Ecuaciones trigonométricas: ejercicios resueltos

1) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas

a) $2tgx - 3\,cotgx - 1 = 0$
b) $cos^2x - 3sen^2x = 0$
c) $sen(2x + 60) + sen(x + 30) = 0$
d) $sen^2x - cos^2x = 1/2$
e) $sen2x \cdot cosx = 6sen^3x$
f) $2cosx = 3tgx$

Indicaciones:

Debes intentar reducir toda la expresión a una única razón trigonométrica (que todo sean senos, o cosenos, por ejemplo). Cuando puedas llegar a una expresión del tipo *seno(algo) = un número,* sólo tendrás que usar la función arco correspondiente (arcoseno, arcotangente, etc.).

Para conseguir que todas las razones trigonométricas sean iguales no hay una regla fija; tendrás que probar trasteando con las siguientes fórmulas básicas:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$
$$1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$$
$$tg\alpha = sen\alpha / cos\alpha$$
$$1 + cotg^2\alpha = cosec^2\alpha$$

<u>Ángulo suma</u>

$sen(\alpha \pm \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta \pm cos\alpha \cdot sen\beta$
$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \pm sen\alpha \cdot sen\beta$
$tg(\alpha + \beta) = (tg\alpha + tg\beta) / (1 - tg\alpha \cdot tg\beta)$
$tg(\alpha - \beta) = (tg\alpha - tg\beta) / (1 + tg\alpha \cdot tg\beta)$

<u>Ángulo doble</u>

$sen2\alpha = 2sen\alpha \cdot cos\alpha$
$cos2\alpha = cos2\alpha - sen2\alpha$
$tg2\alpha = (2tg\alpha) / (1 - tg2\alpha)$

<u>Ángulo mitad</u>

$$sen\alpha/2 = \pm \sqrt{((1 - cos\alpha)/2)}$$
$$cos\alpha/2 = \pm \sqrt{((1 + cos\alpha)/2)}$$
$$tg\alpha/2 = \pm \sqrt{((1-cos\alpha)/(1+cos\alpha))}$$

<u>Transformar sumas en productos</u>

$$sen\alpha + sen\beta = 2sen((\alpha+\beta)/2) \cdot cos((\alpha-\beta)/2)$$
$$sen\alpha - sen\beta = 2cos((\alpha+\beta)/2) \cdot sen((\alpha-\beta)/2)$$
$$cos\alpha + cos\beta = 2cos((\alpha+\beta)/2) \cdot cos((\alpha-\beta)/2)$$
$$cos\alpha - cos\beta = -2sen((\alpha+\beta)/2) \cdot sen((\alpha-\beta)/2)$$

Soluciones

a) 2tgx – 3 cotgx – 1 = 0

Solución:

Transformamos la cotg en tg. Llegamos a una ecuación de segundo grado.

$2tgx - 3/tgx - 1 = 0$
$2tg^2x - 3 - tgx = 0$

Resolvemos con la fórmula de la ecuación de segundo grado, siendo la incógnita tgx. Obtenemos dos soluciones:

Solución 1:

$tgx = 3/2 \rightarrow x = 56{,}31^\circ + 180k$

Solución 2:

$tg\ x = -1 \rightarrow x = 135^\circ + 180k$

b) $\mathbf{cos^2x - 3sen^2x = 0}$

Solución:

$1 - sen^2x - 3sen^2x = 0$
$1 - 4sen^2x = 0$
$sen^2x = 1/4$
$senx = \pm 1/2$

$x = arcsen1/2 \rightarrow$ $x_1 = 30^\circ + 360k$
$x_2 = 150^\circ + 360k$

$x = arcsen(-1/2) \rightarrow$ $x_3 = 210^\circ + 360k$
$x_4 = 330^\circ + 360k$

c) sen(2x + 60) + sen(x + 30) = 0

Solución:
Convertimos la suma del seno de dos ángulos en un producto (revisa las fórmulas básicas):

$2sen\ (((2x+60)+(x+30))/2)\cdot cos\ (((2x+60) - (x + 30))/2) = 0$
$2sen\ (3x/2 + 45)\cdot cos\ (x/2 + 15) = 0$
$sen\ (3x/2 + 45)\cdot cos\ (x/2 + 15) = 0$

sen (3x/2 + 45) = 0 → x_1 = -30º + 120k

cos (x/2 + 15) = 0 → x_2 = 150º + 360k
x_3 = 510º + 360k

d) sen^{2}x -cos^{2}x = 1/2

Solución:

Cambiamos el signo a los dos lados de la ecuación, para que lo de la izquierda se convierta en el coseno del ángulo doble:

sen^{2}x -cos^{2}x = 1/2
cos^{2}x – sen^{2}x = -1/2
cos2x = -1/2

2x_1 = 120º + 360k → x_1 = 60º + 180k
2x_2 = 240 + 360k → x_2 = 120 + 180k

e) sen2x·cosx = 6sen^{3}x

Solución:

Transformamos el seno del ángulo doble, y pasamos el 2 dividiendo al lado derecho.

2senx·cosx·cosx = 6sen^{3}x
senx·cosx·cosx = 3sen^{3}x
senx·cos^{2}x – 3sen^{3}x = 0

Sacamos factor común

senx(cos^{2}x – 3sen^{2}x) = 0

Como es un producto de dos cosas que dan cero, o bien la primera es cero o bien lo es la segunda. Así, por un lado,

senx = 0 → x_1 = 0º + 180k

Por otro,

cos^{2}x – 3sen^{2}x = 0
1 – sen^{2}x – 3sen^{2}x = 0
1 – 4sen^{2}x = 0
sen^{2}x = 1/4
senx = $\pm$1/2

$x = \text{arcsen}1/2 \rightarrow$ $x_2 = 30º + 360k$
$x_3 = 120º + 360k$

$x = \text{arcsen}(-1/2) \rightarrow$ $x_4 = 210º + 360k$
$x_5 = 330º + 360k$

f) 2cosx = 3tgx

$2\cos x = 3\text{sen}x/\cos x$
$2\cos^2 x = 3\text{sen}x$
$2(1-\text{sen}^2 x) = 3\ \text{sen}x$
$2 - 2\text{sen}^2 x - 3\text{sen}x = 0$

Resolvemos como una ecuación de segundo grado en la que la incógnita es senx. Obtenemos dos soluciones:

Solución 1:

$\text{sen}x = 1/2 \rightarrow$ $x1 = 30º + 360k$
$x2 = 150º + 360k$

Solución 2:

$\text{sen}x = -2 \rightarrow$ se descarta, porque ningún seno o coseno puede valer más de 1 o -1.