

GAUSS.COMPLEXOS.TRIGONOMETRÍA.MATI.

(3 de Novembro de 2023)

Nome: _____

1.- Utiliza o método de **Gauss** para discutir e resolver o seguinte sistema:

(1 PUNTO)

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x - y - z = -1 \\ x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} E_2 - 2E_1 \\ E_3 - E_1 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 + E_2 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 9 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = -1 \\ y + 3z = 4 \\ 7z = 9 \end{array} \right\} \longrightarrow$$

$$\underline{\underline{z = \frac{9}{7}}}$$

$$E_2: y + 3z = 4 \Rightarrow \underline{\underline{y = 4 - 3 \cdot \frac{9}{7} = \frac{1}{7}}}$$

$$E_1: x - y - z = -1 \Rightarrow x = -1 + y + z = -1 + \frac{1}{7} + \frac{9}{7}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{3}{7}}}$$

Solución:

$$\begin{array}{l} x = \frac{3}{7} \\ y = \frac{1}{7} \\ z = \frac{9}{7} \end{array}$$

2.- Calcula (pasa **primeiro** o número complexo en forma binómica a **forma polar**):

(1,5 PUNTOS)

a) $(-1+i)^{10}$

$z = -1+i$

Paso a forma polar: $|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\tan \alpha = \frac{1}{-1} \Rightarrow \alpha = 135^\circ \leftarrow \text{este é o argumento}$
 315° Non pg.

$z = -1+i$ está 3º cuad.

$z = -1+i = (\sqrt{2})_{135^\circ} \leftarrow \text{FORMA POLAR}$

$z^{10} = (-1+i)^{10} = [(\sqrt{2})_{135^\circ}]^{10} = (\sqrt{2})_{135^\circ \cdot 10} = 2^5_{1350^\circ} = 32_{270^\circ}$
 $= 32(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = 32(0 + i(-1)) = -32i$

b) $\sqrt[4]{-16}$

$z = -16$ Paso a forma polar. $z = 16_{180^\circ} = -16 \leftarrow \text{FORMA POLAR}$

$\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^\circ}} = \sqrt[4]{16}_{\frac{180^\circ + 360^\circ k}{4}} \quad k=0,1,2,3$

$k=0 \rightarrow 2_{45^\circ} = 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$
 $k=1 \rightarrow 2_{\frac{180^\circ + 360^\circ}{4}} = 2_{135^\circ} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
 $k=2 \rightarrow 2_{\frac{180^\circ + 720^\circ}{4}} = 2_{225^\circ} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
 $k=3 \rightarrow 2_{\frac{180^\circ + 1080^\circ}{4}} = 2_{315^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

3.- Calcula **sen utilizar a calculadora** e paso por paso:
(1 PUNTO)

$$-2 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} + 2\sqrt{6} \cos \frac{5\pi}{6} - 2 \cos \frac{5\pi}{3} + \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} - \cos \pi$$

$$= -2 \cdot \operatorname{sen} 225^\circ + 2\sqrt{6} \cdot \cos 150^\circ - 2 \cos 300^\circ + \operatorname{sen} 270^\circ - \cos 180^\circ =$$

$$= -2 \cdot (-\operatorname{sen} 45^\circ) + 2\sqrt{6} \cdot (-\cos 30^\circ) - 2 \cdot \cos 60^\circ + (-1) - (-1) =$$

$$= \cancel{-2} \cdot \left(\cancel{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) + \cancel{2}\sqrt{6} \cdot \left(\cancel{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) - 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 + 1 =$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{18} - \cancel{1} - 1 + \cancel{1} =$$

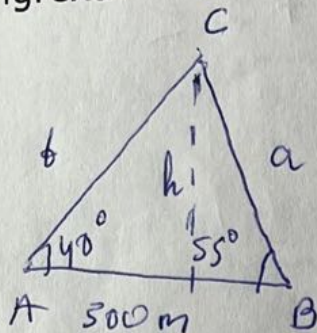
$$= \sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 1 =$$

$$= -2\sqrt{2} - 1$$

$$\underline{\underline{-2\sqrt{2} - 1}}$$

4.- Dous amigos situados en dous puntos, A e B, que distan 500 m, ven o punto máis alto da torre dunha igrexa, C, que está entre A e B, baixo os ángulos: $\widehat{BAC}=40^\circ$ e $\widehat{ABC}=55^\circ$. Indica os teoremas que empregas para resolver o problema. Fai o debuxo e contesta: **(a) 1; b) 0,5 PUNTOS)**

a) Que distancia hai entre cada un deles e o punto máis alto da igrexa?



$$\hat{C} = 180^\circ - (40^\circ + 55^\circ) = 85^\circ$$

Pdo teorema do SENO:

$$\frac{a}{\text{sen } 40^\circ} = \frac{500}{\text{sen } 85^\circ} \Rightarrow a = \frac{500 \cdot \text{sen } 40^\circ}{\text{sen } 85^\circ} = 322'62 \text{ m}$$

$$\frac{b}{\text{sen } 55^\circ} = \frac{500}{\text{sen } 85^\circ} \Rightarrow b = \frac{500 \cdot \text{sen } 55^\circ}{\text{sen } 85^\circ} = 411'14 \text{ m}$$

A distancia a A é 411'14 m e a B é 322'62 m.

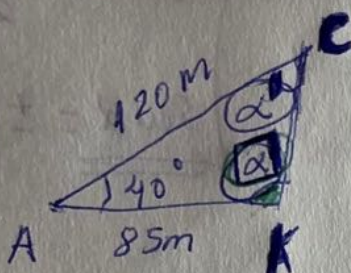
b) A que altura está o punto máis alto da igrexa?

$$\text{sen } 55^\circ = \frac{h}{a} = \frac{h}{322'62} \Rightarrow h = 322'62 \cdot \text{sen } 55^\circ = 264'27 \text{ m}$$

A altura do punto máis alto da igrexa é 264'27 m.

5.- Desde a porta da miña casa, A, vexo o cine, C, que está a 120 m, e o quiosco, K, que está a 85 m, baixo un ángulo $\widehat{CAK} = 40^\circ$. Indica os teoremas que empregas para resolver o problema. Fai o debuxo e contesta: **(1,5 PUNTOS)**

a) Que distancia hai entre o cine e o quiosco?



Polo teorema do coseno:

$$\overline{CK}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AK}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AK} \cdot \cos 40^\circ$$

$$\overline{CK}^2 = 120^2 + 85^2 - 2 \cdot 120 \cdot 85 \cdot \cos 40^\circ$$

$$\overline{CK} = 77'44 \text{ m}$$

A distancia entre o cine e o quiosco é 77'44 m.

b) Calcula o ángulo $\widehat{CKA}$.

$$\alpha = \widehat{CKA}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{CK}^2 - 2\overline{AK} \cdot \overline{CK} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AK}^2 + \overline{CK}^2 - \overline{AC}^2}{2 \overline{AK} \cdot \overline{CK}} = \frac{85^2 + 77'44^2 - 120^2}{2 \cdot 85 \cdot 77'44}$$

$$\alpha = 95^\circ 8' 2''$$

$$\widehat{CKA} = 95^\circ 8' 2''$$

$$\alpha' = 180^\circ - (40^\circ + 95^\circ 8' 2'') = 44^\circ 51' 58''$$

6.- Sabendo que $\cos \alpha = \frac{-4}{5}$ e $\sin \alpha > 0$, calcula sen e achar o valor de α . Indica o quadrante no que está α e justifica as respostas: **(2 PUNTOS)**

a) $\sin \alpha$

α está no 2º quadrante

pg. $\cos \alpha < 0$
 $\sin \alpha > 0$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{9}{25}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5}$$

α está no 2º

$$b) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{6} - \sin \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{6} =$$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(+\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{-4\sqrt{3}}{10} - \frac{3}{10} = \frac{-4\sqrt{3}-3}{10}$$

$$c) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{3} - \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{3} =$$

$$= \left(+\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{4\sqrt{3}}{10} = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}$$

$$d) \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)}{1 + \left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{1}{5}}$$

Como $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

$\Downarrow$

$45^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$

$$= + \sqrt{\frac{9 \cdot 5}{1}} = + \sqrt{9} = 3$$

7.- Resolve: $\cos(2x) - 3\sin x + 1 = 0$ (1,5 PUNTOS)

$$\Downarrow \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

$$\Downarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

$\Downarrow$

$$1 - 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

$\Downarrow$

$$-2\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$$

$\Downarrow$

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\Downarrow t = \sin x$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} -2 \\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$t_1 = -2 = \sin x \text{ ; IMPOSSIBLE! } -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$t_2 = \frac{1}{2} = \sin x \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$