

SOLUCIONES
REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES POLINÓMICAS I

Ejercicio nº1.-

Calcula dominio, cortes cos ejos ,simetrías ,ramas ,monotonía ,extremos relativos ,curvatura, puntos de inflexión e representa a seguinte función:

$$f(x) = -x^4 + 2x^2$$

SOLUCIÓN:

1º.- DOMINIO: $\mathbb{R}$

2º.- CORTES:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow -x^4 + 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(-x^2 + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$$CORTES : (0,0) ; (\sqrt{2},0); (-\sqrt{2},0)$$

3º.- SIMETRÍAS:

$$f(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 = -x^4 + 2x^2 = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ SIMÉTRICA RESPECTO AO EIXO Y}$$

$$f(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 = -x^4 + 2x^2 \neq -f(x) \Rightarrow f(x) \text{ NON simétrica respecto ao } (0,0)$$

4º.- RAMAS:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^4 = -\infty$$

5º.- MONOTONÍA:

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 4x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Rightarrow 4x(-x^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

$x = 0, x = -1$ e $x = 1$ PUNTOS SINGULARES (POSIBLES MÁXIMOS O MÍNIMOS RELATIVOS)

INTERVALO	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -1)$	> 0 (pq $f'(-2) = 32 - 8 > 0$)	$f(x)$ crece en $(-\infty, -1)$
$(-1, 0)$	< 0 (pq $f'(-0,5) = -4 \cdot (-0,5)^3 + 4 \cdot (-0,5) = 0,5 - 2 < 0$)	$f(x)$ decrece en $(-1, 0)$
$(0, 1)$	> 0 (pq $f'(0,5) = -4 \cdot (0,5)^3 + 4 \cdot (0,5) = -0,5 + 2 > 0$)	$f(x)$ crece en $(0, 1)$
$(1, \infty)$	< 0 (pq $f'(2) = -4 \cdot 8 + 4 \cdot 2 < 0$)	$f(x)$ decrece en $(1, \infty)$

6º.- EXTREMOS RELATIVOS:

En $x = -1$ hai máximo relativo. $(-1, f(-1)) = (-1, 1)$ MÁXIMO RELATIVO

En $x = 0$ hai mínimo relativo. $(0, f(0)) = (0, 0)$ MÍNIMO RELATIVO

En $x = 1$ hai máximo relativo. $(1, f(1)) = (1, 1)$ MÁXIMO RELATIVO

7º.- CURVATURA:

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 4x \Rightarrow f''(x) = -12x^2 + 4$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -12x^2 + 4 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{12}} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}, e x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (POSIBLES PUNTOS DE INFLEXIÓN)}$$

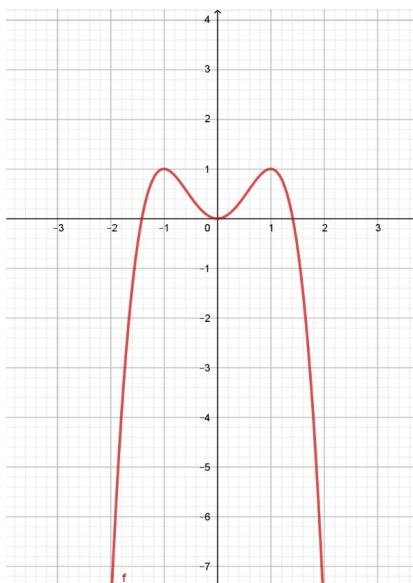
INTERVALO	$f''(x)$	$f(x)$
$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3} = -0,577...\right)$	< 0 (pq $f''(-1) = -12 + 4 < 0$)	$f(x)$ cóncava en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	> 0 (pq $f''(0) > 0$)	$f(x)$ convexa en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$	< 0 (pq $f''(1) = -12 + 4 < 0$)	$f(x)$ cóncava en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$

8º.- PUNTOS DE INFLEXIÓN:

$$\text{En } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ hai punto de inflexión. } \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{9}\right) \text{ PUNTO INFLEXIÓN}$$

$$\text{En } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ hai punto de inflexión. } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{9}\right) \text{ PUNTO INFLEXIÓN}$$

9º.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA:



Exercicio nº2.-

Calcula dominio, cortes cos eixos ,simetrías ,ramas ,monotonía ,extremos relativos ,curvatura, puntos de inflexión e representa a seguinte función:

$$f(x) = (x-2)^2 \cdot (x-1)$$

SOLUCIÓN:

1º.- DOMINIO: $\mathbb{R}$

2º.- CORTES:

$$x = 0 \Rightarrow y = (0-2)^2 \cdot (0-1) = -4$$

$$y = 0 \Rightarrow (x-2)^2 (x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$CORTES : (0, -4); (2, 0); (1, 0)$$

3º.- SIMETRÍAS:

$$f(-x) = (-x-2)^2 \cdot (-x-1) = -(x+2)^2 \cdot (x+1) \neq f(x) \Rightarrow f(x) \text{ NON simétrica respecto ao eixo Y}$$

$$f(-x) = (-x-2)^2 \cdot (-x-1) = -(x+2)^2 \cdot (x+1) \neq -f(x) \Rightarrow f(x) \text{ NON simétrica respecto ao } (0, 0)$$

4º.- RAMAS:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

5º.- MONOTONÍA:

$$f(x) = (x-2)^2 \cdot (x-1) \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot (x-2) \cdot 1 \cdot (x-1) + (x-2)^2 \cdot 1 = (x-2)[2(x-1) + (x-2)] = (x-2)(3x-4)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x-2)(3x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 3x-4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$x = 2 \text{ e } x = \frac{4}{3} \text{ PUNTOS SINGULARES (POSIBLES MÁXIMOS O MÍNIMOS RELATIVOS)}$$

INTERVALO	$f'(x)$	$f(x)$
$\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$	> 0 (pq $f'(0) = (0-2)(0-4) = 8 > 0$)	$f(x)$ crece en $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$
$\left(\frac{4}{3}, 2\right)$	< 0 (pq $f'(1,5) = (1,5-2)(3 \cdot 1,5-4) = -0,5 \cdot 0,5 < 0$)	$f(x)$ decrece en $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$
$(2, \infty)$	> 0 (pq $f'(3) = (3-2)(3 \cdot 3-4) = 1 \cdot 5 > 0$)	$f(x)$ crece en $(2, \infty)$

6º.- EXTREMOS RELATIVOS:

En $x = \frac{4}{3}$ hai máximo relativo. $\left(\frac{4}{3}, f\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{27}\right)$ MÁXIMO RELATIVO

En $x = 2$ hai mínimo relativo. $(2, f(2)) = (2, 0)$ MÍNIMO RELATIVO

7º.- CURVATURA:

$$f(x) = (x-2)^2 \cdot (x-1) \Rightarrow f'(x) = (x-2)(3x-4) \Rightarrow f''(x) = 1 \cdot (3x-4) + (x-2) \cdot 3 = 6x-10$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x-10 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$x = \frac{5}{3} \text{ (POSIBLE PUNTOS DE INFLEXIÓN)}$$

INTERVALO	$f''(x)$	$f(x)$
$\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$	< 0 (pq $f''(0) = -10 < 0$)	$f(x)$ cóncava en $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$
$\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$	> 0 (pq $f''(2) = 12 - 10 > 0$)	$f(x)$ convexa en $\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$

8º.- PUNTOS DE INFLEXIÓN:

En $x = \frac{5}{3}$ hai punto de inflexión. $\left(\frac{5}{3}, f\left(\frac{5}{3}\right)\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{27}\right)$ PUNTO INFLEXIÓN.

9º.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA:

