

PROBLEMAS OPTIMIZACIÓN

① $M(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{3q^2 + 5q + 75}{q}$ CUSTO MEDIO POR UNIDADE
 $q \rightarrow$ Nº UNIDADES

② $q?$ MINIMIZAR $M(q)$

$M(q) = 3q + 5 + \frac{75}{q} = 3q + 5 + 75q^{-1}$ $\leftarrow$ TEMOS QUE BUSCAR
O MÍNIMO ABSOLUTO
DE $M(q)$ EN $(0, \infty)$
 $q \in (0, \infty)$

• Empezamos buscando os mínimos relativos (posibles mínimos absolutos)

$$M'(q) = 3 + 75 \cdot (-1) \cdot q^{-1-1} = 3 - \frac{75}{q^2} = 3 - 75q^{-2}$$

$$M'(q) = 0 \Rightarrow 3 - \frac{75}{q^2} = 0 \Rightarrow \frac{75}{q^2} = 3 \Rightarrow q^2 = 25 \Rightarrow q = \pm 5$$

$q = -5$ NON VÁLIDA (q Nº UNIDADES)

$q = 5$ POSIBLE EXTREMO RELATIVO ¿MÍN. RELATIVO?

$$M''(q) = -(-2) \cdot 75 \cdot q^{-2-1} = \frac{150}{q^3}$$

Como $M'(5) = 0$
 $M''(5) = \frac{150}{5^3} > 0$ } TEOREMA En $q = 5$ MÍNIMO RELATIVO

• Como buscamos o mínimo absoluto, temos que ver o valor da función no mínimo relativo e también nos extremos do dominio da función (POSIBLES MÍN. ABSOLUTO)
 $q \in (0, \infty)$

$$\lim_{q \rightarrow 0} M(q) = \lim_{q \rightarrow 0} \left(\overset{0}{3q} + \overset{5}{5} + \overset{\infty}{\frac{75}{q}} \right) = \infty$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} M(q) = \lim_{q \rightarrow \infty} \left(\overset{\infty}{3q} + \overset{5}{5} + \overset{0}{\frac{75}{q}} \right) = \infty$$

$$M(5) = \frac{C(5)}{5} = \frac{3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + 75}{5} = \frac{175}{5} = 35 \$$$

EN $q = 5$
HAI MÍN.
ABSOLUTO
⑥ $M(5) = 35 \$$
 $C(5) = 175 \$$

② $f(x) = \frac{60x}{x^2+9}$ $f(x)$ BENEFÍCIOS EN MILES EUROS
 x AÑOS DESDE QUE COMEZO A FUNCIONAR

① Representação

• $D = \mathbb{R}$ $x^2+9 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

• CORTES EIXOS: $x=0 \Rightarrow y=0$ $(0,0)$
 $y=0 \Rightarrow x=0$

• SIMETRIAS: SIMÉTRICA RESPECTO AO $(0,0)$

pg. $f(-x) = \frac{60 \cdot (-x)}{(-x)^2+9} = \frac{-60x}{x^2+9} = -\frac{60x}{x^2+9} = -f(x)$

• NON A.V.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{60x}{x^2+9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{60x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{60}{x} = 0^+$

Então $y=0$ A.H. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{60x}{x^2+9} = 0^-$

• MONOTONIA

$f'(x) = \frac{60 \cdot (x^2+9) - 60x \cdot (2x)}{(x^2+9)^2} = \frac{60x^2 + 540 - 120x^2}{(x^2+9)^2} = \frac{-60x^2 + 540}{(x^2+9)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-60x^2 + 540}{(x^2+9)^2} = 0 \Rightarrow -60x^2 + 540 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

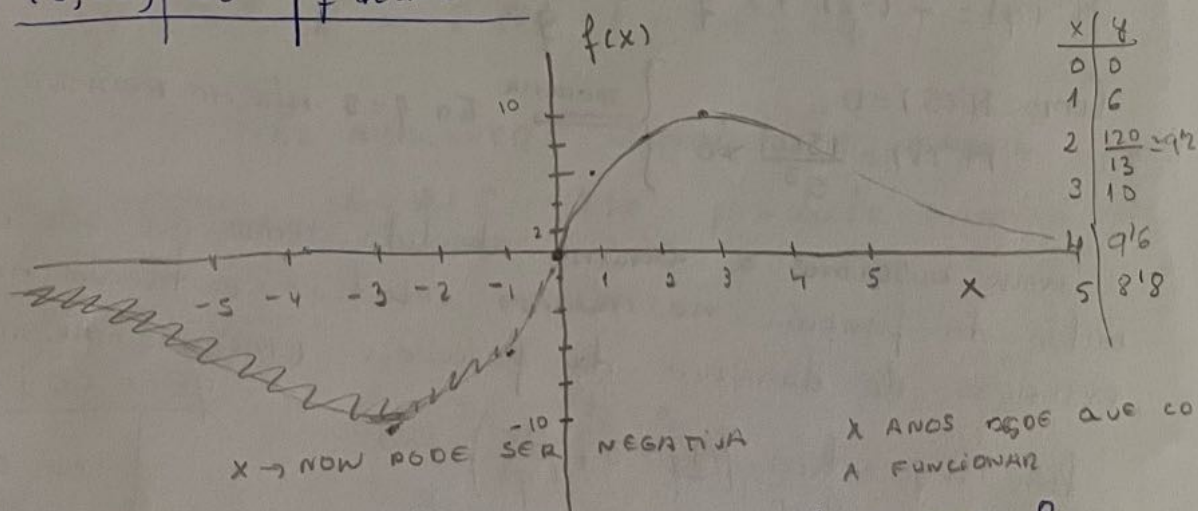
POSÍVEIS
EXTREMOS
RELATIVOS

	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -3)$	< 0	f decrece
$(-3, 3)$	> 0	f cresce
$(3, \infty)$	< 0	f decrece

• EXTREMOS RELATIVOS

$(-3, f(-3)) = (-3, -10)$ MÍN. REL.

$(3, f(3)) = (3, 10)$ MÁX. REL.



⑥ Observando a gráfica xa podemos decir que o Benefício MÁXIMO vai ser cando $x=3$ (aos 3 anos) e esse Máximo = +10.000 €

⑦ Non perderá diñeiro. A función tende a 0^+ cando $x \rightarrow \infty$, é dicir, o valor da función por moito que pasen os anos vai ser sempre $\oplus$.

3

DESCOMPOÑER 16 EN SUMANDOS (+) T.A. O PRODUTO SEXA MÁXIMO.

$x, y \rightarrow$ SUMANDOS T.A. $x+y=16$ $x>0$ e $y>0$

Temos que buscar o MÁX. ABSOLUTO da

función $x \cdot y$ cando $x+y=16$

$$F(x, y) = x \cdot y \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y=16 \Rightarrow y=16-x \\ F(x) = x \cdot (16-x) = 16x - x^2 \\ 16 > x > 0 \end{array} \right. \quad \leftarrow \text{BUSCAR MÁX. ABSOLUTO}$$

¿ MÁX. RELATIVOS ?

$$F'(x) = 16 - 2x$$

$$F'(x) = 0 \Rightarrow 16 - 2x = 0 \Rightarrow x = 8 \quad \text{POSIBLE EXTREMO RELATIVO}$$

$$F''(x) = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Como } F'(8) = 0 \\ F''(8) < 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{TEOREMA}} \text{En } x=8 \text{ MÁX. RELATIVO}$$

¿ VALOR FUNCIÓN NOS EXTREMOS DO DOMINIO ? $x \in [0, 16]$
E NO MÁX. RELATIVO

$$F(0) = 0$$

$$F(16) = 16 \cdot 16 - 16^2 = 0$$

$$F(8) = 16 \cdot 8 - 8^2 = 8 \cdot (16 - 8) = 8 \cdot 8 = 64$$

EN $x=8$ MÁX. ABSOLUTO. O produto é MÁXIMO CANDO
DESCOMPOÑEMOS $16 = 8 + 8$. Ese produto máximo é 64.

④ $v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8 \quad t \in [2, 6]$

¿MÁX.? ¿MÍN.?

¿EXTREMOS RELATIVOS?

$$v'(t) = 3t^2 - 30t + 72$$

$$v'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 30t + 72 = 0 \Rightarrow$$

$$t = 4$$

$$t = 6$$

POSIBLES EXTREMOS RELATIVOS

¿MÁX. OU MÍN. OU NINGÚN DOS DOUS?

$$v''(t) = 6t - 30$$

Como $v'(4) = 0$

$$v''(4) = 24 - 30 < 0$$

TEOREMA
 $\Rightarrow$ En $t = 4$ MÁX. RELATIVO

Como $v'(6) = 0$

$$v''(6) = 36 - 30 > 0$$

TEOREMA
 $\Rightarrow$ En $t = 6$ MÍN. RELATIVO

¿VALOR DA FUNCIÓN NO MÁX. REL. E NOS EXTREMOS?
 $t \in [2, 6]$

$$v(2) = 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 72 \cdot 2 + 8 = 100 \text{ km/h}$$

$$v(6) = 6^3 - 15 \cdot 6^2 + 72 \cdot 6 + 8 = 116 \text{ km/h}$$

$$\underline{v(4) = 4^3 - 15 \cdot 4^2 + 72 \cdot 4 + 8 = \underline{120 \text{ km/h}}}$$

En $t = 4$ MÁX. ABSOLUTO

As 4 h. da tarde os coches circulan a maior velocidade e esa velocidade máxima é de 120 km/h.

¿VALOR DA FUNCIÓN NO MÍN. REL. E NOS EXTREMOS?
 $t \in [2, 6]$

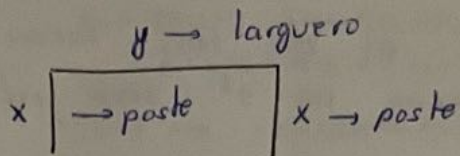
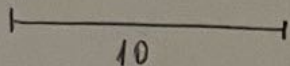
$$v(2) = 100 \text{ km/h}$$

$$v(6) = 116 \text{ km/h}$$

En $t = 2$ MÍN. ABSOLUTO

As 2 h da tarde os coches circulan a menor velocidade e esa velocidade mínima é de 100 km/h.

5



$x \rightarrow$ poste
 $y \rightarrow$ larguero

T.A. $x + y + x = 10 \Rightarrow y = 10 - 2x$

Temos que buscar o valor de x e y que fagan máx. a superfície do interior da porteira, é dicar, da función, caudo como $2x + y = 10$

$S(x, y) = x \cdot y \xrightarrow{y = 10 - 2x} \left[\begin{array}{l} S(x) = x \cdot (10 - 2x) = 10x - 2x^2 \\ 0 < x < 5 \end{array} \right]$ BUSCAR MÁX. ABSOLUTO

¿EXT. RELATIVOS?

$$S'(x) = 10 - 4x$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 10 - 4x = 0 \Rightarrow 4x = 10 \Rightarrow x = 2'5$$

$$S''(x) = -4 \quad \text{COMO} \quad \left. \begin{array}{l} S'(2'5) = 0 \\ S''(2'5) < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{TEOREMA} \\ \Rightarrow \text{EN } x = 2'5 \text{ HAI} \\ \text{MÁX. RELATIVO} \end{array}$$

¿VALOR DA FUNCIÓN NOS EXTREMOS DO DOMINIO E NO MÁX. REL.?

$$x \in [0, 5]$$

$$S(0) = 0$$

$$S(5) = 10 \cdot 5 - 2 \cdot 5^2 = 0$$

$$S(2'5) = 10 \cdot 2'5 - 2 \cdot 2'5^2 = 25 - 12'5 = 12'5$$

EN $x = 2'5$ MÁX. ABSOLUTO. A superficie é MÁXIMA caudo os postes miden 2'5 m e o larguero 5 m e esa SUPERFICIE MÁXIMA é de 12'5 m².

6

DESCOMPOÑER 81 EN DOUS SUMANDOS T.Q. PRODUTO DO 1º POLO CADRADO DO 2º SEJA MÁXIMO.

x, y SUMANDOS T.Q. $x+y=81$ $x>0$ e $y>0$

Temos que buscar o máximo absoluto da función

$$P(x, y) = x \cdot y^2 \text{ cando } x+y=81$$

$$P(x, y) = x \cdot y^2 \xrightarrow[\text{como } x+y=81]{y=81-x} \boxed{P(x) = x \cdot (81-x)^2} \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{BUSCAR MÁX.} \\ \text{ABSOLUTO} \end{array}$$

$$0 < x < 81$$

¿ MÁX. RELATIVOS ?

$$P'(x) = 1 \cdot (81-x)^2 + x \cdot 2 \cdot (81-x) \cdot (-1) = (81-x) \cdot [(81-x) - 2x]$$

$$P'(x) = (81-x) \cdot (81-3x)$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow (81-x) \cdot (81-3x) = 0$$

$x=81$
 $81-3x=0 \Rightarrow 3x=81 \Rightarrow x=27$
 POSIBLES MÁX. RELATIVOS

$$P''(x) = -1 \cdot (81-3x) + (81-x) \cdot (-3) = -81 + 3x - 243 + 3x = 6x - 324$$

$$\text{COMO } \left. \begin{array}{l} P'(81) = 0 \\ P''(81) = 6 \cdot 81 - 324 = 486 - 324 > 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{TEOREMA}} \text{EN } x=81 \text{ MÍN. RELAT.}$$

MO'S BUSCAMOS MÁX.

$$\text{COMO } \left. \begin{array}{l} P'(27) = 0 \\ P''(27) = 6 \cdot 27 - 324 = 162 - 324 < 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{TEOREMA}} \text{EN } x=27 \text{ MÁX. REL.}$$

¿ VALOR DA FUNCIÓN NOS EXTREMOS DO DOMINIO e NO MÁX. REL. ?
 $x \in [0, 81]$

$$P(0) = 0 \cdot (81-0)^2 = 0$$

$$P(81) = 81 \cdot (81-81)^2 = 0$$

$$P(27) = 27 \cdot (81-27)^2 = 27 \cdot 54^2 = 78732$$

EN $x=27$ MÁX. ABSOLUTO. O produto do 1º polo 2º ao cadrado é máximo cando descompoñemos $81 = 27 + 54$.

Ese produto máximo é 78732.

(7)

$$C(x) = 90 + 15x - 0'6x^2$$

$x \rightarrow$ TEMPO TRANSCURRIDO DENTRO
1 XANEIRO 1990 EN ANOS

$C(x) \rightarrow$ CONCENTRACIÓN OZONO
 $\mu\text{g}/\text{m}^3$

Temos que buscar o MÁX. ABSOLUTO da función

$$C(x) = 90 + 15x - 0'6x^2 \quad \text{CANDO } x \in [0, \infty)$$

¿EXT. RELATIVOS?

$$C'(x) = 15 - 1'2x$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 15 - 1'2x = 0 \Rightarrow 1'2x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{1'2} = 12'5$$

$$C''(x) = -1'2$$

$$\text{COMO } C'(12'5) = 0$$

$$C''(12'5) = -1'2 < 0$$

$\left. \begin{array}{l} C'(12'5) = 0 \\ C''(12'5) = -1'2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$ EN $x = 12'5$
MÁX. RELATIVO

¿VALOR DA FUNCIÓN NOS EXTREMOS DO DOMINIO EN O
MÁX. RELATIVO?

$$C(0) = 90 + 15 \cdot 0 - 0'6 \cdot 0^2 = 90$$

$$C(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} (90 + 15x - 0'6x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} -0'6x^2 = -\infty$$

$$C(12'5) = 90 + 15 \cdot 12'5 - 0'6 \cdot 12'5^2 = 183'75 \mu\text{g}/\text{m}^3$$

En $x = 12'5$ MÁX. ABSOLUTO. A concentración de ozono
contaminante é MÁX. aos 12'5 anos, é dicir,
o 30 xuño de 2002. Esa concentración
máxima é $183'75 \mu\text{g}/\text{m}^3$.

8

$$f(t) = \frac{75t}{t^2 + 100}$$

$t \rightarrow$ ANOS TRANSCURRIDOS

$f(t) \rightarrow$ BENEFICIOS EN CENTOS DE MILLEIROS DE EUROS

Temas que buscar o valor de t que faça máx.

a función $\left| \begin{array}{l} f(t) = \frac{75t}{t^2 + 100} \\ t \geq 0 \end{array} \right| \checkmark$ BUSCAR MÁX. ABSOLUTO

¿EXTREMOS RELATIVOS?

$$f'(t) = \frac{75 \cdot (t^2 + 100) - 75 \cdot t \cdot 2t}{(t^2 + 100)^2} = \frac{75t^2 + 7500 - 150t^2}{(t^2 + 100)^2}$$

$$f'(t) = \frac{-75t^2 + 7500}{(t^2 + 100)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow \frac{-75t^2 + 7500}{(t^2 + 100)^2} = 0 \Rightarrow -75t^2 + 7500 = 0 \Rightarrow t^2 = 100$$

$$\Rightarrow t = \pm 10 \quad t = -10 \text{ NON VÁLIDA} \quad t \rightarrow \text{ANOS TRANSCURRIDOS} \quad t > 0$$

¿ $t = 10$ MÁX. RELATIVO?

$$f''(t) = \frac{-150t \cdot (t^2 + 100)^2 - (-75t^2 + 7500) \cdot 2 \cdot (t^2 + 100) \cdot 2t}{(t^2 + 100)^4}$$

$$f''(t) = \frac{(t^2 + 100) \cdot [-150t(t^2 + 100) - 4t(-75t^2 + 7500)]}{(t^2 + 100)^4}$$

$$f''(t) = \frac{-150t^3 - 15000t + 300t^3 - 30000t}{(t^2 + 100)^3} = \frac{150t^3 - 45000t}{(t^2 + 100)^3}$$

COMO

$$f'(10) = 0$$

$$f''(10) = \frac{150 \cdot 10^3 - 45000 \cdot 10}{(10^2 + 100)^3} = \frac{150000 - 450000}{(100 + 100)^3} < 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{EN} \\ x=10 \\ \text{MÁX.} \\ \text{REL.} \end{array} \right\}$$

¿VALOR DA FUNCIÓN NOS EXTREMOS DA FUNC. E NO MÁX. REL.?

$$f(0) = 0$$

$$f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{75t}{t^2 + 100} = 0$$

$$f(10) = \frac{75 \cdot 10}{10^2 + 100} = \frac{750}{200} = 3.75 \text{ centos de milleiros euros} = 375000 \text{ €}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{EN} \\ x=10 \\ \text{MÁX. ABSOL.} \\ \text{Aos 10 anos} \\ \text{prodúcese o} \\ B_{\text{MÁX}} = 375000 \end{array} \right\}$

9

$\swarrow$ GANANCIAS $\swarrow$ VENTAS $\swarrow$ COSTES
 $G(x) = x \cdot \underbrace{P(x)}_{\text{PRECIO 1 kg}} - C(x)$

$x \rightarrow \text{kg.}$

$$G(x) = x \cdot P(x) - C(x) = x \cdot \left(20 - \frac{6x^2}{800} \right) - (10 + 2x)$$

$$G(x) = 20x - \frac{6x^3}{800} - 10 - 2x$$

$$\left| G(x) = -\frac{6x^3}{800} + 18x - 10 \right| \quad \text{CALCULAR MÁX. ABSOLUTO}$$

$x > 0$

¿EXTREMOS RELATIVOS?

$$G'(x) = -\frac{18x^2}{800} + 18$$

$$G'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{18x^2}{800} + 18 = 0 \Rightarrow \frac{18x^2}{800} = 18 \Rightarrow x^2 = \frac{18 \cdot 800}{18} = 800$$

$$x = \pm \sqrt{800} = \pm 20\sqrt{2}$$

$$G''(x) = -\frac{36x}{800}$$

$$x = -20\sqrt{2} \quad \text{NO es válida}$$

$x > 0$

COMO $G'(20\sqrt{2}) = 0$

$$G''(20\sqrt{2}) = -\frac{36 \cdot 20\sqrt{2}}{800} < 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{TEOREMA} \\ \Rightarrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{¿ } x = 20\sqrt{2} \text{ MÁX. REL. ?} \\ x = 20\sqrt{2} \text{ MÁX. RELAT.} \end{array}$$

¿VALOR DE LA FUNCIÓN EN LOS EXTREMOS DEL DOMINIO Y EN EL MÁX. RELAT.?

$$G(0) = -10$$

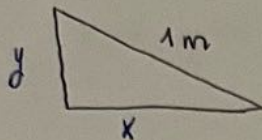
$$G(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{6x^3}{800} + 18x - 10 \right) = -\infty$$

$$G(20\sqrt{2}) = -\frac{6 \cdot (20\sqrt{2})^3}{800} + 18 \cdot 20\sqrt{2} - 10 = -\frac{6 \cdot 8000 \cdot 2\sqrt{2}}{800} + 360\sqrt{2} - 10$$

$$= -120\sqrt{2} + 360\sqrt{2} - 10 = 240\sqrt{2} - 10 \approx 329'41 \text{ €}$$

En $x = 20\sqrt{2}$ MÁX. ABSOLUTO. Interesa producir $20\sqrt{2} \approx 28 \text{ kg}$ salchichas para maximizar ganancias. El precio del kg de salchicha es $P(20\sqrt{2}) = 20 - \frac{6 \cdot (20\sqrt{2})^2}{800} = 20 - \frac{4800}{800} = 14 \text{ €}$ y la ganancia máxima es $329'41 \text{ €}$

(10)



Temas que calcular os valores x, y que fan máxima a área do triângulo, é dicir, $A(x, y) = \frac{x \cdot y}{2}$ sabendo que $x^2 + y^2 = 1^2$ (por ser triângulo rectângulo) $x, y > 0$

$$A(x, y) = \frac{x \cdot y}{2} \quad \begin{array}{l} \text{como } x^2 + y^2 = 1 \\ y = \sqrt{1 - x^2} \end{array} \quad A(x) = \frac{x \cdot \sqrt{1 - x^2}}{2} = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{1 - x^2} \quad 0 < x < 1$$

¿ EXTREMOS RELATIVOS?

$$A'(x) = \left(\frac{1}{2} x \right)' \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} x \cdot (\sqrt{1 - x^2})' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - x^2 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \right) = \frac{-2x^2 + 1}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 + 1}{2\sqrt{1 - x^2}} = 0 \Rightarrow -2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ NON VÁLIDA } x > 0 \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ MÁX. RELATIVO?}$$

$$A''(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{-4x \cdot \sqrt{1 - x^2} - (1 - 2x^2) \cdot \frac{(-x)}{\sqrt{1 - x^2}}}{(\sqrt{1 - x^2})^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-4x \cdot \sqrt{1 - x^2} + \frac{x - 2x^3}{\sqrt{1 - x^2}}}{1 - x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{-4x(1 - x^2) + (x - 2x^3)}{\sqrt{1 - x^2}}}{\frac{1 - x^2}{1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-4x + 4x^3 + x - 2x^3}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x^3 - 3x}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{COMO } A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$A''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{4\sqrt{2}}{8} - 3\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}} < 0$$

TEOREMA
⇒ EN
 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ MÁX.
RELATIVO

¿ VALOR FUNCIÓN NOS EXTREMOS DO DOMINIO E NO MÁX. REL?

$$0 < x < 1 \quad A(0) = 0$$

$$A(1) = 0$$

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{2}{4}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \text{ m}$$

EN $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ HAI MÁX. ABSOLUTO. $y = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Os catetos miden $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m e a área MÁXIMA é $\frac{1}{4} \text{ m}^2 = 0.25 \text{ m}^2$

(11)

$$x > 0; y > 0; z > 0$$

$$x + y + z = 60$$

$$x + 2y + 3z = 120$$

d) x, y, z t.q. $P(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$ seja máximo?

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ x + 2y + 3z = 120 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & 2 & 3 & 120 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{E_1 - E_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 1 & 2 & 60 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ y + 2z = 60 \end{cases}$$

$$\underline{E_2} \quad y = 60 - 2z$$

$$* \quad \underline{E_1} \quad x = 60 - y - z = 60 - (60 - 2z) - z$$

$$\underline{x = 60 - 60 + 2z - z = z}$$

Temos que buscar para que valores de $x, y, z > 0$ o produto é máximo.

$$P(x, y, z) = x \cdot y \cdot z \xrightarrow[\substack{\text{COMO } x+y+z=60 \text{ e } x+2y+3z=120 * \\ x=z \quad y=60-2z \quad z=z}]{\quad} P(z) = z \cdot (60 - 2z) \cdot z$$

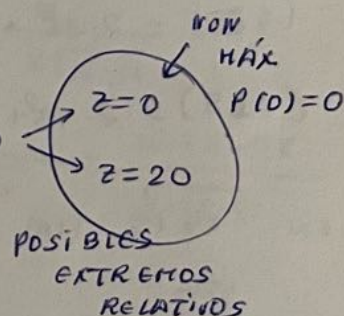
$$\boxed{P(z) = 60z^2 - 2z^3} \quad \leftarrow \text{BUSCAR MÁX. ABSOLUTO}$$

$$z > 0 \text{ e } z < 30 *$$

EXT. RELATIVOS?

$$P'(z) = 120z - 6z^2$$

$$P'(z) = 0 \Rightarrow 120z - 6z^2 = 0 \Rightarrow z(120 - 6z) = 0$$



$$P''(z) = 120 - 12z$$

$$\text{COMO } P'(20) = 0$$

$$P''(20) = 120 - 12 \cdot 20 < 0$$

TEOREMA $\Rightarrow$ EN $z=20$ MÁX. RELATIVO

d) VALOR DA FUNÇÃO NOS EXTREMOS DO DOMÍNIO E NO MÁX. RELATIVO?

$$P(0) = 0$$

$$0 < z < 30 *$$

$$P(30) = 60 \cdot 30^2 - 2 \cdot 30^3 = 60 \cdot 900 - 2 \cdot 27000 = 54000 - 54000 = 0$$

pq. se
non, como
 $y = 60 - 2z$
se $z > 30$

$$P(20) = 60 \cdot 20^2 - 2 \cdot 20^3 = 8000$$

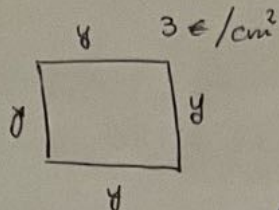
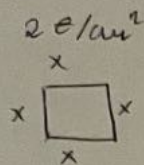
$$y < 0$$

$$x, y, z > 0$$

EN $z=20$ HAI MÁX. ABSOLUTO. Os nos

positivos son $x=z=20$ $y = 60 - 2 \cdot 20 = 20$, e' dizer,
os tres nos son 20 para que o produto seja 20.20.20
máximo (tendo en conta $x+y+z=60$ e $x+2y+3z=120$) $P_{\text{MÁX}} = 8000$.

(12)



A soma dos perímetros
HA DE SER 1 m = 100 cm

¿COSTE TOTAL MÍNIMO? COMO

$$4x + 4y = 100$$

$$x + y = 25$$

$$y = 25 - x$$

$$C(x, y) = 2x^2 + 3y^2$$

$$C(x) = 2x^2 + 3(25 - x)^2$$

$$0 < x < 25$$

↓ Também podemos
fazer operação
e deriva
depois

$$C(x) = 5x^2 - 150x + 1875$$

¿EXTREMOS RELATIVOS?

$$C'(x) = 4x + 6(25 - x) \cdot (-1) = 4x - 6(25 - x) = 4x + 6x - 150$$

$$C'(x) = 10x - 150$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 150 = 0 \Rightarrow x = 15 \text{ POSSÍVEL EXT. RELATIVO}$$

$$C''(x) = 10$$

$$\text{COMO } C'(15) = 0$$

$$C''(15) = 10 > 0$$

TEOREMA

⇒ EN $x = 15$ MÍNIMO RELATIVO

¿VALOR DA FUNÇÃO NOS EXTREMOS DO DOMÍNIO E NO MÍN. RELATIVO?

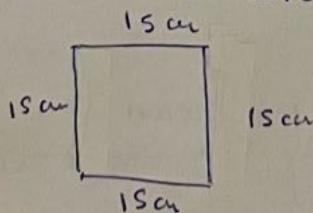
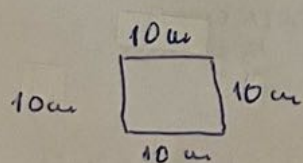
$$0 < x < 25$$

$$C(0) = 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot (25 - 0)^2 = 1875$$

$$C(25) = 2 \cdot 25^2 + 3 \cdot (25 - 25)^2 = 1250$$

$$C(15) = 2 \cdot 15^2 + 3 \cdot (25 - 15)^2 = 2 \cdot 225 + 3 \cdot 100 = 750$$

EN $x = 15$ HAÍ MÍN. ABSOLUTO.



$$y = 25 - x = 25 - 15 = 10$$

10 de 3 €/m²)

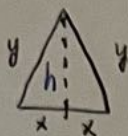
Os lados dos quadrados devem ser de 10 cm e de 15 cm (o de 2 €/cm²). O custo mínimo será

$$\text{de } C(15) = 750 \text{ €}$$

1)

$$2 \cdot 15^2 + 3 \cdot 10^2 = 2 \cdot 225 + 3 \cdot 100 = 750 \text{ €}$$

(13)



PERÍMETRO = 8

¿ÁREA MÁXIMA?

Temos que buscar o valor de x e y que façam máxima a área sabendo que o perímetro é 8 e o triângulo é isósceles.

como $x^2 + h^2 = y^2$ (h divide o triâng. isósceles em 2 triâng. rectáng.)
 $h = \sqrt{y^2 - x^2}$
 T. PÍTAGORAS

$$A(x, h) = \frac{2x \cdot h}{2}$$

$$\Rightarrow A(x, y) = \frac{2x \sqrt{y^2 - x^2}}{2}$$

$$A(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{(4-x)^2 - x^2}}{2} = x \cdot \sqrt{16 - 8x}$$

COMO PERÍMETRO 8
 $2x + 2y = 8$
 $x + y = 4$
 $y = 4 - x$

$$A(x) = x \cdot \sqrt{16 - 8x}$$

$$0 < x < 2$$

← BUSCAR MÁX. ABSOLUTO

¿EXTREMOS RELATIVOS?

$$A'(x) = (x)' \sqrt{16 - 8x} + x \cdot (\sqrt{16 - 8x})' = \sqrt{16 - 8x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{16 - 8x}} \cdot (-8)$$

$$A'(x) = \sqrt{16 - 8x} - \frac{8x}{2\sqrt{16 - 8x}} = \sqrt{16 - 8x} - \frac{4x}{\sqrt{16 - 8x}} = \frac{16 - 8x - 4x}{\sqrt{16 - 8x}}$$

$$A'(x) = \frac{16 - 12x}{\sqrt{16 - 8x}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 16 - 12x = 0 \Rightarrow x = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \quad \text{POSIBLE EXT. RELATIVO}$$

$$A''(x) = \frac{-12 \cdot \sqrt{16 - 8x} - (16 - 12x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{16 - 8x}} \cdot (-8)}{(\sqrt{16 - 8x})^2} = \frac{-12(16 - 8x) + 4(16 - 12x)}{(16 - 8x)\sqrt{16 - 8x}}$$

$$A''(x) = \frac{-192 + 96x + 64 - 48x}{(16 - 8x)\sqrt{16 - 8x}} = \frac{48x - 128}{(16 - 8x)\sqrt{16 - 8x}}$$

$$\text{COMO } A'(\frac{4}{3}) = 0$$

$$A''(\frac{4}{3}) = \frac{48 \cdot \frac{4}{3} - 128}{(16 - 8 \cdot \frac{4}{3})\sqrt{16 - 8 \cdot \frac{4}{3}}} = \frac{64 - 128}{\frac{16}{3}\sqrt{\frac{16}{3}}} < 0$$

EN $x = \frac{4}{3}$ MÁX. RELAT.

TRIÁNGULO EQUILÁTERO
 DE LADO $\frac{8}{3}$ u.

¿VALOR NOS EXT. DO DOMÍNIO E NO MÁX. REL.? $0 < x < 2$ EN $x = \frac{4}{3}$ MÁX. ABSOLUTO

$$h = \sqrt{(\frac{8}{3})^2 - (\frac{4}{3})^2} = \sqrt{\frac{48}{9}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{BASE} = 2x = \frac{8}{3} \text{ u}$$

$$y = 4 - x = \frac{8}{3} \text{ u}$$

$$\text{ALTURA} = h = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ u}$$

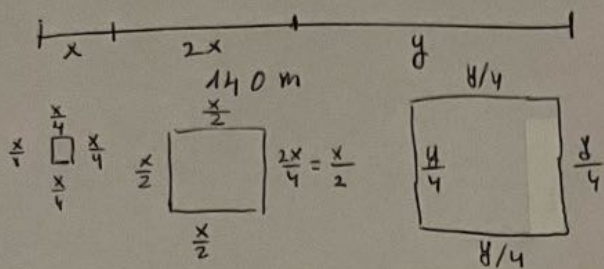
$$A_{\text{MÁX.}} = \frac{16\sqrt{3}}{9} \text{ u}^2$$

$$A(0) = 0$$

$$A(4) = 0$$

$$A(\frac{4}{3}) = \frac{\frac{8}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{32\sqrt{3}}{18} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

(14)



Também poderíamos fazer as operações e derivar

$$A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{4} + \frac{19600 + 9x^2 - 840x}{16}$$

$$A(x) = \frac{x^2 + 4x^2 + 19600 + 9x^2 - 840x}{16}$$

$$A(x) = \frac{14x^2 - 840x + 19600}{16}$$

$A(x, y)$ mínima x, y ?

como $x + 2x + y = 140$
 $y = 140 - 3x$

$$A(x, y) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 \xrightarrow{y=140-3x} A(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{140-3x}{4}\right)^2$$

$$0 < x < \frac{140}{3}$$

Temos que buscar $0 < x < \frac{140}{3}$ que faz que a função

$$A(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{140-3x}{4}\right)^2$$

seja mínima.

EXTREMOS RELATIVOS?

$$A'(x) = 2 \cdot \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{140-3x}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$A'(x) = \frac{28x - 840}{16}$$

$$A'(x) = \frac{2x}{16} + \frac{x}{2} - \frac{3 \cdot (140 - 3x)}{8} = \frac{x}{8} + \frac{x}{2} - \frac{3 \cdot (140 - 3x)}{8}$$

$$A'(x) = \frac{14x - 420}{8}$$

$$A'(x) = \frac{x + 4x - 420 + 9x}{8} = \frac{14x - 420}{8} = \frac{7x - 210}{4}$$

$$A'(x) = \frac{7x - 210}{4}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{7x - 210}{4} = 0 \Rightarrow 7x - 210 = 0 \Rightarrow 7x = 210 \Rightarrow x = 30$$

POSSÍVEL
EXTREMO RELAT.

$$A''(x) = \frac{7}{8}$$

COMO

$$A'(30) = 0$$

$$A''(30) > 0$$

TEOREMA

⇒ EN

$$x = 30$$

MAI

MÍN. RELATIVO

VALOR DA FUNÇÃO NOS EXTREMOS DO DOMÍNIO E NO MÍN. RELATIVO?

$$A(0) = \left(\frac{0}{4}\right)^2 + \left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(\frac{140}{4}\right)^2 = 35^2 = 1225$$

$$0 < x < \frac{140}{3}$$

$$A\left(\frac{140}{3}\right) = \left(\frac{140/3}{4}\right)^2 + \left(\frac{140/3}{2}\right)^2 + 0^2 = \left(\frac{140}{12}\right)^2 + \left(\frac{140}{6}\right)^2 = \frac{6125}{9} \approx 680,5$$

$$A(30) = \left(\frac{30}{4}\right)^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 + \left(\frac{140-3 \cdot 30}{4}\right)^2 = 7,5^2 + 15^2 + 12,5^2 = 437,5$$

em $x = 30$ MÍN. ABSOLUTO. A longitude de cada troço para que a área seja mínima tem que ser

$$x = 30 \text{ m}, 2x = 60 \text{ m} \text{ e } 140 - 3x = 50 \text{ m}$$

A área mínima é $437,5 \text{ m}^2$.

