

VECTORES

VECTORES. DEFINICIÓNS.-

Un **vector fixo** no plano é un segmento orientado $\overrightarrow{AB}$. O punto A é a orixe do vector e o punto B é o extremo.

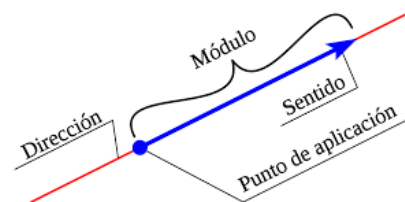
Cando a orixe coincide co extremo, o vector chámase vector nulo.

Defínese:

Módulo do vector $\overrightarrow{AB}$, a distancia entre A e B, e represéntase por $|\overrightarrow{AB}|$.

Dirección do vector $\overrightarrow{AB}$, a dirección da recta determinada polos puntos A e B, a as súas paralelas.

Sentido do vector $\overrightarrow{AB}$, cada dirección admite dous sentidos: de A a B, $\overrightarrow{AB}$, e de B a A, $\overrightarrow{BA}$, que son opostas entre sí.



RELACIÓN DE EQUIPOLENCIA. VECTORES LIBRES.-

Diremos que dous **vectores son equipolentes** se teñen o mesmo módulo, a mesma dirección e o mesmo sentido, e dicir, cando son iguais en todo pero están situados en distintas posición do plano.

O conxunto de tódolos vectores fixos equipolentes entre si chámase **vector libre**. Os vectores libres represéntanse polas letras, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots$

A partir de agora, traballaremos sempre con vectores libres ($V_2 = \{\text{vectores libres}\}$), entendendo que o vector que vemos debuxado non é máis que un representante dos infinitos vectores que teñen o mesmo módulo, a mesma dirección e o mesmo sentido ca el.

OPERACIÓNS CON VECTORES.-

PRODUTO DUN VECTOR POR UN NÚMERO (ESCALAR)

O produto dun vector $\vec{u}$ por un número k, que chamaremos escalar, é outro vector $k\vec{u}$ t.q.

Módulo: igual a o produto do módulo de $\vec{u}$ polo valor absoluto de k,

$$|k\vec{u}| = |k| \cdot |\vec{u}|$$

Dirección: a mesma ca de $\vec{u}$

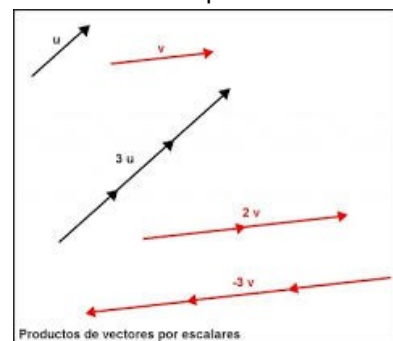
Sentido: o mesmo ca $\vec{u}$ se k é positivo, e o oposto se k é negativo.

$$0\vec{u} = \vec{0}$$

$$1\vec{u} = \vec{u}$$

$$-1\vec{u} = -\vec{u}$$

$-\vec{u}$ é o vector oposto de $\vec{u}$



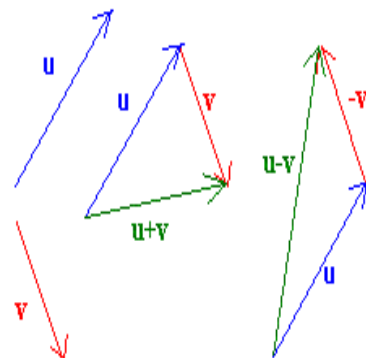
SUMA DE VECTORES

Sexan $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dous vectores libres.

Graficamente:

No caso da resta de vectores basta ter en conta que:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) \text{ onde } -\vec{v} \text{ é o oposto de } \vec{v}$$



PROPIEDADES DO PRODUTO POR UN ESCALAR:
 $\vec{u}, \vec{v} \in V_2 \quad k, l \in \mathbb{R}$

- 1.- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- 2.- $(k+l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$
- 3.- $(kl)\vec{u} = k(l\vec{u})$
- 4.- $1\vec{u} = \vec{u}$

PROPIEDADES DA SUMA:
 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_2$

- 1.- Asociativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
- 2.- Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- 3.- Ten elemento neutro, o vector $\vec{0}$ porque $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ para todo $\vec{u} \in V_2$
- 4.- Todo $\vec{u} \in V_2$ ten elemento oposto $-\vec{u}$ porque $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$ (elemento neutro) para todo $\vec{u} \in V_2$

Por verificar todas estas propiedades:

$(V_2, +, \cdot_k)$ ten estrutura de **ESPACIO VECTORIAL REAL**

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES. DEPENDENCIA E INDENPENDENCIA LINEAL.

Dados dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ diremos que $\vec{u}$ é **combinación lineal de** $\vec{v}$, se hai un escalar k , distinto de cero, tal que $\vec{u} = k\vec{v}$. Neste caso diremos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ **son linealmente dependentes**.

No caso contrario, os vectores son linealmente independentes.

Se $\vec{u}$ é combinación lineal de $\vec{v}$, $\vec{v}$ tamén é combinación lineal de $\vec{u}$.

Dem.- Se $\vec{u} = k\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{k}\vec{u}$

Dados tres vectores, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ diremos que $\vec{w}$ é **combinación lineal de** $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se existen **dous escalares** α, β non nulos, tales que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Neste caso diremos que os vectores, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ **son linealmente dependentes**.

No caso contrario diranse linealmente independentes.

No plano tres vectores son sempre linealmente dependentes.

Calquera vector do plano se pode expresar como combinación lineal de dous vectores, non nulos, de distinta dirección. ex. $\vec{w} = 3\vec{u} + 4\vec{v}$ ($\vec{w}$ é combinación lineal de $\vec{u}$ e $\vec{v}$).

BASE. COORDENADAS DUN VECTOR.-

Chamamos **base** a un conxunto de vectores linealmente independentes e xeradores, e dicir, tales que calquera outro vector do plano se poida poñer como combinación lineal de eles.

No plano dous vectores, non nulos, con distinta dirección son unha base porque:

- Son linealmente independentes
- Calquera vector do plano pódese poñer como combinación lineal deles.

No plano hai moitas bases, pero todas elas están formadas por dous vectores por iso V_2 é un espacio vectorial de dimensión dous.

Se os dous vectores da base son perpendiculares a base chámase ORTOGONAL, e se ademais teñen módulo un (son unitarios) a base chámase ORTONORMAL.

COORDENADAS DUN VECTOR. OPERACIÓNS CON COORDENADAS.-

Supoñamos que $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ é unha base. Existen entón dous únicos números a, b tales que calquera vector $\vec{w}$ se pode escribir como:

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

Os números a, b chámanse **coordenadas de $\vec{w}$ respecto da base B e exprésase:**

$$\vec{w} = (a, b)$$

Se $\vec{x} = (a, b)$ e $\vec{y} = (a', b')$, entón:

$$\text{SUMA DE VECTORES: } \vec{x} + \vec{y} = (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$\text{RESTA DE VECTORES: } \vec{x} - \vec{y} = (a, b) - (a', b') = (a - a', b - b')$$

$$\text{PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR: } \lambda \vec{x} = \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$

COMBINACIÓN LINEAL DE DOS VECTORES:

$$\lambda \vec{x} + \mu \vec{y} = \lambda(a, b) + \mu(a', b') = (\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b')$$

$B = \{\vec{i}, \vec{j}\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ chámase **base canónica** e é **una base ortonormal**. De agora en diante traballaremos con ela, agás cando se diga o contrario.

PRODUTO ESCALAR DE DOUS VECTORES. PROPIEDADES.-

Chamámoslle **produto escalar de dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$** ao número real que resulta de multiplicar o módulo de $\vec{u}$, polo módulo de $\vec{v}$, polo coseno do ángulo que forman.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Como $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ e $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ son números $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é un número real que pode ser positivo ou negativo dependendo do valor do ángulo que formen $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

O produto escalar de dous vectores cumpre as seguintes propiedades:

$$\text{Conmutativa: } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\text{Asociativa: } \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v})$$

$$\text{Distributiva: } \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Un espacio vectorial no que se define un produto escalar chámase **ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO**.

V_2 ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

CONSECUENCIAS DA DEFINIÇÃO DE PRODUTO ESCALAR.-

$$1.- |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \quad pq \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{u}) = |\vec{u}|^2 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \quad \text{MÓDULO VECTOR}$$

$$2.- \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

ÁNGULO FORMADO POR DOUS VECTORES

3.- Dous vectores non nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son perpendiculares se e solo se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

4.- O produto escalar de dous vectores é igual ao módulo dun deles pola proxección do outro sobre el. É dicir: $|\text{prox}_{\vec{v}}(\vec{u})| = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$

Dem.-

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = |\vec{u}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = |\text{prox}_{\vec{v}}(\vec{u})|$$

EXPRESIÓN ANALÍTICA DO PRODUTO ESCALAR NUNHA BASE ORTONORMAL.-

Sexa $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ unha base ortonormal, cúmprese entón que:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$$

Se $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (a', b')$ respecto da base B, cúmprese que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a \cdot a' + b \cdot b'$$

Dem.-

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot (a'\vec{i} + b'\vec{j}) = (a\vec{i} + b\vec{j})a'\vec{i} + (a\vec{i} + b\vec{j})b'\vec{j} = aa'\vec{i} \cdot \vec{i} + ba'\vec{j} \cdot \vec{i} + ab'\vec{i} \cdot \vec{j} + bb'\vec{j} \cdot \vec{j} \stackrel{\substack{\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \\ \vec{j} \cdot \vec{i} = 0 \\ \vec{j} \cdot \vec{j} = 1}}{=} aa' + bb'$$

A partir da expresión do produto escalar nunha base ortonormal podemos deducir que se $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (a', b')$ respecto a una base ortonormal cúmprese que:

MÓDULO DUN VECTOR:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{(a, b) \cdot (a, b)} = \sqrt{a \cdot a + b \cdot b} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ex.-

$$\vec{v} = (3, 4) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\vec{w} = (2, 7) \Rightarrow |\vec{w}| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$$

ÁNGULO FORMADO POR DOUS VECTORES:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

Ex.- ¿Ángulo formado por $\vec{v}=(3,4)$ e $\vec{w}=(2,7)$?

$$\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 7}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 7^2}} = \frac{22}{5 \cdot \sqrt{53}} \Rightarrow \text{ángulo formado}(\vec{v}, \vec{w}) = \arccos\left(\frac{22}{5 \cdot \sqrt{53}}\right) =$$

$$= \arccos(0,604386481) = 52^\circ 48' 55''$$

CONDICIÓN NECESARIA E SUFICIENTE PARA QUE DOUS VECTORES SEXAN ORTOGONAIS:

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow a \cdot a' + b \cdot b' = 0$ (dous vectores son ortogonais se e só se o seu produto escalar é cero)

Consecuencia : os vectores (a, b) e (b, -a) ou (a, b) e (-b, a) son ortogonais.

Ex.- $(3,2)$ e $(2,-3)$ son ortogonais (*perpendiculares*)

Ex.- ¿Canto ten que valer x para que os vectores (2,x) e (3,-5) sexan perpendiculares?

Para que sexan perpendiculares, o seu produto escalar ten que ser cero. Entón:

$$(2, x) \cdot (3, -5) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 3 + x \cdot (-5) = 0 \Rightarrow 6 - 5x = 0 \Rightarrow 6 = 5x \Rightarrow x = \frac{6}{5}$$