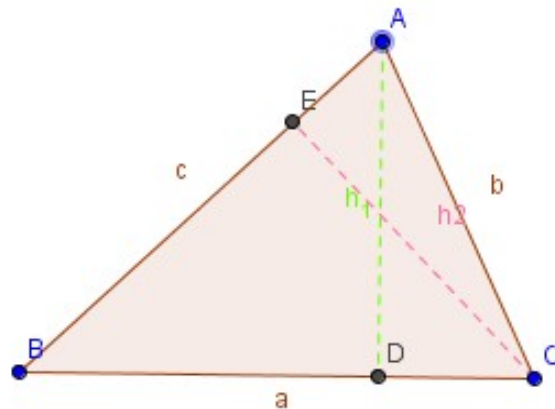
Nun triángulo calquera de lados a, b, c e de ángulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, cúmprense as seguintes igualdades:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R \quad R \text{ raio da circunferencia circunscrita}$$



OBSERVACIÓN: Isto explica que en todo triángulo o ángulo maior ten en fronte ao lado maior e o ángulo menor ten en fronte ao lado menor.

DEMOSTRACIÓN:



Se trazamos a altura h_1 dende o vértice A. Os triángulos ADC e ADB son rectángulos.

Polo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} B = \frac{h_1}{c} \Rightarrow h_1 = c \cdot \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} C = \frac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b \cdot \operatorname{sen} C \end{array} \right\} \Rightarrow c \cdot \operatorname{sen} B = b \cdot \operatorname{sen} C \Rightarrow \frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

Se trazamos a altura h_2 dende o vértice A, obtemos:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} B = \frac{h_2}{a} \Rightarrow h_2 = a \cdot \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} A = \frac{h_2}{b} \Rightarrow h_2 = b \cdot \operatorname{sen} A \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot \operatorname{sen} B = b \cdot \operatorname{sen} A \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

Por tanto,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Como $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{a}{\operatorname{sen} A'} = \frac{2R}{\operatorname{sen} 90^\circ} = 2R$ $A = A'$ pq son ángulos que abarcan el mismo arco

Entón: $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$ R raio da circunferencia circunscrita

APLICACIONES:

- Cando coñecemos dous ángulos e un lado.
- Cando coñecemos dous lados e o ángulo oposto a un deles.

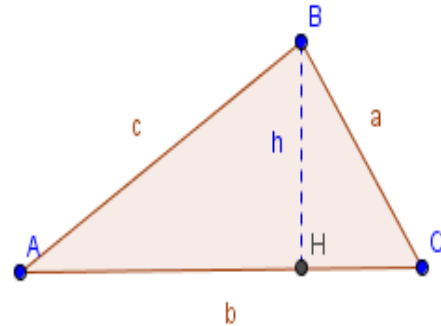
TEOREMA DO COSENO

Nun triángulo calquera de lados a, b, c , cúmprese que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



DEMOSTRACIÓN:

Trazamos a altura h , sobre o lado b .

$$\cos A = \frac{\overline{AH}}{c} \quad (1) \quad \overline{AH} = c \cdot \cos A$$

$$(2) \quad \overline{HC} = b - \overline{AH} = b - c \cdot \cos A$$

Aplicando Pitágoras nos triángulos AHB e BHC, e tendo en conta (1) e (2), resulta:

$$a^2 = h^2 + \overline{HC}^2 = h^2 + (b - c \cdot \cos A)^2 = h^2 + b^2 + c^2 \cdot \cos^2 A - 2bc \cos A$$

$$c^2 = h^2 + \overline{AH}^2 = h^2 + (c \cdot \cos A)^2 = h^2 + c^2 \cdot \cos^2 A$$

$$\text{Restando as dúas igualdades: } a^2 - c^2 = b^2 - 2bc \cos A \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

De xeito análogo chégase as outras dúas relacións.

APLICACIONES:

- Cando coñecemos os tres lados.
- Cando coñecemos dous lados e o ángulo comprendido entre eles.

RESUMINDO:**UN TRIÁNGULO SEMPRE SE PODE RESOLVER SE COÑECEMOS TRES DATOS, UN DELES UN LADO:****CASO1.-Se coñecemos os tres lados a,b,c.****A solución sempre existe se a suma de dous dos lados é maior ca o terceiro.**

Co teorema do coseno:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \text{ou} \quad C = 180 - (A + B)$$

CASO2.-Se coñecemos dous ángulos e un lado. Por exemplo: A,B e a.**A solución sempre existe se a suma dos dous ángulos é menor ca 180°. $C = 180 - (A + B)$** Co teorema do seno: $b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$ e $c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$ **CASO3.- Se coñecemos dous lados e o ángulo comprendido entre eles. Por exemplo: a,b e C.****A solución sempre existe.**Co teorema do coseno, calculamos c: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$

Como un lado menor ten en fronte un ángulo menor co teorema dos senos calculamos ese ángulo ,descartando así a posibilidade do ángulo obtuso, pois entre 0° e 180° hai dous ángulos que teñen o mesmo seno, un agudo e outro obtuso.

O outro ángulo será 180° menos a suma do que xa sabíamos e o que calculamos no paso anterior.

Tamén ,unha vez teñamos os tres lados, estamos no caso 1 e co teorema do coseno calculamos os ángulos.

CASO4.- Se coñecemos dous lados e o ángulo oposto a un deles. Po exemplo; a,b e A.**Este caso pode ter unha, dúas ou ningunha solución.**Co teorema dos senos, calculamos $\operatorname{sen} B$, $\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a}$ Se $\operatorname{sen} B > 1$

NON HAI SOLUCIÓN!!!!!!

Se $\operatorname{sen} B = 1 \Rightarrow B = 90^\circ$ Se $A + B < 180^\circ$

UNHA SOLUCIÓN!!!!!!

Se $\operatorname{sen} B < 1 \Rightarrow B_1 \text{ e } B_2 = \pi - B_1$ Se $A + B_1 < 180^\circ$ e $A + B_2 < 180^\circ$ DÚAS SOLUCIÓN!!!!!!

Tamén: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \xrightarrow{a, b, A \text{ coñecidos}} c^2 - (2b \cos A)c + (b^2 - a^2) = 0$ Ecuación de 2ª grao.

Resolvemos e calculamos c, pode haber unha , dúas ou ningunha solución.

Ex.- a=2m , b=10m y A=60°

Polo teorema do seno,

$\frac{2}{\operatorname{sen} 60} = \frac{10}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow \operatorname{sen} B = \frac{10 \operatorname{sen} 60}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} B = 4,33$ O seno dun ángulo non pode tomar valores maiores ca 1!!! Non hai ningún triángulo con a=2m , b=10m e A=60°.

Ex.- a=3m , b=4m y A=35°

Polo teorema do seno,

$$\frac{3}{\operatorname{sen} 35} = \frac{4}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow \operatorname{sen} B = \frac{4 \operatorname{sen} 35}{3} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 49^\circ 53' 11'' \Rightarrow C_1 = 95^\circ 6' 49'' \Rightarrow c_1 = 5,21 \text{ m} \\ B_2 = 130^\circ 6' 49'' \Rightarrow C_2 = 14^\circ 53' 11'' \Rightarrow c_2 = 1,34 \text{ m} \end{cases}$$

Hai dous triángulos que teñen a=3m , b=4m e A=35°.

Tamén se podería facer co teorema do coseno,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow 3^2 = 4^2 + c^2 - 2 \cdot 4 \cdot c \cdot \cos 35^\circ \Rightarrow c^2 - 6,55c + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 5,21 \Rightarrow C_1 = 95^\circ 6' 49'' \Rightarrow B_1 = 49^\circ 53' 11'' \\ c_2 = 1,34 \Rightarrow C_2 = 14^\circ 53' 11'' \Rightarrow B_2 = 130^\circ 6' 49'' \end{cases}$$

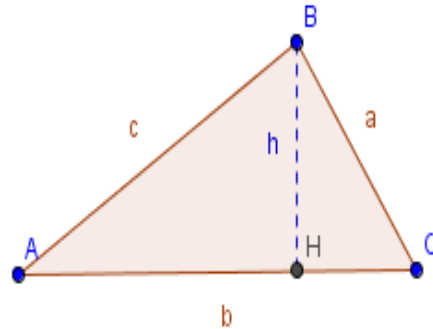
TEOREMA DA TANXENTE

Nun triángulo calquera de lados a, b, c e ángulos A, B, C cúmprese que:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}$$



Este teorema, aínda que menos coñecido que o do seno e o do coseno, relaciona as lonxitudes do triángulo e as tanxentes dos seus ángulos. Pódese utilizar cando coñecemos dous lados e un ángulo ou cando coñecemos dous ángulos e un lado.

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

$$(1) \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = AC \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$(2) \quad \cos \alpha = \frac{DE}{CD} \Rightarrow DE = CD \cdot \cos \alpha$$

$$(3) \quad \operatorname{sen} \beta = \frac{CD}{AD} \Rightarrow CD = AD \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$(4) \quad \cos \beta = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC = AD \cdot \cos \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{FD}{AD} = \frac{DE + EF}{AD} = \frac{DE}{AD} + \frac{EF}{AD}$$

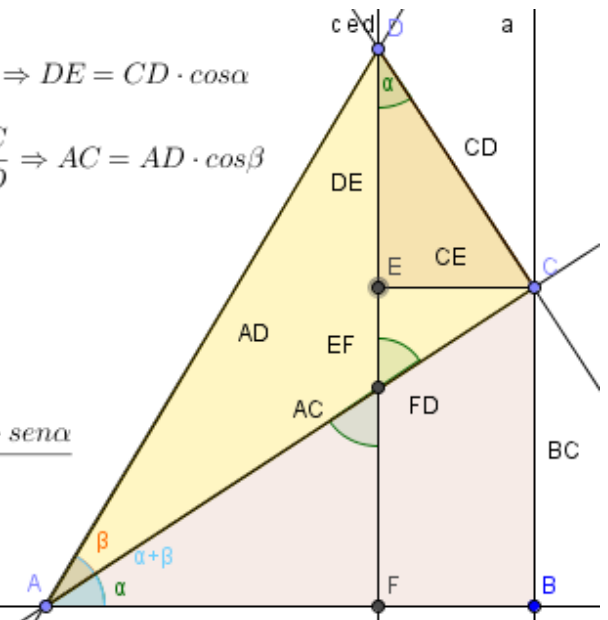
Por (1) e (2)

Por (3) e (4)

$$= \frac{CD \cos \alpha}{AD} + \frac{AC \operatorname{sen} \alpha}{AD} = \frac{AD \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha}{AD} + \frac{AD \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{sen} \alpha}{AD}$$

Simplificando

$$= \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$



Entón, $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$

40.- Calcula o coseno e a tanxente da suma.

Solución.-

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &\stackrel{\text{ángulos complementarios}}{=} \sin(90 - (\alpha + \beta)) = \sin((90 - \alpha) + (-\beta)) = \\ &= \sin(90 - \alpha) \cos(-\beta) + \cos(90 - \alpha) \sin(-\beta) \stackrel{\text{ángulos complementarios}}{=} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \stackrel{\text{dividiendo por } \cos \alpha \cos \beta}{=} \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DA SUMA DE DOUS ÁNGULOS.-

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos(\beta) + \cos \alpha \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos(\beta) - \sin \alpha \cdot \sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

42.- Calcula o seno, coseno e a tanxente da diferenza.

Solución.-

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) \stackrel{\text{seno de la suma}}{=} \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \sin \alpha \cos(\beta) + \cos \alpha \cdot (-\sin(\beta)) = \\ &= \sin \alpha \cos(\beta) - \cos \alpha \sin(\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) \stackrel{\text{cos de la suma}}{=} \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos(\beta) - \sin \alpha \cdot (-\sin(\beta)) = \\ &= \cos \alpha \cos(\beta) + \sin \alpha \sin(\beta)\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} \stackrel{\text{dividiendo por } \cos \alpha \cos \beta}{=} \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DA DIFERENZA DE DOUS ÁNGULOS.-

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos(\beta) - \cos \alpha \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos(\beta) + \sin \alpha \cdot \sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

43.- Calcula as razóns trigonométricas do ángulo dobre.

Solución.-

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) \stackrel{\text{seno de la suma}}{=} \sin \alpha \cos(\alpha) + \cos \alpha \sin(\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos(\alpha + (-\beta)) \stackrel{\text{cos de la suma}}{=} \cos \alpha \cos(\alpha) - \sin \alpha \sin(\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \tan(\alpha + \alpha) \stackrel{\text{tanxente da suma}}{=} \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DOU ÁNGULO DOBRE.-

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

48.- Calcula as razóns trigonométricas do ángulo metade.

Solución.-

$$E_1 \quad \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

$$E_2 \quad \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos(2\alpha)$$

$$\text{Restando } E_1 - E_2: \quad 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos(2\alpha)$$

$$\text{Despexando: } \operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}} \text{ Ou o que é o mesmo,}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} \text{ Escollemos o signo + ou o - dependendo do cadrante onde se atopa o ángulo } \frac{\alpha}{2}$$

$$E_1 \quad \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

$$E_2 \quad \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos(2\alpha)$$

$$\text{Sumando } E_1 + E_2: \quad 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos(2\alpha)$$

$$\text{Despexando: } \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}} \text{ Ou o que é o mesmo,}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}} \text{ Escollemos o signo + ou o - dependendo do cadrante onde se atopa o ángulo } \frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}}$$

RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DO ÁNGULO METADE

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} \text{ Escollemos o signo + ou o - dependendo do cadrante onde se atopa o ángulo } \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}} \text{ Escollemos o signo + ou o - dependendo do cadrante onde se atopa o ángulo } \frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}} \text{ Escollemos o signo + ou o - dependendo do cadrante onde se atopa o ángulo } \frac{\alpha}{2}$$

FÓRMULAS QUE TRANSFORMAN SUMAS E DIFERENZAS DE SENOS E COSENOS EN PRODUCTOS.-

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

53.- Demuestra as igualdades anteriores.

Solución:

$$\text{Se } A = \alpha + \beta \text{ e } B = \alpha - \beta$$

$$\text{Entón, } \alpha = \frac{A+B}{2} \text{ e } \beta = \frac{A-B}{2}$$

$$\text{Como, } E_1 \quad \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$E_2 \quad \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\text{Sumando } E_1 + E_2 \quad \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$

$$\text{Facendo o cambio : } \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\text{Restando } E_1 - E_2 \quad \operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\text{Facendo o cambio : } \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\text{Como, } E_3 \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$E_4 \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\text{Sumando } E_3 + E_4 \quad \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\text{Facendo o cambio : } \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\text{Restando } E_3 - E_4 \quad \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\text{Facendo o cambio : } \cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

Exemplo: Transforma en produto $\cos 3x + \cos x$

$$\text{Solución: } \cos 3x + \cos x = 2 \cos \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} = 2 \cos(2x) \cos x$$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.-

As ecuacións trigonométricas resólvense utilizando:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha, \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

- As relacións fundamentais.(1.2. Sobre todo:)
- As fórmulas trigonométricas (5.1.;5.2.;5.3.;5.4.;5.5.)
- Os cambios de variable ($t=\sin x$, $t=\cos x$,...)
- Outros: Pasar todos os termos para un membro , sacar factor común e igualar a cero cada un dos factores;...