

EXEMPLO
REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES I

Exercicio nº1.-

Calcula dominio, cortes cos eixos ,simetrías ,asíntotas ou ramas ,monotonía ,extremos relativos ,curvatura, puntos de inflexión e representa a seguinte función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$$

SOLUCIÓN:

1º.- DOMINIO: $\mathbb{R} - \{-1\}$

2º.- CORTES:

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0}{1} = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 3x}{x + 1} = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

CORTES : $(0,0); (-3,0)$

3º.- SIMETRÍAS:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 3(-x)}{-x + 1} = \frac{x^2 - 3x}{-x + 1} \neq f(x) \Rightarrow f(x) \text{ NON simétrica respecto ao eixo Y}$$

$$f(-x) = \frac{x^2 - 3x}{-x + 1} \neq -f(x) \Rightarrow f(x) \text{ NON simétrica respecto ao } (0,0)$$

4º.- ASÍNTOTAS OU RAMAS:

ASÍNTOTAS VERTICAIS :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x}{x + 1} = \frac{-2}{0} = \pm\infty \Rightarrow x = -1 \text{ ASÍNTOTA VERTICAL}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 3x}{x + 1} = \frac{-}{-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x}{x + 1} = \frac{-}{+} = -\infty$$

ASÍNTOTAS HORIZONTAIS :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \Rightarrow \text{NON HAI ASÍNTOTAS HORIZONTAIS}$$

ASÍNTOTAS OBLICUAS :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 3x}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x+1} : x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x^2 + x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = m \neq 0$$

(Hai A.O. e a súa pendente é 1)

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x+1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x - x^2 - x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

ASÍNTOTA OBLICUA: $y = x + 2$

Para saber situar a curva respecto da asíntota :

$$f(x) - A.O. = \frac{x^2 + 3x}{x+1} - (x + 2) = \frac{x^2 + 3x - x^2 - 2x - x - 2}{x+1} = \frac{-2}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{x+1} = 0^- \Rightarrow f(x) < A.O. \text{ (Cando } x \rightarrow \infty, \text{ a función por debaixo da A.O.)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x+1} = 0^+ \Rightarrow f(x) > A.O. \text{ (Cando } x \rightarrow -\infty, \text{ a función por arriba da A.O.)}$$

5º.- MONOTONÍA:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+3)(x+1) - (x^2 + 3x) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0 \text{ A ecuación non ten solución real. } x^2 + 2x + 3 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

NON HAI PUNTOS SINGULARES (NON HAI MÁXIMOS NIN MÍNIMOS RELATIVOS)

Para facer os intervalos temos en conta os puntos singulares (neste caso, non hai) e os puntos que non teñen imaxe (é dicir, os que non están no dominio, neste caso, $x = -1$).

INTERVALO	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -1)$	> 0 (pq $f'(-2) = \frac{3}{1} > 0$)	$f(x)$ crece en $(-\infty, -1)$
$(-1, \infty)$	> 0 (pq $f'(0) = \frac{3}{1} > 0$)	$f(x)$ crece en $(-1, \infty)$

6º.- EXTREMOS RELATIVOS:

NON HAI MÁXIMOS NIN MÍNIMOS RELATIVOS.

7º.- CURVATURA:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2 + 2x + 3) \cdot 2 \cdot (x+1) \cdot 1}{((x+1)^2)^2} = \frac{(x+1) \cdot [(2x+2)(x+1) - 2 \cdot (x^2 + 2x + 3)]}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2x^2 + 2x + 2x + 2 - 2x^2 - 4x - 6}{(x+1)^3} = \frac{-4}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4}{(x+1)^3} = 0 \quad \text{A ecuación non ten solución real. } \frac{-4}{(x+1)^3} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(NON HAI PUNTOS DE INFLEXIÓN)

Para facer os intervalos temos en conta os puntos con derivada segunda cero (neste caso, non hai) e os puntos que non teñen imaxe (é dicir, os que non están no dominio, neste caso, $x=-1$).

INTERVALO	$f''(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -1)$	> 0 (pq $f''(-2) = \frac{-4}{(-2+1)^3} = \frac{-4}{-1} = 4 > 0$)	$f(x)$ convexa en $(-\infty, -1)$
$(-1, \infty)$	< 0 (pq $f''(0) = \frac{-4}{(0+1)^3} = -4 < 0$)	$f(x)$ cóncava en $(-1, \infty)$

8º.- PUNTOS DE INFLEXIÓN:

NON HAI PUNTOS DE INFLEXIÓN

9º.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA:

