

SOLUCIONES TAREA RECTA TANGENTE E NORMAL

1.- R.T. e R.N. $f(x) = x^2 - 5x + 6$ en $x = 2$.

R.T. en $x = 2$ $y = f(2) + f'(2) \cdot (x - 2)$

$$f(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$

$$f'(x) = 2x - 5$$

$$f'(2) = 2 \cdot 2 - 5 = 4 - 5 = -1$$

$y = f(2) + f'(2) \cdot (x - 2)$ R.T. (recta tangente en $x = 2$)

$$y = 0 + (-1) \cdot (x - 2)$$

$y = -x + 2$ Recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$

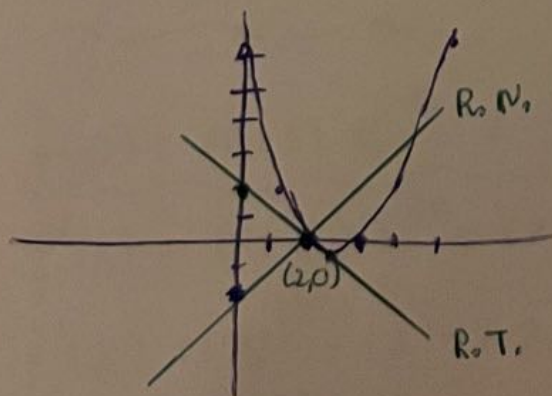
R.N. en $x = 2$ $y = f(2) - \frac{1}{f'(2)} \cdot (x - 2)$

$$f(2) = 0$$

$$y = 0 - \frac{1}{(-1)} \cdot (x - 2)$$

$$f'(2) = -1$$

$y = x - 2$ Recta normal a $f(x)$ en $x = 2$.



2. - R.T. e R.N. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $x = -1$.

R.T. en $x = -1$ $y = f(-1) + f'(-1) \cdot (x - (-1))$

$$f(-1) = \frac{1}{(-1)^2} = 1$$

$$f'(x) = (-2)x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$f(x) = x^{-2}$$

$$f'(-1) = \frac{-2}{(-1)^3} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$y = 1 + 2 \cdot (x + 1)$$

$$y = 1 + 2x + 2$$

$$\boxed{y = 2x + 3}$$
 Recta tangente $f(x)$
 $x = -1$

R.N. en $x = -1$

$$y = f(-1) + \frac{(-1)}{f'(-1)} (x - (-1))$$

$$f(-1) = 1$$

$$f'(-1) = 2$$

$$y = 1 - \frac{1}{2} \cdot (x + 1)$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}}$$
 Recta normal $f(x)$
en $x = -1$

3.- $f(x) = \sqrt{2x+1}$ R.T. e R.N. a $f(x)$ em $x=0$.

R.T. em $x=0$: $y = f(0) + f'(0) \cdot (x-0)$

$f(0) = \sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 1 \rightarrow y = \underline{1} + \underline{1} \cdot (x-0)$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$y = 1 + x$

$y = x + 1$

Retta tangente
a $f(x)$ em $x=0$

$f(x) = \sqrt{2x+1} = (2x+1)^{\frac{1}{2}}$

$f'(0) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 0 + 1}} = \frac{1}{1} = 1$

R.N. em $x=0$:

$y = f(0) - \frac{1}{f'(0)} \cdot (x-0)$

$f(0) = 1$

$f'(0) = 1$

$y = 1 - \underline{1} \cdot (x-0)$

$y = -x + 1$

Retta
normal
a $f(x)$
em $x=0$

4.- R.T. e R.N. a $f(x) = (x+1)e^{2x}$ em $x=0$

R.T. em $x=0$. $y = f(0) + f'(0) \cdot (x-0)$

$f(0) = (0+1) \cdot e^{2 \cdot 0} = 1$

$f'(x) = (x+1)' \cdot e^{2x} + (x+1) \cdot (e^{2x})'$

$f'(x) = 1 \cdot e^{2x} + (x+1) \cdot 2 \cdot e^{2x}$

$f'(x) = e^{2x} + (2x+2)e^{2x}$

$f'(x) = e^{2x} (1+2x+2)$

$f'(x) = (2x+3) \cdot e^{2x}$

$f'(0) = (2 \cdot 0 + 3) \cdot e^{2 \cdot 0}$

$f'(0) = 3 \cdot e^0 = 3 \cdot 1 = 3$

R.T. en $x=0$:

$$y = f(0) + f'(0)(x-0)$$

$$y = 1 + 3 \cdot (x-0)$$

$$y = 3x + 1$$

Recta tangente a $f(x)$ en $x=0$

R.N. en $x=0$:

$$y = f(0) - \frac{1}{f'(0)}(x-0)$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 3$$

$$y = 1 - \frac{1}{3}(x-0)$$

$$y = -\frac{x}{3} + 1$$

Recta normal a $f(x)$ en $x=0$

5.- R.T. e R.N. a $f(x) = \frac{\ln(3x-2)}{x}$ en $x=1$.

$$f(1) = \frac{\ln(3 \cdot 1 - 2)}{1} = \frac{\ln 1}{1} = 0$$

$$f'(x) = \frac{(\ln 3x-2)' \cdot x - \ln(3x-2) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{3}{3x-2} \cdot x - \ln(3x-2) \cdot 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{3x}{3x-2} - \ln(3x-2)}{x^2}$$

$$f'(1) = \frac{\frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 1 - 2} - \ln(3 \cdot 1 - 2)}{1^2} = 3$$

R.T. en $x=1$:

$$y = f(1) + f'(1) \cdot (x-1)$$

$$y = 0 + 3 \cdot (x-1)$$

$$y = 3x - 3$$

Recta tangente a $f(x)$ en $x=1$.

R.N. en $x=1$:

$$y = f(1) - \frac{1}{f'(1)}(x-1)$$

$$y = 0 - \frac{1}{3}(x-1)$$

$$y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$$

Recta normal a $f(x)$ en $x=1$.

6.- R.T. e R.N. a $f(x) = \ln x^2$ en $x=1$.

Recta tanxente en $x=1$:

$$y = f(1) + f'(1) \cdot (x-1)$$

PROP. LOGAR.

$$f(1) = \ln 1^2 = \ln 1 = 0$$

$$f(x) = \ln x^2 \stackrel{\vee}{=} 2 \ln x$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}$$

$$f'(1) = \frac{2}{1} = 2$$

Entón $y = 0 + 2 \cdot (x-1)$

$y = 2x - 2$ Recta tanxente en $x=1$

Recta normal en $x=1$:

$$y = f(1) - \frac{1}{f'(1)} (x-1)$$

$$y = 0 - \frac{1}{2} (x-1)$$

$$y = \frac{-x+1}{2}$$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ Recta normal en $x=1$

7.- RECTAS TANGENTES Á CURVA $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ PARALELAS
 Á RECTA $2x+y=0$.

Temos que atopar os puntos da curva onde a recta tangente é paralela á recta $2x+y=0 \Rightarrow y=-2x$ polo que temos que atopar os x_0 t.q. $f'(x_0) = -2$

pendente
recta tangente
en $x=x_0$ ← pendente
recta
 $2x+y=0$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x-1) - 2x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x_0) = \frac{-2}{(x_0-1)^2} = -2 = m \Rightarrow \frac{-2}{(x_0-1)^2} = -2 \Rightarrow (x_0-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0-1=1 \Rightarrow x_0=2 \\ x_0-1=-1 \Rightarrow x_0=0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Puntos da función onde} \\ \text{a recta tangente é paralela a } y=-2x. \end{array}$$

RECTA TANGENTE EN $x_0=2$

$$y = f(2) + f'(2) \cdot (x-2) \quad f(2) = \frac{2 \cdot 2}{2-1} = 4$$

$$y = 4 + (-2) \cdot (x-2) \quad f'(2) = -2$$

$$\boxed{y = -2x + 8}$$

RECTA TANGENTE EN $x_0=0$

$$y = f(0) + f'(0) \cdot (x-0) \quad f(0) = 0$$

$$y = 0 + (-2)(x-0) \quad f'(0) = -2$$

$$\boxed{y = -2x}$$

8.- RECTA TANGENTE A $f(x)$ EN $x=2$ É $4x-3y+1=0$

¿ $f'(2)$? $f'(2)$ É PENDENTE RECTA TANGENTE EN $x=2$
 COMO $4x-3y+1=0$ É A RECTA TANGENTE EN $x=2$
 E A SÚA PENDENTE É $3y = 4x+1 \Rightarrow y = \frac{4x+1}{3}$

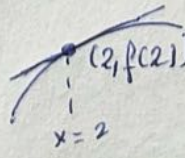
$$m = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{f'(2) = \frac{4}{3}}$$

¿ $f(2)$?

O punto $(2, f(2))$ PUNTO DE TANGENCIA É UN PUNTO
 COMÚN DA RECTA TANGENTE E DA CURVA $y=f(x)$.

$$\boxed{f(2) = 3}$$

$$y = \frac{4x+1}{3} \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 2 & \frac{4 \cdot 2 + 1}{3} = 3 \end{array}$$

 PUNTO RECTA TANGENTE
 E PUNTO DA CURVA
 $y=f(x)$

9.- $f(x) = ax^2 + bx + c$ sabendo que passa pelo $(0, 1)$
e que a pendente da recta tangente no ponto
 $(2, -1)$ vale 0. $f'(x) = 2ax + b$

$$f(x) \text{ passa pelo } (0, 1) \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \Rightarrow \underline{c = 1}$$

$$f(x) \text{ passa pelo } (2, -1) \Rightarrow f(2) = -1 \Rightarrow \underline{4a + 2b + c = -1}$$

$$\text{A pendente da recta tangente em } x=2 \text{ é } 0 \Rightarrow f'(2) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{4a + b = 0}$$

$$\begin{cases} c = 1 \\ 4a + 2b + c = -1 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{sistema}]{\text{Resolvendo}} \begin{cases} 4a + 2b + 1 = -1 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ 4a + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 4a + 2b = -2 \\ -4a - b = 0 \\ \hline b = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4a + b = 0 \\ \checkmark \\ \Rightarrow 4a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\text{Por tanto, } \boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1}$$

10.- $y = ax^2 + bx + c$ tangente à recta $y = 2x - 3$ em $A(2, 1)$
e que passa por $B(5, -2)$. $f'(x) = y' = 2ax + b$

$$y = f(x) \text{ passa por } (2, 1) \Rightarrow f(2) = 1 \Rightarrow \underline{4a + 2b + c = 1}$$

$$y = f(x) \text{ passa por } (5, -2) \Rightarrow f(5) = -2 \Rightarrow \underline{25a + 5b + c = -2}$$

$$\text{A pendente da recta tangente em } x=2 \text{ é } 2 \Rightarrow f'(2) = 2$$

$$\text{porque } y = 2x - 3 \text{ recta tangente em } x=2$$

$$\Rightarrow \underline{4a + b = 2}$$

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 1 \\ 25a + 5b + c = -2 \\ 4a + b = 2 \end{cases} \xrightarrow[\text{sistema}]{\text{Resolvendo (GAUSS)}} \boxed{y = f(x) = -x^2 + 6x - 7}$$

$$a = -1; b = 6; c = -7$$

11.- x_0 / rectas tanxentes ás curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$
e $y = x^2 + 6x$ sexan paralelas. ¿RECTAS TANXENTES?

Pendente recta tanxente en x_0 $y'_{x_0} = 6x_0 - 2 = f'(x_0)$
a $y = 3x^2 - 2x + 5 = f(x)$

Pendente recta tanxente en x_0 $y'_{x_0} = 2x_0 + 6 = f'(x_0)$
a $y = x^2 + 6x = f(x)$

Como teñen que ser paralelas
as pendentes teñen que ser
iguais

$$6x_0 - 2 = 2x_0 + 6$$

↓

$$4x_0 = 8$$

↓

$$x_0 = 2$$

Punto no
que as
rectas tanxentes
son paralelas

EC. RECTA TANXENTE

A $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

EN $x_0 = 2$ $f(2) = 13$
 $f'(2) = 10$

$$y = f(2) + f'(2) \cdot (x - 2)$$

$$y = 13 + 10 \cdot (x - 2)$$

$$\boxed{y = 10x + 7}$$

EC. RECTA TANXENTE

A $f(x) = x^2 + 6x$

EN $x_0 = 2$ $f(2) = 16$
 $f'(2) = 10$

$$y = f(2) + f'(2) \cdot (x - 2)$$

$$y = 16 + 10 \cdot (x - 2)$$

$$\boxed{y = 10x - 4}$$

12.- a, b, c / $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ f teña tanxente
horizontal en $x = -4$ e en $x = 0$ e pasa por $(1, 1)$.

$$f(x) \text{ pasa por } (1, 1) \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow 1 + a + b + c = 1$$

$$f(x) \text{ tanxente horizontal en } x = -4 \Rightarrow f'(-4) = 0 \Rightarrow 48 - 8a + b = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f(x) \text{ tanxente horizontal en } x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 8a - b = 48 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a = 48 \\ a = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 6 + 0 + c = 0 \\ c = -6 \end{cases}$$

Entón, $f(x) = x^3 + 6x^2 + 0x - 6$

$$\boxed{f(x) = x^3 + 6x^2 - 6}$$