

TAREFA MATEMÁTICAS I.

TEMA 5: LÍMITES E CONTINUIDADE.

Nome: _____ Grupo: _____

Exercicio nº 1.-

Calcula as ramas infinitas das seguintes funcións e, de ter asíntotas, calcula as súas ecuacións e sitúa a curva respecto a elas:

a) $g(x) = \frac{6x^2 + 5x - 2}{2x^2}$

A.V. 0'5 + 0'25 DE BUXO: 0'5

A.H. 0'5 + 0'25

Exercicio nº 2.-

Dada a función :

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{se } x < -3 \\ -x^2 + x + 2 & \text{se } -3 \leq x \leq 2 \\ \log_2(x-1) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

b) $h(x) = \frac{-x^4}{x^2 + 3}$

A.V. 0'5

A.H. A.O. RAMAS

0'5 DE BUXO 0'25

c) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2}$

(a) 2 ; b) 1 ; c) 2 puntos

A.V. 0'5 + 0'25

A.O. 0'5 + 0'25

DE BUXO 0'5

a) Estuda analiticamente a continuidade de f . Se hai descontinuidades, indica de que tipo e razona a resposta utilizando a definición de continuidade dunha función nun punto.

b) Representa graficamente a función f .

(a) 1 ; b) 1 punto

Exercicio nº 3.-

Dada a función $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$ ¿f ten algún punto de descontinuidade? En caso

afirmativo, que tipo de descontinuidade presenta en cada un? Xustifica as respostas.

0'5 DEB. 0'75 TIPO I
0'75 TIPO II

(2 puntos)

Exercicio nº 4.-

Calcula o valor de a e b para que a función $f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{se } x < 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ 2x - 5 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$ sexa continua en

todo $\mathbb{R}$. Razona a resposta.

(1 punto)

1. a) $g(x) = \frac{6x^2 + 5x - 2}{2x^2}$

A.V.

$$2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$x=0$ é A.V. pg. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 + 5x - 2}{2x^2} = \frac{-2}{0} = \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{6x^2 + 5x - 2}{2x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6x^2 + 5x - 2}{2x^2} = -\infty$$

RAMAS CAVADO $x \rightarrow \infty$

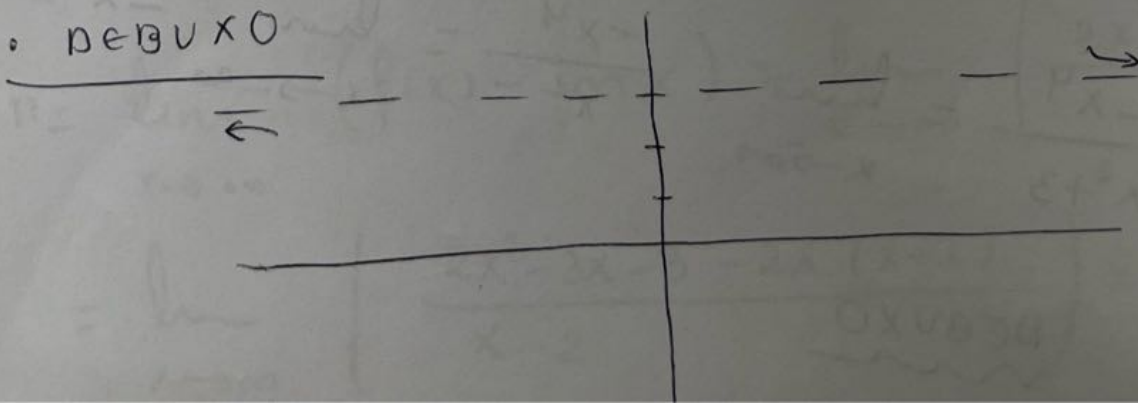
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x - 2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2}{2x^2} = 3 \Rightarrow \{y = 3 \text{ A.H.}\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x - 2}{2x^2} = 3^+$$

x	1000	-1000
+(x)	3'002...	2'99...

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 + 5x - 2}{2x^2} = 3^-$$

DEBUXO



$$b) \quad h(x) = \frac{-x^4}{x^2+3}$$

A.V.

$$x^2+3=0 \Rightarrow x^2=-3 \quad \text{IMPOSSIBLE!}$$

Não hai A.V. (Asíntotas verticais)

RAMAS INFINITAS $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 = -\infty \quad *$$

Não hai A.H. (Asíntota horizontal)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^4}{x^2+3} : x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^4}{x^3+3x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4}{x^3} = -\infty \end{aligned}$$

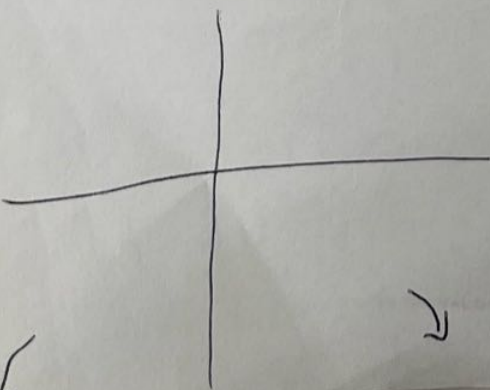
Não hai A.O. (Asíntota oblicua)

RAMAS PARABÓLICAS

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4}{x^2+3} = -\infty \quad *$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$$

DEBUXO



$$c) f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2}$$

A.V.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow \underline{x = 2}$$

$$\{x = 2 \text{ A.V.}\} \text{ pg. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2} = \frac{8 - 6 - 3}{0} = \frac{-1}{0} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2} = -\infty$$

RAMAS $x \rightarrow \pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = \infty$$

Non hai A.H.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2} : x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 3}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 = m$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2} - 2x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3x - 3 - 2x(x - 2)}{x - 2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 3 - 2x^2 + 4x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 3}{x - 2} = 1$$

$$\{y = 2x + 1 \text{ A.O.}\}$$

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 3x - 3 \quad | \quad x - 2 \\
 \underline{-2x^2 + 4x - 1} \\
 x - 3 \\
 \underline{-x + 2} \\
 -1
 \end{array}$$

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2} = (2x + 4) + \frac{(-1)}{x - 2}$$

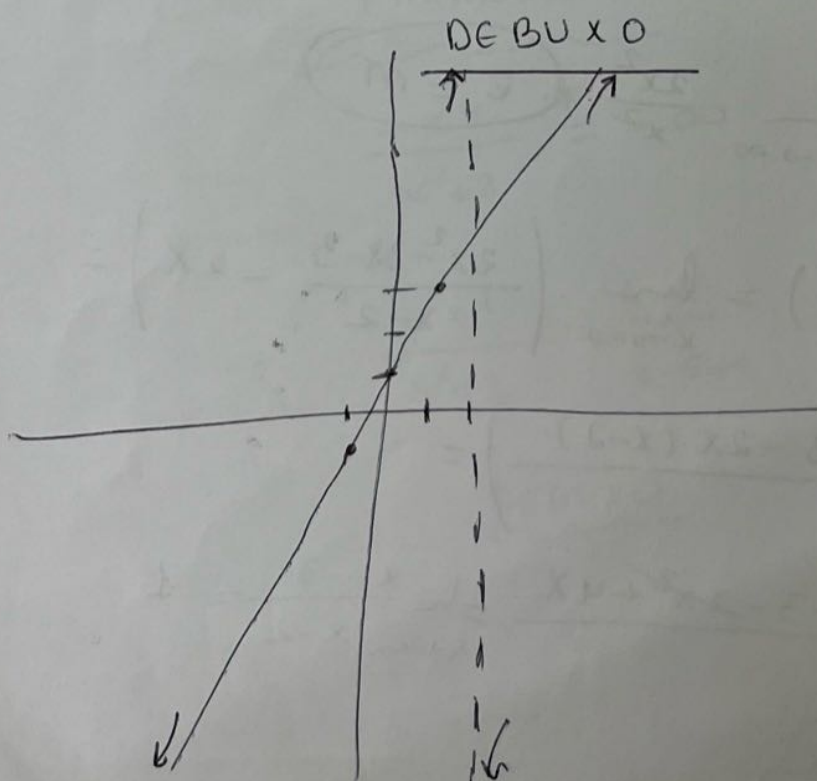
$$f(x) - A.O. = \frac{-1}{x - 2} = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2} - (2x + 4)$$

$$\text{Se } x \rightarrow \infty \quad f(x) - A.O. < 0 \Rightarrow f(x) < A.O.$$

$$\frac{-1}{x - 2} \rightarrow 0^-$$

$$\text{Se } x \rightarrow -\infty \quad f(x) - A.O. > 0 \Rightarrow f(x) > A.O.$$

$$\frac{-1}{x - 2} \rightarrow 0^+$$



$$y = 2x + 1$$

x	y
0	1
1	3
-1	-1

②

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & x < -3 \\ -x^2+x+2 & -3 \leq x \leq 2 \\ \log_2(x-1) & x > 2 \end{cases}$$

a) f continua en $(-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, \infty)$
 por estar definida en esos intervalos
 por funciones continuas (polinómicas y
 logarítmica definida en pto de su dominio)

¿ f continua en $x = -3$?

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} (-x-2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} (-x^2+x+2) = -9-3+2 = -10$$

$$f(-3) = -10$$

f non é continua en $x = -3$ p. $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$

En $x = -3$, f ten descontinuidade de salto finito.

¿ f continua en $x = 2$?

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2+x+2) = -4+2+2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \log_2(x-1) = \log_2 1 = 0$$

$$f(2) = 0$$

f continua em $x=2$ pq. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

Portanto f continua em $\mathbb{R}$ - 1-34.

b) $y = -x - 2 \quad x < -3$
RECTA

x	y
-3	1
-4	2
-5	3

$y = -x^2 + x + 2 \quad -3 \leq x \leq 2$

x	y
-3	$-9 - 3 + 2 = -10$
-2	$-4 - 2 + 2 = -4$
-1	$-1 - 1 + 2 = 0$
0	2
1	$-1 + 1 + 2 = 2$
2	$-4 + 2 + 2 = 0$

$y = -x^2 + x + 2$ PARÁBOLA

$\cap$ cóncava

$V \left(-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}, 2\frac{1}{4} \right)$

$x_v = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

$y_v = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2$

$y_v = \frac{-1 + 2 + 8}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

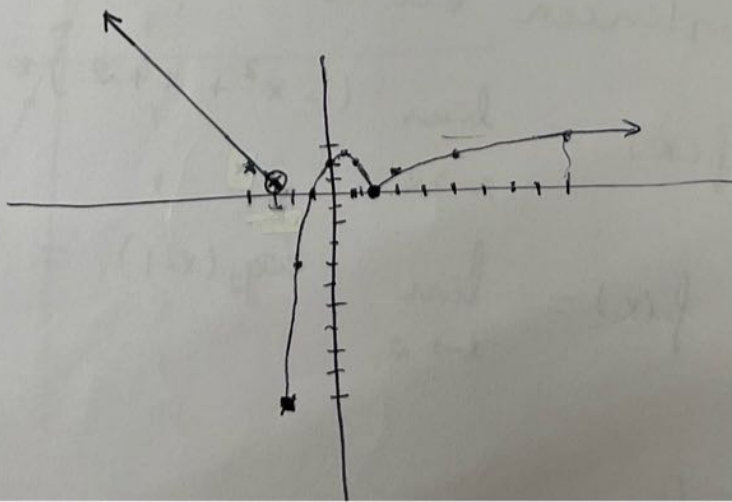
$y = \log_2(x-1) \quad x > 2$

x	y
2	0
3	1
5	2
9	

Cortes $x=0 \Rightarrow y=2 \quad (0, 2)$
 $y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (-1, 0) \\ (2, 0) \end{matrix}$

$-x^2 + x + 2 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$



$$3.- \quad f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$$

¿PTOS DESCONTINUIDADE? PUNTOS QUE NO ESTÁN
NO DOMINIO

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1, -1\}$$

Os puntos de descontinuidade son en
 $x=1$ e $x=-1$.

TIPOS DE DESCONTINUIDADE

En $x=1$

$$\frac{1-1+1-1}{0} = \frac{0}{0} \text{ INDETERMINADO}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{2}{2} = 1$$

	1	-1	1	-1
		1	0	1
1	1	0	1	0

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$
 $\Rightarrow$ En $x=1$ hai descontinuidade evitable

Em $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = \frac{-1 - 1 - 1 - 1}{1 - 1} = \frac{-4}{0} = \pm \infty$$

$\nearrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$
 $\searrow \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

$\neq f(-1)$

Como os limites laterais são $\pm \infty$, em $x = -1$ há descontinuidade de salto infinito.

4.

a? b?

$$f(x) = \begin{cases} 3^x & x < 1 \\ ax^2 + bx + 1 & 1 \leq x < 3 \\ 2x - 5 & x > 3 \end{cases}$$

f é contínua em $(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, \infty)$ por estar definida em esses intervalos por funções contínuas (potências e exponenciais)

f é cont. em $x = 1$?

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3^x = 3^1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + bx + 1) = a + b + 1$$

$$f(1) = a + b + 1$$

Para que f cont. em $x = 1$

$$a + b + 1 = 3$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 9a + 3b = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Resolvemos o sistema}} \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

f é contínua em $x = 3$?

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax^2 + bx + 1) = 9a + 3b + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x - 5) = 1$$

$$f(3) = 1$$

Para que f cont. em $x = 3$

$$9a + 3b + 1 = 1$$

f é contínua em $\mathbb{R}$

$$a = -1 \text{ e } b = 3$$