

MÉTODO DE GAUSS PARA A RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

DISCUSIÓN E RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POLO MÉTODO DE GAUSS.

Discutir un sistema é dicir se non ten solución (S. INCOMPATIBLE), se ten unha única solución (S. COMPATIBLE DETERMINADO) ou se ten infinitas (S. COMPATIBLE INDETERMINADO).

Resolver un sistema é calcular a solución (se é única) ou as solucións (se son infinitas). Para discutir e resolver sistemas utilizaremos o método de **Gauss**, que consiste en obter a partir dun dado e mediante transformacións elementais, outro equivalente cuxa primeira ecuación conteña todas as incógnitas, a segunda unha menos e así sucesivamente ata a última que terá unha soa incógnita. Desta forma o sistema que obtemos é triangular co cal resólvese a última ecuación, a continuación a penúltima, e así sucesivamente ata a primeira.

Transformacións elementais:

- 1) Multiplicar ou dividir por un n° distinto de cero unha ecuación.
- 2) Intercambiar dúas ecuacións.
- 3) Sumar a unha ecuación unha combinación lineal doutras ecuacións.

Ao resolver un sistema convén ter presente que podemos suprimir:

- 1) As ecuacións nulas.
- 2) As ecuacións proporcionais a outras.
- 3) As ecuacións que sexan combinación lineal doutras.

Cando utilizamos o método de Gauss, non é necesario traballar coas incógnitas, o único que necesitamos son os coeficientes e os termos independentes. Imos ver cun exemplo como se fai:

$$\text{Sexa o sistema: } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{E_1 \leftrightarrow E_1 \\ E_2 \leftrightarrow E_2 - 3E_1 \\ E_3 \leftrightarrow E_3 + 2E_1}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{E_1 \leftrightarrow E_1 \\ E_2 \leftrightarrow -3E_2 \\ E_3 \leftrightarrow 5E_3}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 15 & 12 & 6 \\ 0 & 15 & 20 & 30 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{E_1 \leftrightarrow E_1 \\ E_2 \leftrightarrow E_2 \\ E_3 \leftrightarrow E_3 - E_2}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 15 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{array} \right)$$

$$\text{O sistema é equivalente a: } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 5y + 4z = 2 \\ 8z = 24 \end{cases} \text{ de onde se obtén facilmente que:}$$

SOL: $z=3$; $y=-2$ e $x=1$, é dicir: $(1, -2, 3)$. S.C.D.

DISCUSIÓN DE SISTEMAS POLO MÉTODO DE GAUSS.

Xa sabemos resolver sistemas polo método de Gauss, pero como podemos saber se o sistema é compatible ou incompatible?. E se é compatible, como sabemos se é determinado ou indeterminado?.

Vexamos agora as posibilidades que poden darse cando resolvemos un sistema, é dicir a discusión de sistemas.

i) Se o sistema orixinal

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_3 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array} \right\} \text{ é equivalente a: } \left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = b_2 \\ b_{33}x_3 = b_3 \end{array} \right\} \text{ con } b_{33} \neq 0, (b_3 \text{ pode ser cero})$$

o sistema é **compatible determinado (S.C.D.)**, ou o que é o mesmo ten **solución única**.

ii) Se o sistema orixinal

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_3 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array} \right\} \text{ é equivalente a: } \left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = b_2 \\ 0x_3 = 0 (0=0) \end{array} \right\}$$

o sistema é **compatible indeterminado (S.C.I.)**; terá **infinitas solucións**. Este caso dáse cando ao aplicar o método de Gauss se obtén unha fila de ceros. As solucións dependerán dunha das incógnitas.

$$\text{Sexa o sistema: } \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y-z=2 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[E_3 \leftrightarrow E_3 - 3E_1]{E_1 \leftrightarrow E_1, E_2 \leftrightarrow E_2 - 2E_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[E_3 \leftrightarrow E_3 - E_2]{E_1 \leftrightarrow E_1, E_2 \leftrightarrow -E_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[E_3 \leftrightarrow E_3 - E_2]{E_1 \leftrightarrow E_1, E_2 \leftrightarrow E_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

S.C.I. (Infinitas solucións)

$$\text{Sistema equivalente: } \begin{cases} x+y+z=3 \\ y+3z=4 \\ 0=0 \end{cases} \quad . \quad \text{Facemos } z=\lambda (\lambda \in \mathbb{R}) \quad . \quad \text{Entón:}$$

$$y=4-3\lambda \quad \text{e} \quad x=3-y-z=3-(4-3\lambda)-\lambda=-1+2\lambda$$

SOL: $x=-1+2\lambda; y=4-3\lambda; z=\lambda$, é dicir: $(-1+2\lambda, 4-3\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}$

iii) Se o sistema orixinal

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_3 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \right\} \text{ é equivalente a : } \left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 &= b_2 \\ 0x_3 &= b_3 \quad (0=b_3) \end{aligned} \right\} \text{ con } b_3 \neq 0$$

o sistema é **incompatible (S.I.)**. Este caso dáse cando ao aplicar o método de Gauss obtense unha fila con todos os seus elementos ceros salvo o correspondente ao termo independente.

Sexa o sistema:
$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y-z=2 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[E_3 \leftrightarrow E_3 - 3E_1]{E_1 \leftrightarrow E_1, E_2 \leftrightarrow E_2 - 2E_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow[E_3 \leftrightarrow E_3 - E_2]{E_1 \leftrightarrow E_1, E_2 \leftrightarrow -E_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[E_3 \leftrightarrow E_3 - E_2]{E_1 \leftrightarrow E_1, E_2 \leftrightarrow E_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

S.I. (Non ten solución)

Sistema equivalente:
$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y+3z=4 \\ 0=1 \end{cases}$$
 O sistema non ten solución. $0=1$!!!! IMPOSIBLE!!!

1.- Utiliza o método de Gauss para discutir e resolver os seguintes sistemas:

a)
$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x - y - z = -1 \\ x - 2y + 3z = 4 \end{cases} \quad \text{SOL: } x = \frac{3}{7}; y = \frac{1}{7}; z = \frac{9}{7}, \text{ é dicir: } \left(\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{9}{7} \right) \text{ S.C.D.}$$

b)
$$\begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases} \quad \text{SOL: } x = 1; y = 2; z = -1, \text{ é dicir: } (1, 2, -1) \text{ S.C.D.}$$

c)
$$\begin{cases} 2x - y + z = -7 \\ x + 2y - z = 9 \\ -3x + y + 2z = -8 \end{cases} \quad \text{SOL: } x = 0; y = 2; z = -5, \text{ é dicir: } (0, 2, -5) \text{ S.C.D.}$$

d)
$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 3x - 2y - z = 3 \\ -2x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{SOL: } x = 3; y = 2; z = 2, \text{ é dicir: } (3, 2, 2) \text{ S.C.D.}$$

e)
$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases} \quad \text{SOL: Non ten solución. S.I.}$$

$$f) \begin{cases} x-2y=-3 \\ -2x+3y+z=4 \\ 2x+y-5z=4 \end{cases} \quad \text{SOL: } x=1+2\lambda; y=2+\lambda; z=\lambda, \text{ é dicir: } (1+2\lambda, 2+\lambda, \lambda) \lambda \in \mathbb{R}$$

Infinitas solucións. S.C.I.

$$g) \begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=8 \end{cases} \quad \text{SOL: } x=1; y=5-\lambda; z=\lambda, \text{ é dicir: } (1, 5-\lambda, \lambda) \lambda \in \mathbb{R}$$

Infinitas solucións. S.C.I.

2.- En certa xadería, por unha copa da casa, dúas orchatas e catro batidos cóbranche 34 € un día. Outro día, por 4 copas da casa e 4 orchatas cóbranche 44€ e, un terceiro día, pídenche 26 € por unha orchata e catro batidos. Tes motivos para pensar que algún dos tres días presentáronche unha conta incorrecta? SOL: SI

3.- Dous amigos invisten 20 000 € cada un. O primeiro coloca unha cantidade A ao 4% de xuro, unha cantidade B ao 5% e o resto ao 6%. O outro inviste a mesma cantidade A ao 5%, a B ao 6% e o resto ao 4%. Determina as cantidades A, B e C sabendo que o primeiro obtén uns intereses de 1 050 € e o segundo de 950 €.

SOL: $A=5000$; $B=5000$; $C=10000$

4.- Dispónse de tres caixas A, B e C con moedas de 1 euro. Sábese que en total hai 36 euros. O número de moedas de A excede en 2 á suma das moedas das outras dúas caixas. Se se traslada 1 moeda da caixa B á caixa A, esta terá o dobre de moedas que B. Calcula cantas moedas había en cada caixa. SOL: $A=19$; $B=11$; $C=6$

5.- Nunha mesa dunha cafetería tomaron 2 cafés, 1 refresco e 2 téis, custándolles 4'70 €. Noutra mesa pagaron 6'85 € por 3 cafés, 3 refrescos e un té. Por outra parte dous amigos tomaron un café e un refresco pagando 1'95 €. Canto custa cada bebida?

SOL: Café: 0,75€; Refresco: 1,2€; Té: 1€

6.- Unha empresa destina 5.400 € para gratificar aos seus 51 empregados. Concede 150 € aos empregados do nivel A, 120 € aos do nivel B e 90 € aos do nivel C. Tendo en conta que para os do nivel B destina en total o dobre que para os do nivel A, Cantos empregados hai en cada nivel? SOL: $A=6$; $B=15$; $C=30$

7.- Tres amigos soben á báscula de dous en dous. Andrés e Benxamín suman 173 kg, Andrés e Carlos 152 kg e por último Benxamín e Carlos pesan 165 kg. Canto pesa cada un? SOL: A: 80 kg; B: 93 kg; C: 72 Kg

8.- Unha persoa ten o seu diñeiro colocado en tres depósitos bancarios diferentes A, B e C. O diñeiro invertido en A prodúcelle un 4% de beneficio, en B un 7% e en C un 6%. Os seus beneficios foron de 1.962 € anuais. Debido aos cambios nos tipos de xuro, o segundo ano os beneficios son do 3'5% en A, o 6% en B e o 5% en C, sendo os seus beneficios totais de 1.668 €. Canto diñeiro ten investido en cada depósito bancario se en total ten 30.000 €? SOL: $A=1200$ euros; $B=18600$ euros; $C=10200$ euros