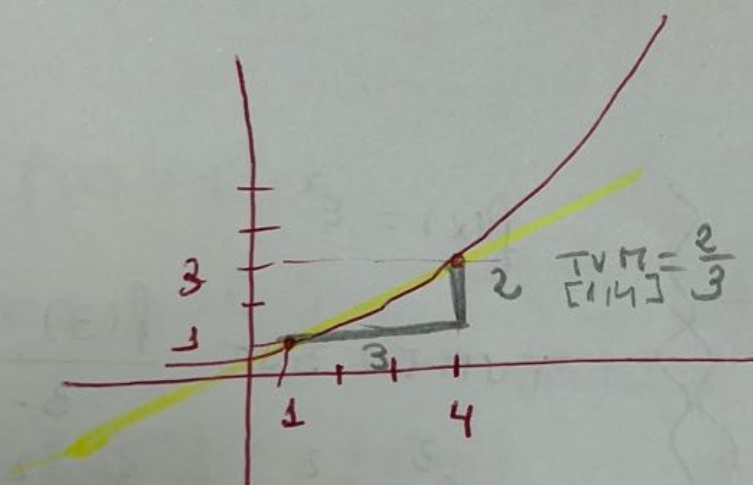


A TASA DE VARIACIÓN EN $[a, b]$
 T.V.M. $[a, b]$ mide o CRECIMENTO
 MEDIO DA FUNCIÓN POR CADA
 UNIDADE NO EIXO X NO
 INTERVALO $[a, b]$



$TVM [1, 4] = \text{PENDENTE}$
 RECTA UNE
 $(1, 1) \text{ e } (4, 3)$

$$f(1) = 1$$

$$f(4) = 3$$

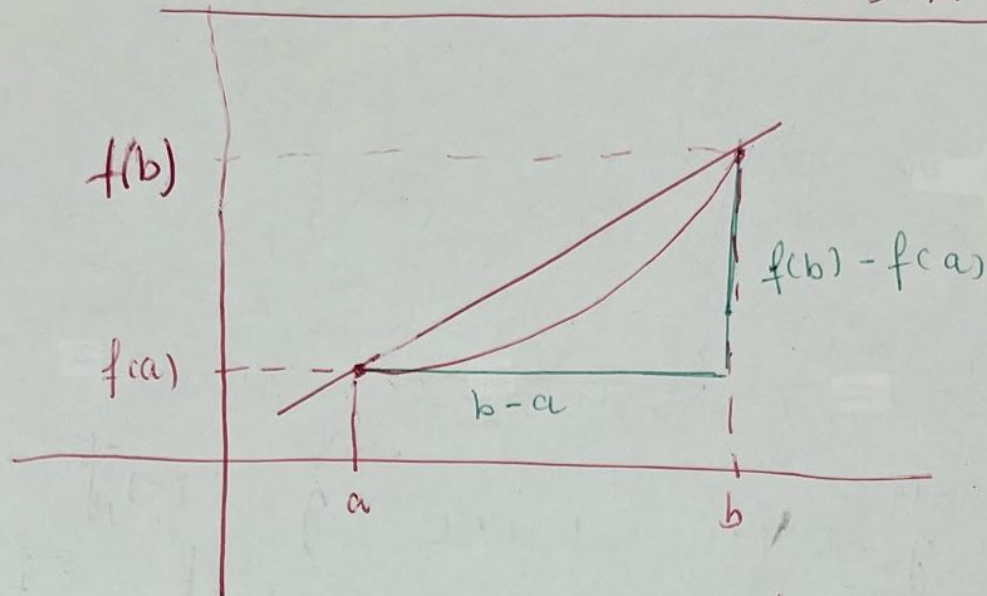
$TVM [1, 4]$

No intervalo $[1, 4]$ a
 função cresce 2 unid.
 no eixo Y mentres
 que no eixo X crece
 3 unidades.

CRECIMENTO MEDIO =
 $X \rightarrow$ En 3 unidades
 $Y \rightarrow Y$ cresce 2

$TVM [a, b]$ É A PENDENTE DA REC.
 QUE UNE $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

TASA VARIACIÓN MEDIA $E[a, b]$



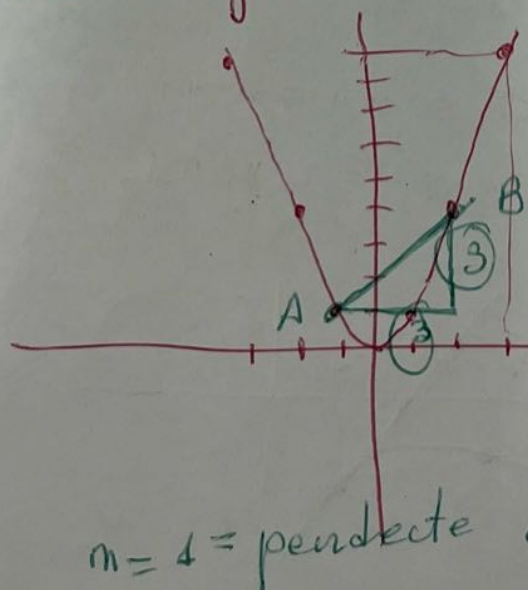
$$T.V.M. [a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

CRECIMENTO MEDIO DA FUNÇÃO EM $[a, b]$

PENDENTE DA RECTA QUE UNE $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

Ex.

$$y = x^2$$



$$T.V.M. [-1, 2] \quad ?$$

$$TVM [-1, 2] = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{4 - 1}{3} = 1$$

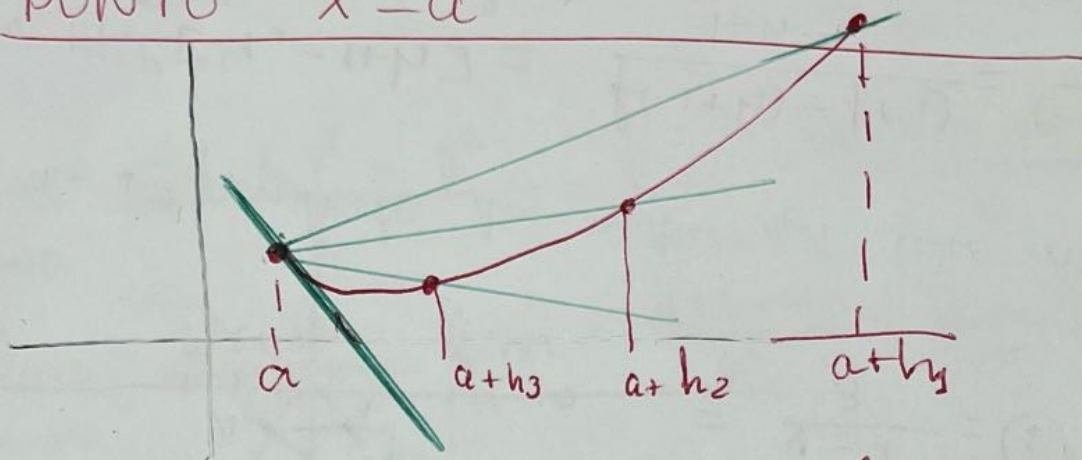
$m=4$ = pendente da recta que une A e B

$$T.V.M. [-1, -1+h] = \frac{f(-1+h) - f(-1)}{-1+h-1} = \frac{(-1+h)^2 - (-1)^2}{h}$$

$$= \frac{1+h^2-2h-1}{h} = \frac{h^2-2h}{h} = h-2 \Rightarrow TVM [-1, 2] = 3-2=1$$

$\nearrow$
 $h=3$

DERIVADA DA FUNÇÃO f NUM PUNTO $x=a$



$$\text{TVM } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

CRECIMENTO MÉDIO

$$\text{CRECIMENTO INSTANTÂNEO} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

II
PENDENTE DA RECTA TANGENTE EM $x=a$.

A este limite chamamos DERIVADA DA FUNÇÃO f em $x=a$ e escrevemos

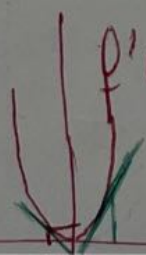
$$\boxed{f'(a)}$$

Ex. $f(x) = x^2$

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \text{TVM } [-1, -1+h] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^2 - (-1)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h^2-2h-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2-2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h-2)$$

$$= \boxed{-2}$$



$$f'(-1) = -2$$

← Ademais -2 é a
pendente da recta tangente a $f(x)$
 $x=-1$

$$\begin{aligned}
 f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \text{T.V.M. } [2, 2+h] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{4} + h^2 + 4h - \cancel{4}}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+4) = 4
 \end{aligned}$$

$f'(2) = (4)$ ← pendente da recta tangente a $f(x)$ em $x=2$.

¿E se o fazemos para um valor genérico x ? Assim despois só teremos que substituir x pelo valor que se quer e xa está...

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \text{T.V.M. } [x, x+h] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - x^2}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(h+2x)}{\cancel{h}} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (h+2x) = 2x
 \end{aligned}$$

Agora se queremos $\overset{x=-1}{f'(-1)} = 2 \cdot (-1) = -2$
 $\overset{x=2}{f'(2)} = 2 \cdot 2 = 4$

Exemplo

$$f(x) = 2x^2 + x$$

$$f'(1) ; f'(5) ; f'(-2) \dots$$

i.e. se fazemos $f'(x)$ para um x genérico
e logo para $f'(1)$ substituímos x por 1
para $f'(5)$ substituímos x por 5 e así...?

$$\underline{f'(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \stackrel{f(x) = 2x^2 + x}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(x+h)^2 + (x+h)] - [2x^2 + x]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2x^2 + 2h^2 + 4xh + x + h] - [2x^2 + x]}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{2x^2} + 2h^2 + 4xh + \cancel{x} + h - \cancel{2x^2} - \cancel{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 4xh + h}{h} \quad \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(2h + 4x + 1)}{\cancel{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 4x + 1) =$$

$$= 2 \cdot 0 + 4x + 1 = \underline{4x + 1}$$

$$f'(x) = 4x + 1 \quad \text{Entón}$$

$$f'(x) = 4x + 1 \quad \downarrow$$
$$f'(1) = 4 \cdot 1 + 1 = 5$$

$$f'(5) = 4 \cdot 5 + 1 = 21$$

$$f'(-2) = 4 \cdot (-2) + 1 = -7$$