

SOLUCIÓN
2ª TAREFA DE REPRESENTACIÓN DE FUNCIÓN RACIONAL

Exercicio nº1.-

Calcula dominio, cortes cos eixos ,simetrías ,asíntotas ou ramas ,monotonía ,extremos relativos ,curvatura, puntos de inflexión e representa a seguinte función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 16}$$

SOLUCIÓN:

1º.- DOMINIO: $\mathbb{R} - \{4, -4\}$

2º.- CORTES:

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0}{-16} = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2 - 16} = 0 \Rightarrow x = 0$$

CORTE : (0,0)

3º.- SIMETRÍAS:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 16} = \frac{-x}{x^2 - 16} \neq f(x) \Rightarrow f(x) \text{ NON simétrica respecto ao eixo Y}$$

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 16} = \frac{-x}{x^2 - 16} = -f(x) \Rightarrow f(x) \text{ SIMÉTRICA RESPECTO AO (0,0)}$$

4º.- ASÍNTOTAS OU RAMAS:

ASÍNTOTAS VERTICAIS :

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x}{x^2 - 16} = \frac{-4}{0} = \pm\infty \Rightarrow x = -4 \text{ ASÍNTOTA VERTICAL}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x}{(x-4)(x+4)} = \frac{-}{- \cdot -} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x}{(x-4)(x+4)} = \frac{-}{- \cdot +} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x^2 - 16} = \frac{4}{0} = \pm\infty \Rightarrow x = 4 \text{ ASÍNTOTA VERTICAL}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{(x-4)(x+4)} = \frac{+}{- \cdot +} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x}{(x-4)(x+4)} = \frac{+}{+ \cdot +} = +\infty$$

ASÍNTOTAS HORIZONTAIS :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ASÍNTOTA HORIZONTAL}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 16} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 16} = 0^-$$

5º.- MONOTONÍA:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 16} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 16) - x \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2} = \frac{x^2 - 16 - 2x^2}{(x^2 - 16)^2} = \frac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = -16 \text{ A ECUACIÓN NON TEN SOLUCIÓN REAL}$$

NON HAI PUNTOS SINGULARES $\Rightarrow$ NON HAI EXTREMOS RELATIVOS

Para facer os intervalos temos en conta os puntos singulares (neste caso, non hai) e os puntos que non teñen imaxe (é dicir, os que non están no dominio, neste caso, $x = -4$ e $x = 4$).

INTERVALO	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -4)$	< 0 (pq $f'(-5) = \frac{-(-5)^2 - 16}{((-5)^2 - 16)^2} < 0$)	$f(x)$ decrece en $(-\infty, -4)$
$(-4, 4)$	< 0 (pq $f'(0) = \frac{-(0)^2 - 16}{((0)^2 - 16)^2} < 0$)	$f(x)$ decrece en $(-4, 4)$
$(4, \infty)$	< 0 (pq $f'(5) = \frac{-5^2 - 16}{(5^2 - 16)^2} < 0$)	$f(x)$ decrece en $(4, \infty)$

Xa non facía falta facer a táboa, porque vese ben que

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2} < 0 \forall x \in \mathbb{R} - \{4, -4\} \Rightarrow f(x) \text{ decrece en } \mathbb{R} - \{4, -4\}$$

6º.- EXTREMOS RELATIVOS:

NON HAI EXTREMOS RELATIVOS

7º.- CURVATURA:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 16} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2 - 16)^2 - (-x^2 - 16)2(x^2 - 16)2x}{(x^2 - 16)^4} = \frac{(x^2 - 16)[-2x(x^2 - 16) + 4x(x^2 + 16)]}{(x^2 - 16)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^3 + 32x + 4x^3 + 64x}{(x^2 - 16)^3} = \frac{2x^3 + 96x}{(x^2 - 16)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^3 + 96x}{(x^2 - 16)^3} = 0 \Rightarrow 2x^3 + 96x = 0 \Rightarrow 2x(x^2 + 48) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ POSIBLE PUNTO DE INFLEXIÓN} \\ x^2 + 48 = 0 \Rightarrow \text{Non solución real} \end{cases}$$

Para facer os intervalos temos en conta os puntos con derivada segunda cero (neste caso, $x=0$) e os puntos que non teñen imaxe (é dicir, os que non están no dominio, neste caso, $x=-4$ e $x=4$).

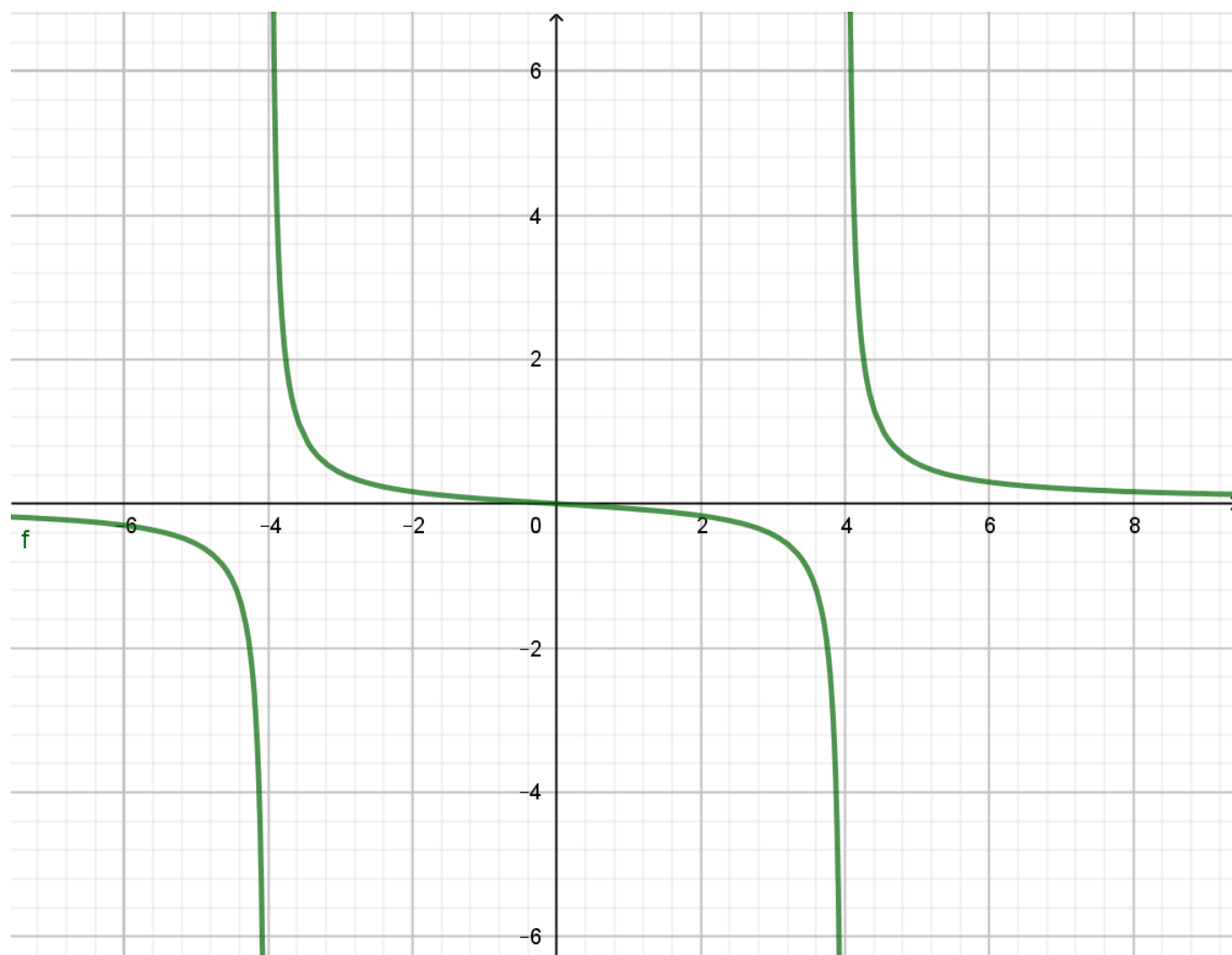
INTERVALO	$f''(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -4)$	< 0 (pq $f''(-5) = \frac{2(-5)^3 + 96 \cdot (-5)}{((-5)^2 - 16)^3} = \frac{-250 - 480}{9^3} < 0$)	$f(x)$ cóncava en $(-\infty, -4)$
$(-4, 0)$	> 0 (pq $f''(-1) = \frac{2(-1)^3 + 96 \cdot (-1)}{((-1)^2 - 16)^3} = \frac{-2 - 96}{(-15)^3} > 0$)	$f(x)$ convexa en $(-4, 0)$
$(0, 4)$	< 0 (pq $f''(1) = \frac{2 \cdot 1^3 + 96 \cdot 1}{(1^2 - 16)^3} = \frac{2 + 96}{(-15)^3} < 0$)	$f(x)$ cóncava en $(0, 4)$
$(4, \infty)$	> 0 (pq $f''(5) = \frac{2 \cdot 5^3 + 96 \cdot 5}{(5^2 - 16)^3} > 0$)	$f(x)$ convexa en $(4, \infty)$

8º.- PUNTOS DE INFLEXIÓN:

EN $x = 0$ HAI UN PUNTO DE INFLEXIÓN.

$(0, f(0)) = (0, 0)$ PUNTO DE INFLEXIÓN.

9º.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA:



Exercicio nº2.-

Calcula dominio, cortes cos eixos ,simetrías ,asíntotas ou ramas ,monotonía ,extremos relativos ,curvatura, puntos de inflexión e representa a seguinte función:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}$$

SOLUCIÓN:

1º.- DOMINIO: $\mathbb{R} - \{-2\}$

2º.- CORTES:

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x+2} = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$CORTES: \left(0, \frac{1}{2}\right); (1, 0)$$

3º.- SIMETRÍAS:

$$f(-x) = \frac{(-x-1)^2}{-x+2} = \frac{(x+1)^2}{-x+2} \neq f(x) \Rightarrow f(x) \text{ NON simétrica respecto ao eixo Y}$$

$$f(-x) = \frac{(-x-1)^2}{-x+2} = \frac{(x+1)^2}{-x+2} \neq -f(x) \Rightarrow f(x) \text{ NON simétrica respecto ao } (0, 0)$$

4º.- ASÍNTOTAS OU RAMAS:

ASÍNTOTAS VERTICAIS :

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \frac{9}{0} = \pm\infty \Rightarrow x = -2 \text{ ASÍNTOTA VERTICAL}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \frac{+}{-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \frac{+}{+} = +\infty$$

ASÍNTOTAS HORIZONTAIS :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \Rightarrow \text{NON HAI ASÍNTOTAS HORIZONTAIS}$$

ASÍNTOTAS OBLICUAS :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x-1)^2}{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x-1)^2}{x+2} : x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x-1)^2}{x^2 + 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = m \neq 0$$

(Hai A.O. e a súa pendente é 1)

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x-1)^2}{x+2} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{x} = -4$$

ASÍNTOTA OBLICUA: $y = x - 4$

Para saber situar a curva respecto da asíntota:

$$f(x) - A.O. = \frac{x^2 - 2x + 1}{x+2} - (x - 4) = \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 + 4x - 2x + 8}{x+1} = \frac{9}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{x+1} = 0^+ \Rightarrow f(x) > A.O. \text{ (Cando } x \rightarrow \infty, \text{ a función por arriba da A.O.)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9}{x+1} = 0^- \Rightarrow f(x) < A.O. \text{ (Cando } x \rightarrow -\infty, \text{ a función por debaixo da A.O.)}$$

5º.- MONOTONÍA:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-2)(x+2) - (x^2 - 2x + 1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - 2x - 4 - x^2 + 2x - 1}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases} \text{ PUNTOS SINGULARES}$$

(POSIBLES EXTREMOS RELATIVOS)

Para facer os intervalos temos en conta os puntos singulares ($x = -5$ e $x = 1$) e os puntos que non teñen imaxe (é dicir, os que non están no dominio, neste caso, $x = -2$).

INTERVALO	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -5)$	> 0 (pq $f'(-6) = \frac{(-6)^2 + 4(-6) - 5}{(-6+2)^2} = \frac{36 - 24 - 5}{16} > 0$)	$f(x)$ crece en $(-\infty, -5)$
$(-5, -2)$	< 0 (pq $f'(-3) = \frac{(-3)^2 + 4(-3) - 5}{(-3+2)^2} < 0$)	$f(x)$ decrece en $(-5, -2)$
$(-2, 1)$	< 0 (pq $f'(-1) = \frac{(-1)^2 + 4(-1) - 5}{(-1+2)^2} < 0$)	$f(x)$ decrece en $(-2, 1)$
$(1, \infty)$	> 0 (pq $f'(3) = \frac{3^2 + 4 \cdot 3 - 5}{(3+2)^2} = \frac{9 + 12 - 5}{25} > 0$)	$f(x)$ crece en $(1, \infty)$

6º.- EXTREMOS RELATIVOS:

$$(-5, f(-5)) = (-5, -12) \text{ MÁXIMO RELATIVO}$$

$$(1, f(1)) = (1, 0) \text{ MÍNIMO RELATIVO}$$

7º.- CURVATURA:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - (x^2 + 4x - 5) \cdot 2 \cdot (x+2) \cdot 1}{((x+2)^2)^2} = \frac{(x+2) \cdot [(2x+4)(x+2) - 2 \cdot (x^2 + 4x - 5)]}{(x+2)^4} =$$

$$= \frac{2x^2 + 4x + 4x + 8 - 2x^2 - 8x + 10}{(x+2)^3} = \frac{18}{(x+2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{18}{(x+2)^3} = 0 \quad \text{A ecuación non ten solución real. } \frac{18}{(x+2)^3} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(NON HAI PUNTOS DE INFLEXIÓN)

Para facer os intervalos temos en conta os puntos con derivada segunda cero (neste caso, non hai) e os puntos que non teñen imaxe (é dicir, os que non están no dominio, neste caso, $x=-2$).

INTERVALO	$f''(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -2)$	< 0 (pq $f''(-3) = \frac{18}{(-3+2)^3} = \frac{18}{-1} < 0$)	$f(x)$ cóncava en $(-\infty, -2)$
$(-2, \infty)$	> 0 (pq $f''(0) = \frac{18}{(0+2)^3} > 0$)	$f(x)$ convexa en $(-2, \infty)$

8º.- PUNTOS DE INFLEXIÓN:

NON HAI PUNTOS DE INFLEXIÓN

9º.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA:

