

SOLUCIÓN

1ª TAREFA DE REPRESENTACIÓN DE FUNCIÓN RACIONAL

Exercicio nº1.-

Calcula dominio, cortes cos eixos ,simetrías ,asíntotas ou ramas ,monotonía ,extremos relativos ,curvatura, puntos de inflexión e representa a seguinte función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$$

SOLUCIÓN:

1º.- DOMINIO: $\mathbb{R} - \{-1\}$

2º.- CORTES:

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0}{1} = 11$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1} = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 11 = 0 \text{ NON TEN SOLUCIÓN REAL (non corta ao eixo X)}$$

CORTES : (0,11)

3º.- SIMETRÍAS:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 3(-x) + 11}{-x + 1} = \frac{x^2 - 3x + 11}{-x + 1} \neq f(x) \Rightarrow f(x) \text{ NON simétrica respecto ao eixo Y}$$

$$f(-x) = \frac{x^2 - 3x + 11}{-x + 1} \neq -f(x) \Rightarrow f(x) \text{ NON simétrica respecto ao (0,0)}$$

4º.- ASÍNTOTAS OU RAMAS:

ASÍNTOTAS VERTICAIS :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1} = \frac{9}{0} = \pm\infty \Rightarrow x = -1 \text{ ASÍNTOTA VERTICAL}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 3x}{x + 1} = \frac{+}{-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x}{x + 1} = \frac{+}{+} = +\infty$$

ASÍNTOTAS HORIZONTAIS :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \Rightarrow \text{NON HAI ASÍNTOTAS HORIZONTAIS}$$

ASÍNTOTAS OBLICUAS :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 3x + 11}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 11}{x+1} : x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 11}{x^2 + x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = m \neq 0$$

(Hai A.O. e a súa pendente é 1)

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 11}{x+1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 11 - x^2 - x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

ASÍNTOTA OBLICUA: $y = x + 2$

Para saber situar a curva respecto da asíntota :

$$f(x) - A.O. = \frac{x^2 + 3x + 11}{x+1} - (x+2) = \frac{x^2 + 3x + 11 - x^2 - 2x - x - 2}{x+1} = \frac{9}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{x+1} = 0^+ \Rightarrow f(x) > A.O. \text{ (Cando } x \rightarrow \infty, \text{ a función por arriba da A.O.)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9}{x+1} = 0^- \Rightarrow f(x) < A.O. \text{ (Cando } x \rightarrow -\infty, \text{ a función por debaixo da A.O.)}$$

5º.- MONOTONÍA:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 11}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+3)(x+1) - (x^2 + 3x + 11) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x - 11}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases} \text{ PUNTOS SINGULARES}$$

(POSIBLES EXTREMOS RELATIVOS)

Para facer os intervalos temos en conta os puntos singulares e os puntos que non teñen imaxe (é dicir, os que non están no dominio, neste caso, $x=-1$).

INTERVALO	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -4)$	> 0 (pq $f'(-5) = \frac{(-5)^2 + 2(-5) - 8}{(-5+1)^2} = \frac{25-10-8}{16} > 0$)	$f(x)$ crece en $(-\infty, -4)$
$(-4, -1)$	< 0 (pq $f'(-2) = \frac{(-2)^2 + 2(-2) - 8}{(-2+1)^2} < 0$)	$f(x)$ decrece en $(-4, -1)$
$(-1, 2)$	< 0 (pq $f'(0) = \frac{0^2 + 2 \cdot 0 - 8}{(0+1)^2} < 0$)	$f(x)$ decrece en $(-1, 2)$
$(2, \infty)$	> 0 (pq $f'(3) = \frac{3^2 + 2 \cdot 3 - 8}{(3+1)^2} = \frac{9+6-8}{16} > 0$)	$f(x)$ crece en $(2, \infty)$

6º.- EXTREMOS RELATIVOS:

En $x = -4$ hai máximo relativo. $(-4, f(-4)) = (-4, -5)$ MÁXIMO RELATIVO

En $x = -1$ NON HAI EXTREMO RELATIVO

(Fixate na táboa!!! $f(x)$ decrece en $(-4, -1)$ e $f(x)$ decrece en $(-1, 2)$)

En $x = 2$ hai mínimo relativo. $(2, f(2)) = (2, 7)$ MÍNIMO RELATIVO

7º.- CURVATURA:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{(2x + 2)(x + 1)^2 - (x^2 + 2x - 8) \cdot 2 \cdot (x + 1) \cdot 1}{((x + 1)^2)^2} = \frac{(x + 1) \cdot [(2x + 2)(x + 1) - 2 \cdot (x^2 + 2x - 8)]}{(x + 1)^4} =$$

$$= \frac{2x^2 + 2x + 2x + 2 - 2x^2 - 4x + 16}{(x + 1)^3} = \frac{18}{(x + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{18}{(x + 1)^3} = 0 \quad \text{A ecuación non ten solución real. } \frac{18}{(x + 1)^3} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(NON HAI PUNTOS DE INFLEXIÓN)

Para facer os intervalos temos en conta os puntos con derivada segunda cero (neste caso, non hai) e os puntos que non teñen imaxe (é dicir, os que non están no dominio, neste caso, $x = -1$).

INTERVALO	$f''(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -1)$	< 0 (pq $f''(-2) = \frac{18}{(-2+1)^3} = \frac{18}{-1} < 0$)	$f(x)$ cóncava en $(-\infty, -1)$
$(-1, \infty)$	> 0 (pq $f''(0) = \frac{18}{(0+1)^3} = 18 > 0$)	$f(x)$ convexa en $(-1, \infty)$

8º.- PUNTOS DE INFLEXIÓN:

NON HAI PUNTOS DE INFLEXIÓN

9º.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA:

