

NÚMEROS COMPLEXOS

NECESIDADE DE AMPLIAR O CONXUNTO DOS NÚMEROS REAIS $\mathbb{R}$.-

Existen ecuacións que non teñen solucións reais.

Ao intentar resolver a ecuación $x^2+4=0$ obtense $x=\pm\sqrt{-4}$ pero non existe ningún número real, nin positivo nin negativo, que elevado ao cadrado dea -4.

Para resolver a ecuación proposta, podemos proceder da forma seguinte:

$$x=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{4\cdot(-1)}=\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=\pm 2\cdot\sqrt{-1}$$

Aínda que $\sqrt{-1}$, non ten ningún significado numérico, si se comporta coma un número, polo que abreviadamente, o representaremos por **i** que significa **unidade imaxinaria**: $i=\sqrt{-1}$.

Entón, a ecuación inicial $x^2+4=0$, xa ten solución: $x=\pm 2i$ e, a partir deste número, podemos construír os números complexos.

NÚMEROS COMPLEXOS EN FORMA BINÓMICA.-

Aos números da forma $z=a+bi$ chámaselles **números complexos**, onde **a** recibe o nome de **parte real**, e **b**, **parte imaxinaria**.

Cando $a=0$, os números reciben o nome de **imaxinarios puros**.

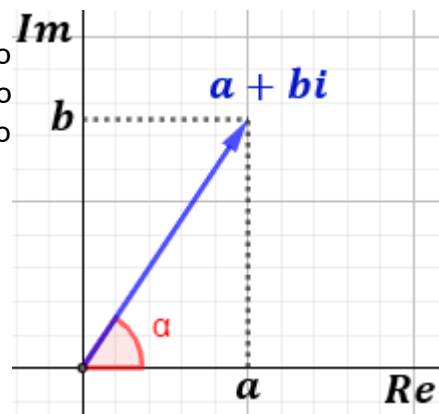
O conxunto dos números complexos represéntase por $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}=\{a+bi/a, b\in\mathbb{R}\}$

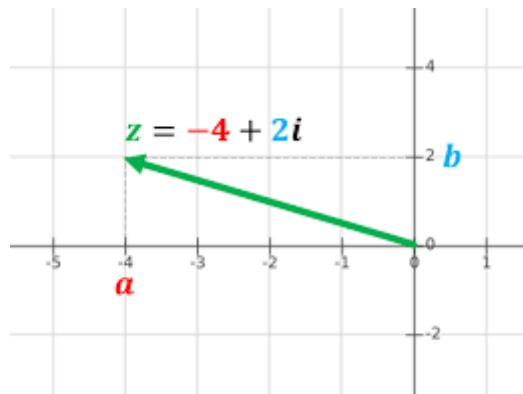
Se a parte real é a mesma e a parte imaxinaria de signo contrario, os complexos reciben o nome de **conxugados**. Por exemplo, $3-2i$ e $3+2i$ son conxugados.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA.-

Represéntanse no plano, a parte real represéntase no eixo de abscisas e a parte imaxinaria, no eixo de ordenadas, por iso ambos eixos reciben o nome de eixo real e eixo imaxinario, respectivamente.

A cada número complexo correspóndelle un punto do plano que recibe o nome de **afixo**. O vector obtido ao unir a orixe co afixo, representa tamén ao número complexo.





OPERACIÓNS CON NÚMEROS COMPLEXOS EN FORMA BINÓMICA.-

SUMA E RESTA: Súmanse ou réstanse as partes reais e as partes imaxinarias.

Ex.-

$$z_1 = 2 - 3i \quad e \quad z_2 = 3 + 4i; \quad z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (3 + 4i) = 2 + 3 - 3i + 4i = 5 + i$$

MULTIPLICACIÓN: Multiplícanse coma se fosen binomios de primeiro grao en i tendo en conta que $i^2 = -1$, xa que se $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$.

Ex.-

$$z_1 = 2 - 3i \quad e \quad z_2 = 3 + 4i; \quad z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (3 + 4i) = 6 + 8i - 9i - 12i^2 = 6 + 8i - 9i + 12 = 18 - i$$

DIVISIÓN: Realízase multiplicando numerador e denominador polo conxugado do denominador. As opereacións continúanse ata chegar á forma $a+bi$.

Ex.-

$$z_1 = 2 - 3i \quad e \quad z_2 = 3 + 4i; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 - 3i)}{(3 + 4i)} = \frac{(2 - 3i) \cdot (3 - 4i)}{(3 + 4i) \cdot (3 - 4i)} = \frac{6 - 8i - 9i + 12i^2}{9 - 12i + 12i - 16i^2} = \frac{6 - 8i - 9i - 12}{9 - 12i + 12i + 16} = \frac{-6 - 17i}{25} = -\frac{6}{25} - \frac{17}{25}i$$

POTENCIACIÓN: Estudaremos previamente as potencias da unidade imaxinaria.

$$i^0 = 1; \quad i^1 = i; \quad i^2 = -1; \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i; \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1; \quad i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i; \quad i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1; \quad i^7 = i^6 \cdot i = -i$$

Obsérvase que os valores repítense cada 4 pasos. Para calcular i^n procederemos da seguinte maneira: dividimos o expoñente entre 4 e tómasse coma novo expoñente o resto da división. Ex.- $i^{19} = i^3$ porque ao dividir 19 entre 4 obtense resto 3.

O cálculo de potencias de números complexos realízase da mesma maneira que a potencia de calquera binomio tendo en conta o estudado para as potencias da unidade imaxinaria.

Ex.-

$$(2 + 3i)^4$$

TRIÁNGULO DE PASCAL

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
...

POTENCIA DE UNA SUMA

$$\begin{aligned}
 (a+b)^0 &= 1 \\
 (a+b)^1 &= 1a + 1b \\
 (a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
 (a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
 (a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \\
 (a+b)^5 &= 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Os coeficientes do desenvolvemento son os valores da fila 4 do triángulo de Pascal (tamén chamado triángulo de Tartaglia) consideramos a fila na que só hai un 1 como a fila cero) .

Os expoñentes de 2 empezan en 4 e van diminuindo ata 0 . Os expoñentes de 3i empezan en 0 e van aumentando ata chegar a 4.

$$(2+3i)^4 = 1 \cdot 2^4 \cdot (3i)^0 + 4 \cdot 2^3 \cdot (3i)^1 + 6 \cdot 2^2 \cdot (3i)^2 + 4 \cdot 2^1 \cdot (3i)^3 + 1 \cdot 2^0 \cdot (3i)^4, \text{ é dicir,}$$

$$(2+3i)^4 = 16 + 96i + 216i^2 + 216i^3 + 81i^4 = 16 + 96i - 216 - 216i + 81 = -119 - 120i$$

ECUACIONES CON SOLUCIONES COMPLEJAS.-

Co estudo dos numeros complexos podemos resolver ecuacións que antes non podíamos.

Ex.-

$$2x^2 - 4x + 4 = 0; \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{4} = \frac{4 \pm 4i}{4} = 1 \pm i$$

NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR.-

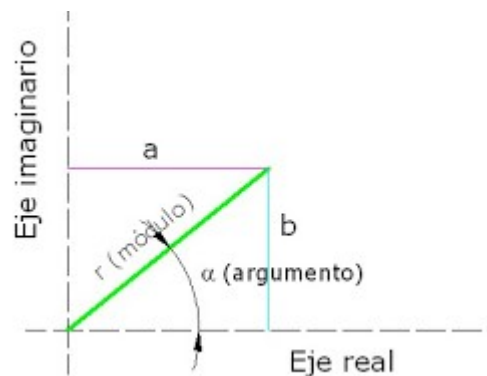
Temos que definir previamente o módulo e o argumento dun número complexo.

MÓDULO: É a medida do vector que o representa. Exprésase por r , ou ben por $|z|$.

Se $z = a + bi$, entón $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

ARGUMENTO: É o ángulo α que forma o vector co semieixo positivo de abscisas.

Se $z = a + bi$, entón $\tan \alpha = \frac{b}{a}$



Obtido o módulo e o argumento , a expresión en forma polar do número complexo $z = a + bi$ queda da seguinte forma: $Z = r_{\alpha}$.

Ex.-

Expresa en forma polar $z = -\sqrt{3} - i$.

Calculamos o módulo: $r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

Calculamos o argumento α :

$$\tan \alpha = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ \text{ (non vale porque } z \text{ está no } 3^\circ \text{ cuadrante)}$$

ou $\alpha = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$ (este é o argumento de z porque z está no 3° cuadrante)

Por tanto $z = -\sqrt{3} - i = 2_{210^\circ}$ (forma polar)

OBSERVACIÓN: Se o ángulo obtido non está no cuadrante que corresponde , súmanse 180° ao valor obtido coa calculadora.

NÚMEROS COMPLEXOS EN FORMA TRIGONOMÉTRICA.-

Observando novamente a figura, segundo a definición do seno e do coseno , podemos escribir: $a = r \cos \alpha$; $b = r \sin \alpha$. Entón, obtense:

FÓRMULA DE MOIVRE

$z = a + bi = r \cos \alpha + r \sin \alpha \cdot i = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$, que é a **expresión trigonométrica dun número complexo**.

$$z = a + bi = r_\alpha = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Nº COMPLEXO EN FORMA BINÓMICA , POLAR E TRIGONOMÉTRICA

Ex.-

$$z = 4_{30^\circ} = 4 (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{3} + 2i$$

OPERACIÓNS CON NÚMEROS COMPLEXOS EN FORMA POLAR.-

A forma polar pode ser utilizada para realizar operacións de multiplicación , división e, especialmente, potenciación e radicación, xa que , simplifica enormemente o proceso.

MULTIPLICACIÓN: Multiplícanse os módulos e súmanse os argumentos.

$$r_\alpha \cdot s_\beta = (rs)_{\alpha+\beta}$$

Dem.-

Sexa $z_1 = r_\alpha = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ e $z_2 = s_\beta = s(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$

$$z_1 \cdot z_2 = r \cdot s \cdot (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) = rs(\cos \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot i \operatorname{sen} \beta + i \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + i^2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r \cdot s \cdot [(\cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta) + i(\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta)]$$

E tendo en conta as fórmulas de $\cos(\alpha + \beta)$ e de $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, entón:

$$z_1 \cdot z_2 = r \cdot s \cdot [(\cos(\alpha + \beta)) + i(\operatorname{sen}(\alpha + \beta))] = (r \cdot s)_{\alpha + \beta}$$

Ex.-

Se $z_1 = 3_{15^\circ}$ e $z_2 = 5_{30^\circ}$, o produto será :

$$z_1 \cdot z_2 = 3_{15^\circ} \cdot 5_{30^\circ} = 15_{45^\circ} = 15(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) = 15\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{15\sqrt{2}}{2} + \frac{15\sqrt{2}}{2}i$$

DIVISIÓN: Divídense os módulos e réstanse os argumentos. $\frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha - \beta}$

Dem.-

Temos que demostrar que $\frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha - \beta}$ que é o mesmo que $r_\alpha = s_\beta \cdot \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha - \beta}$. Facendo a multiplicación $s_\beta \cdot \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha - \beta} = \left(s \cdot \frac{r}{s}\right)_{\beta + (\alpha - \beta)} = r_\alpha$ comprobamos que se verifica a igualdade.

Ex.-

Se $z_1 = 16_{60^\circ}$ e $z_2 = 2_{30^\circ}$, o cociente será :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{16_{60^\circ}}{2_{30^\circ}} = \left(\frac{16}{2}\right)_{60^\circ - 30^\circ} = 8_{30^\circ} = 8(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{3} + 4i$$

POTENCIACIÓN: Elévase o módulo ao n e o argumento multiplícase por n. $(r_\alpha)^n = r_{n \cdot \alpha}^n$

Dem.-

$$(r_\alpha)^n = r_\alpha \cdot r_\alpha \cdot \dots \cdot r_\alpha \quad \begin{array}{l} \text{multiplícanse os módulos e} \\ \text{súmanse os argumentos} \end{array} \quad \left(r \cdot r \cdot \dots \cdot r\right)_{\alpha + \alpha + \dots + \alpha} = r_{n \cdot \alpha}^n$$

Ex.-

$$¿(-1+i)^{10}?$$

Pasamos a forma polar:

$$\text{Calculamos o módulo: } r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Calculamos o argumento α :

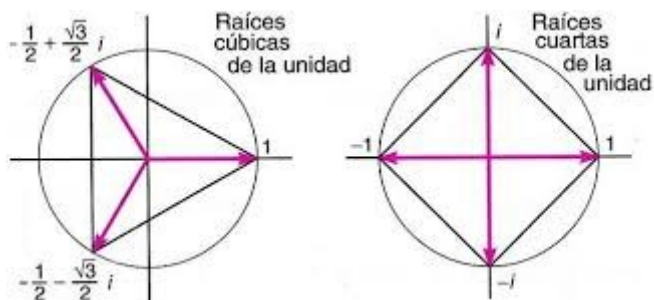
$$\tan \alpha = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ \text{ (este é o argumento de } z \text{ porque } z \text{ está no 2º cuadrante)}$$

$$\text{Por tanto } z = -1 + i = \sqrt{2}_{135^\circ} \text{ (forma polar)}$$

$$(-1+i)^{10} = (\sqrt{2}_{135^\circ})^{10} = (\sqrt{2})^{10}_{10 \cdot 135} = 32_{1350^\circ} \stackrel{1350^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 270^\circ}{=} 32_{270^\circ} \stackrel{\text{pasamos a forma binómica}}{=} 32(\cos 270 + i \operatorname{sen} 270) \\ = 32(0 + i(-1)) = -32i$$

RADICACIÓN: Faise a raíz n -ésima do módulo e ao argumento súmanse de 0 a $n-1$ voltas e divídese por n . $\sqrt[n]{r_\alpha} = \sqrt[n]{r_{\frac{\alpha+360^\circ k}{n}}}$ $k=0,1,2,3,\dots,n-1$.

Os afixos das solucións dunha raíz dun número complexo son os vértices dun polígono regular de tantos lados como indique o índice da raíz.



Dem.-

Temos que demostrar que $\left(\sqrt[n]{r_{\frac{\alpha+360^\circ k}{n}}}\right)^n = r_\alpha$ $k=0,1,2,3,\dots,n-1$

Efectivamente, $\left(\sqrt[n]{r_{\frac{\alpha+360^\circ k}{n}}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n_{\frac{\alpha+360^\circ k}{n} \cdot n} = r_{\alpha+360^\circ k} = r_\alpha$ $k=0,1,2,3,\dots,n-1$

Ex.-

$$\sqrt[4]{-16}?$$

$$\sqrt[4]{-16} \stackrel{\text{pasamos a forma polar}}{=} \sqrt[4]{16_{180^\circ}} = \sqrt[4]{16_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{4}}} = \begin{cases} k=0 & 2_{45^\circ} = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ k=1 & 2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ k=2 & 2_{225^\circ} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \\ k=3 & 2_{315^\circ} = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{cases}$$

Podes comprobar que os afixos das solucións son os vértices dun cadrado.

Ex.-

$$\sqrt[3]{-3+3i}?$$

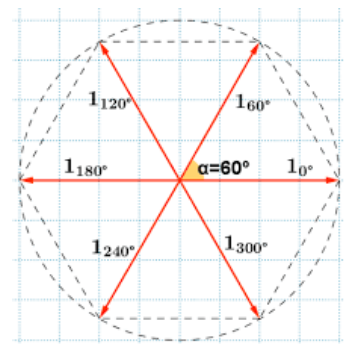
$$\sqrt[3]{-3+3i} \text{ pasamos a forma polar } = \sqrt[3]{\sqrt{18} e^{135^\circ}} = \sqrt[3]{\sqrt{18}} e^{\frac{135^\circ+360k}{3}} = \begin{cases} k=0 & \sqrt[6]{18} e^{45^\circ} \\ k=1 & \sqrt[6]{18} e^{165^\circ} \\ k=2 & \sqrt[6]{18} e^{285^\circ} \end{cases}$$

Podes comprobar que os afixos das solucións son os vértices dun triángulo equilátero.

Ex.-

$$\sqrt[6]{1}?$$

$$\sqrt[6]{1} \text{ pasamos a forma polar } = \sqrt[6]{1 e^{0^\circ}} = \sqrt[6]{1} e^{\frac{0^\circ+360k}{6}} = \begin{cases} k=0 & 1_{0^\circ}=1 \\ k=1 & 1_{60^\circ}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ k=2 & 1_{120^\circ}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ k=3 & 1_{180^\circ}=-1 \\ k=4 & 1_{240^\circ}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ k=5 & 1_{300^\circ}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$



Podes comprobar que os afixos das solucións son os vértices dun hexágono regular.

EXERCICIOS.-

1.- Efectúa las siguientes operaciones en forma binómica:

a) $(6-5i)+(2-i)-2(-5+6i)$ S.- $18-18i$

b) $(2-3i)-(5+4i)+\frac{1}{2}(6-4i)$ S.- $-9i$

c) $(3+2i)(4-2i)$ S.- $16+2i$

d) $(2+3i)(5-6i)$ S.- $28+3i$

e) $\frac{2+4i}{4-2i}$ S.- i

f) $\frac{1+5i}{3+4i}$ S.- $\frac{23}{25}+\frac{11}{25}i$

g) $\frac{4-2i}{i}$ S.- $-2-4i$

h) $(2+i)^3$ S.- $2+11i$

$$i) (2-3i)^4 \quad \text{S.- } -119+120i$$

$$k) (1+i)^3 \quad \text{S.- } -2+2i$$

$$l) (2-3i)^3 \quad \text{S.- } -46-9i$$

$$m) \frac{i^7-1}{1+i} \quad \text{S.- } -1$$

$$n) (-i)^{30} - (-i)^{31} - (-i)^3 \quad \text{S.- } -1-2i$$

2.- Expresa los siguientes números complejos en forma polar:

$$a) 4+4\sqrt{3}i \quad \text{S.- } 8_{60^\circ}$$

$$b) -i \quad \text{S.- } 1_{270^\circ}$$

$$c) 3-3\sqrt{3}i \quad \text{S.- } 6_{300^\circ}$$

$$d) 3+4i \quad \text{S.- } 5_{53^\circ 8'}$$

$$e) 3-4i \quad \text{S.- } 5_{306^\circ 52'}$$

$$f) 1-i \quad \text{S.- } \sqrt{2}_{315^\circ}$$

$$g) -2-5i \quad \text{S.- } \sqrt{29}_{248^\circ 12'}$$

$$h) -2 \quad \text{S.- } 2_{180^\circ}$$

3.- Expresa los siguientes números complejos en forma binómica (Fórmula de Moivre):

$$a) 4_{30^\circ} \quad \text{S.- } 2\sqrt{3}+2i$$

$$b) 1_{30^\circ} \quad \text{S.- } \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$c) 2_{180^\circ} \quad \text{S.- } -2$$

$$d) (\sqrt{3})_{\frac{5\pi}{6}} \quad \text{S.- } \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$e) 4_{120^\circ} \quad \text{S.- } -2+2\sqrt{3}i$$

$$f) 2_{100^\circ} \quad \text{S.- } -0,3473+1,9696i$$

4.- Dados los números complejos $z=5_{45^\circ}$, $w=2_{15^\circ}$, $t=4i$, obtén en forma polar:

a) $z \cdot w$ S.- 10_{60°

b) $\frac{z}{w^2}$ S.- $\left(\frac{5}{4}\right)_{15^\circ}$

c) $\frac{z^3}{w \cdot t^2}$ S.- $\left(\frac{125}{32}\right)_{300^\circ}$

d) $\frac{z \cdot w^3}{t}$ S.- 10

5.- Calcula las siguientes potencias e expresa el resultado en forma binómica:

a) $(1+i)^2$ S.- $2i$

b) $(\sqrt{3}-i)^5$ S.- $-16\sqrt{3}-16i$

c) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3i}{2}\right)^3$ S.- $27i$

d) $(2+3i)^3$ S.- $\approx -46+9i$

e) $(-1+i)^{30}$ S.- $2^{15}i$

f) $(1-i)^4$ S.- -4

g) $(-2+i)^5$ S.- $\approx 38+41i$

h) $(-2+2\sqrt{3}i)^4$ S.- $-128+128\sqrt{3}i$

6.- Calcula las siguientes raíces :

a) $\sqrt[4]{1+i}$ S.- $\sqrt[8]{2}_{11,25^\circ}; \sqrt[8]{2}_{101,25^\circ}; \sqrt[8]{2}_{191,25^\circ}; \sqrt[8]{2}_{281,25^\circ}$

b) $\sqrt[3]{1-i}$ S.- $\sqrt[6]{2}_{105^\circ}; \sqrt[6]{2}_{225^\circ}; \sqrt[6]{2}_{345^\circ}$

c) $\sqrt[3]{-i}$ S.- $i; -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$

d) $\sqrt[3]{8i}$ S.- $-2i; \pm\sqrt{3}+i$

e) $\sqrt[3]{8}$ S.- $2; -1 \pm \sqrt{3}i$

f) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i}$ S.- $2_{100^\circ}; 2_{220^\circ}; 2_{340^\circ}$

g) $\sqrt[5]{-243}$ S.- $3_{36^\circ}; 3_{108^\circ}; 3_{180^\circ}; 3_{252^\circ}; 3_{324^\circ}$

$$h) \sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$$

$$S.- \sqrt{3}+i; -1+\sqrt{3}i; -\sqrt{3}-i; 1-\sqrt{3}i$$

7.- Resuelve las ecuaciones :

$$a) z^3+27=0$$

$$S.- -3; \frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$b) z^4+1=0$$

$$S.- \frac{\pm\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$c) z^6+64=0$$

$$S.- \pm 2i; -\sqrt{3} \pm i; \sqrt{3} \pm i$$

8.- Obtén polinomios coas seguintes raíces :

$$a) 2+\sqrt{3}i \text{ e } 2-\sqrt{3}i$$

$$S.- x^2-4x+7$$

$$b) -3i \text{ e } 3i$$

$$S.- x^2+9$$