

64 EJERCICIOS de NÚMEROS COMPLEJOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los números complejos, y comprobar las sombreadas:

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$

(Soluc: $1 \pm i$)

b) $x^2 + 3 = 0$

(Soluc: $\pm \sqrt{3}i$)

c) $x^2 - 2x + 4 = 0$

(Soluc: $1 \pm \sqrt{3}i$)

d) $2x^2 - 2x + 1 = 0$

(Soluc: $\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$)

e) $2x^2 - 2x - 1 = 0$

(Soluc: $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$)

f) $x^3 - 6x^2 + 21x - 26 = 0$

(Soluc: 2, $2 \pm 3i$)

g) $x^3 + 1 = 0$

(Soluc: $-1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$)

h) $x^4 - 1 = 0$

(Soluc: $\pm 1, \pm i$)

i) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 10x - 12 = 0$

(Soluc: -2, 3, $1 \pm i$)

j) $e^{1/x} = \frac{1}{e^x}$

(Soluc: $\pm i$)

k) $e^{1/x} = e^x$

(Soluc: ± 1)

Forma binómica de un complejo:

2. Completar (en este cuaderno; obsérvese el primer ejemplo):

| | COMPLEJO z | PARTE REAL $Re(z)$ | PARTE IMAGINARIA $Im(z)$ | OPUESTO $-z$ | CONJUGADO \bar{z} |
|---|------------------|-----------------------|-----------------------------|-----------------|------------------------|
| 1 | $z=2+3i$ | $Re(z)=2$ | $Im(z)=3$ | $-z=-2-3i$ | $\bar{z}=2-3i$ |
| 2 | $z=3-3\sqrt{3}i$ | | | | |
| 3 | | | | $-z=-3+i$ | |
| 4 | | | | | $\bar{z}=1-i$ |
| 5 | $z=3$ | | | | |
| 6 | $z=-2i$ | | | | |
| 7 | $z=i$ | | | | |

3. Dados los complejos $z_1=2+3i$, $z_2=-1+4i$ y $z_3=2-5i$, hallar:

a) z_1+z_2

(Soluc: $1+7i$)

e) $3z_2+2z_3$

(Soluc: $1+2i$)

i) $z_3 - \bar{z}_3$

(Soluc: $-10i$)

b) z_1+z_3

(Soluc: $4-2i$)

f) $2z_1-3z_2$

(Soluc: $7-6i$)

j) $2\bar{z}_1 - z_1$

(Soluc: $2-9i$)

c) z_1-z_2

(Soluc: $3-i$)

g) $z_3-3z_1+4z_2$

(Soluc: $-8+2i$)

d) z_3-z_2

(Soluc: $3-9i$)

h) $z_1 + \bar{z}_2$

(Soluc: $1-i$)

4. Calcular x e y para que $(2+xi)+(y+3i)=7+4i$ (Soluc: $x=1$, $y=5$)

5. Calcular:

a) $(2+5i)(3+4i)$

(Soluc: $-14+23i$)

d) $(2-5i)i$

(Soluc: $5+2i$)

b) $(1+3i)(1+i)$

(Soluc: $-2+4i$)

e) $(2+5i)(2-5i)$

(Soluc: 29)

c) $(1+i)(-1-i)$

(Soluc: $-2i$)

f) $(1+i)(1-i)$

(Soluc: 2)



| | | | |
|----------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|------------------------|
| g) $(5+2i)(3-4i)$ | <i>(Soluc: 23-14i)</i> | n) $(2+3i)^2$ | <i>(Soluc: -5+12i)</i> |
| h) $(3+5i)^2$ | <i>(Soluc: -16+30i)</i> | o) $(6-3i)^2$ | <i>(Soluc: 27-36i)</i> |
| i) $(1+3i)(1-3i)$ | <i>(Soluc: 10)</i> | p) $(2+3i)(1-i)$ | <i>(Soluc: 5+i)</i> |
| j) $(-2-5i)(-2+5i)$ | <i>(Soluc: 29)</i> | q) $(1-3i)2i$ | <i>(Soluc: 6+2i)</i> |
| k) $(a+bi)(c+di)$ | <i>(Soluc: ac-bd+(ad+bc)i)</i> | r) $(1+i)(2-3i)$ | <i>(Soluc: 5-i)</i> |
| l) $(2+3i)3i$ | <i>(Soluc: -9+6i)</i> | s) $(5+i)(5-i)$ | <i>(Soluc: 26)</i> |
| m) $(3i)(-3i)$ | <i>(Soluc: 9)</i> | t) $(4+3i)(4+2i)-(2+i)(3-4i)$ | <i>(Soluc: 25i)</i> |

6. a) ¿Cómo es siempre el producto de dos complejos conjugados? Razonar la respuesta. *(Soluc: $\in IR^+$)*
 b) ¿Cómo son los complejos cuyo opuesto coincide con su conjugado? Indicar ejemplos.
 c) ¿Qué ocurre si a un complejo le sumamos su conjugado? ¿Y si lo restamos?

7. Dados los complejos del ejercicio 3, hallar **de la forma más rápida posible**:

| | | | | | |
|---------------------------|-------------------------|---------------------------------|------------------------|---|---------------------------|
| a) $z_1 \cdot z_2$ | <i>(Soluc: -14+5i)</i> | f) $(z_1)^2$ | <i>(Soluc: -5+12i)</i> | j) $z_2(2z_1-3z_3)$ | <i>(Soluc: -82-29i)</i> |
| b) $z_1 \cdot z_3$ | <i>(Soluc: 19-4i)</i> | g) $(z_1-z_3)^2$ | <i>(Soluc: -64)</i> | k) $(3z_1+2z_2)^2$ | <i>(Soluc: -273+136i)</i> |
| c) $z_3 \cdot z_2$ | <i>(Soluc: 18+13i)</i> | h) $z_1 \cdot \bar{z}_1$ | <i>(Soluc: 13)</i> | l) $z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_3$ | <i>(Soluc: 75-28i)</i> |
| d) $z_1(z_3+z_2)$ | <i>(Soluc: 5+i)</i> | i) $z_1 - \bar{z}_1$ | <i>(Soluc: 6i)</i> | m) $z_1^2 - \bar{z}_1^2$ | <i>(Soluc: 24i)</i> |
| e) $z_1-z_2-z_3$ | <i>(Soluc: -16-10i)</i> | | | | |

8. Dados los complejos $2-mi$ y $3-ni$ hallar **m** y **n** para que su producto sea $8+4i$.

\uparrow
(Soluc: m₁=-2 y n₁=1; m₂=2/3 y n₂=-3)

- \downarrow
 9. Resolver la ecuación $(a+i)(b-3i)=7-11i$ *(Soluc: a₁=4 y b₁=1; a₂=-1/3 y b₂=-12)*

10. Calcular (Se recomienda comprobar con Derive o similar):

| | | | |
|--------------------------------|--|---|---|
| a) $\frac{1+3i}{1+i}$ | <i>(Sol : 2+i)</i> | k) $\frac{19-4i}{2-5i} + \frac{3+2i}{i}$ | <i>(Sol : 4)</i> |
| b) $\frac{2+5i}{3+4i}$ | $\left(Sol : \frac{26}{25} + \frac{7}{25}i \right)$ | l) $\frac{2-i}{3+i} - \frac{1}{2i}$ | $\left(Sol : \frac{1}{2} \right)$ |
| c) $\frac{1+i}{1-i}$ | <i>(Sol : i)</i> | m) $i + \frac{1}{i}$ | <i>(Sol : 0)</i> |
| d) $\frac{3+5i}{1-i}$ | <i>(Sol : -1+4i)</i> | n) $\frac{(5-3i)(1+i)}{1-2i}$ | $\left(Sol : \frac{12}{5} - \frac{14}{5}i \right)$ |
| e) $\frac{2-5i}{i}$ | <i>(Sol : -5-2i)</i> | o) $\frac{(3+2i)^2 + 3-2i}{(5+i)^2}$ | $\left(Sol : \frac{73}{169} + \frac{40}{169}i \right)$ |
| f) $\frac{20+30i}{3+i}$ | <i>(Sol : 9+7i)</i> | p) $\frac{(3-2i)(1+i)}{1+i-2i}$ | $\left(Sol : \frac{1}{5} + \frac{8}{5}i \right)$ |
| g) $\frac{i}{3-2i}$ | $\left(Sol : -\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i \right)$ | q) $\frac{1+i}{2+i}$ | $\left(Sol : -\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i \right)$ |
| h) $\frac{1+i}{i}$ | <i>(Sol : 1-i)</i> | r) $\frac{3+2i}{i} - \frac{11+2i}{3+4i}$ | <i>(Sol : 1-i)</i> |
| i) $\frac{1+2i}{2-i}$ | <i>(Sol : i)</i> | s) $\frac{10-10i}{i} + \frac{15-25i}{2+i}$ | <i>(Sol : 1-17i)</i> |
| j) $\frac{1-i}{2+3i}$ | $\left(Sol : -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i \right)$ | | |



| | |
|---|-----------|
| t) $\frac{1+ai}{a-i}$ u) $\frac{-a+bi}{b+ai}$ v) $\frac{-555-555i}{-1+3i}$ (Simplificar antes) (Sol : -111+222i) | (Sol : i) |
|---|-----------|

| | |
|--|--|
| w) $\frac{2-3i}{2+3i}$ x) $(1+i^{-1})^2 + (i-i^{-1})^2$ | (Sol : $-\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i$) (Sol : -4-2i) |
|--|--|

11. Calcular el inverso de cada uno de los siguientes complejos:

| | | | | | |
|-----------------------------------|---|-------------------------------------|--|-----------------------------------|--|
| a) $3i$ b) $1+i$ | (Sol : $-\frac{1}{3}i$) (Sol : $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$) | c) $2+3i$ d) $1-i$ | (Sol : $\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$) (Sol : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$) | e) $-2+i$ f) i | (Sol : $-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$) (Sol : -i) |
|-----------------------------------|---|-------------------------------------|--|-----------------------------------|--|

12. Calcular las siguientes potencias sucesivas de i:

| | | | |
|--|---|--|--|
| a) i^{12} b) i^{77} c) i^{121} d) i^{723} e) i^{2344} f) $i^{-1} = \frac{1}{i}$ g) $i^{-2} = \frac{1}{i^2}$ | (Soluc: 1) (Soluc: i) (Soluc: i) (Soluc: -i) (Soluc: 1) (Soluc: -i) (Soluc: -1) | h) i^{-3} i) i^{-4} j) i^{-5} k) i^{-6} l) i^{544} m) i^{6254} n) i^{-17} o) i^{-527} | (Soluc: i) (Soluc: 1) (Soluc: -i) (Soluc: -1) (Soluc: 1) (Soluc: -1) (Soluc: -i) (Soluc: i) |
|--|---|--|--|

13. Calcular las siguientes operaciones combinadas en forma binómica:

| | | | |
|--|---|---|--|
| a) $(2+i)^3$ b) $(1+i)^3$ c) $(2-3i)^3$ d) $(2-3i)^4$ e) i^{-131} f) $\frac{i^7 - 1}{1+i}$ g) $\frac{2i-1}{i^{45}} + \frac{4-3i}{1+2i}$ h) $\frac{(3-2i)^2 + (2+3i)^2}{i^{12} + i^{-5}}$ i) $\frac{(2+3i)(1-i) - (3+4i)^2}{2i^{14} - i^{-7}}$ j) $\frac{(3+2i)(3-i) - (2i-3)^2}{i^{23} - i^{13}}$ | (Soluc: 2+11i) (Soluc: -2+2i) (Soluc: -46-9i) (Soluc: -119+120i) (Soluc: i) (Soluc: -1) (Soluc: 4+2i) (Soluc: 12-12i) (Soluc : $-\frac{1}{5} + \frac{58}{5}i$) (Soluc : $-\frac{9}{2} + 3i$) | k) $\frac{1-(2+3i)^2(1-2i)}{2i^{77} - i^{726}}$ l) $\frac{(2+3i)(3-2i) - (2-3i)^2}{17(1-i^{13})}$ m) $-2-5i - \frac{10-10i-5(1+i)}{8+2i-(5+3i)}$ n) $\frac{(2-3i)^2 - (2+3i)(\overline{3+2i})}{3i^{17}-1}$ o) $\frac{(3+i)(3+2i) - (2i-3)^2}{2i^{20} - i^{13}} + \frac{4}{5i}$ p) $\frac{(2-3i)^2 - (2+3i)(3-2i)}{3i^{17}-1} - \frac{4}{5i^{-25}}$ q) $\frac{(\sqrt{2}+3i)(-\sqrt{2}-3i)}{2\sqrt{2}+6i}$ | (Soluc : $-\frac{62}{5} + \frac{14}{5}i$) (Soluc: i) (Soluc: -5-i) (Soluc : $-\frac{17}{5} + \frac{34}{5}i$) (Soluc : $\frac{3}{5} + 4i$) (Soluc : $-\frac{17}{5} + 6i$) (Soluc : $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}i$) (Ayuda: Se puede hacer sin multiplicar ni dividir) |
|--|---|---|--|

14. ¿Cuánto ha de valer m para que el complejo $z=(m-2i)(2+4i)$ sea un número real? ¿Es imaginario puro?

↑ ¿De qué números se trata? (Soluc: $m=1$ o $m=-4$; $z=10$ y $z=-20i$, respectivamente)

15. Determinar x para que el producto $z=(2-5i)(3+xi)$ sea:

↑ a) Un número real. ¿Qué número resulta? (Soluc: $x=15/2$; $z=87/2$)

↓ b) Un número imaginario puro. ¿Qué complejo z se obtiene? (Soluc: $x=-6/5$; $z=-87i/5$)

16. a) Hallar x con la condición de que $(x-2i)^2$ sea un número imaginario puro. (Soluc: $x=\pm 2$)

b) Ídem con $(3x-2i)^2$ (Soluc: $x=\pm 2/3$)

c) Ídem con $(2+xi)^2$ (Soluc: $x=\pm 2$)

17. Hallar x e y de modo que $\frac{3-xi}{1+2i} = y + 2i$ (Soluc: $x=-16$; $y=7$)

18. Hallar x para que el cociente $\frac{x+3i}{3+2i}$ sea un número imaginario puro. ¿De qué número imaginario se trata?

↑ (Soluc: $x=-2$; i)

19. Determinar k para que el cociente $z = \frac{-2+ki}{k-i}$ sea:

a) Un número real. ¿Qué número resulta? (Sol: $k = \pm\sqrt{2}$; $z = \mp\sqrt{2}$)

b) Un número imaginario puro. ¿Qué número es? (Sol: $k = 0$; $z = -2i$)

20. Demostrar la siguiente igualdad, obtenida de manera fortuita por el insigne filósofo y matemático alemán Gottfried Leibniz (1646-1716):

$$\sqrt{1+\sqrt{3}}i + \sqrt{1-\sqrt{3}}i = \sqrt{6}$$

21. Hallar dos complejos de los que sabemos que su diferencia es un número real, su suma tiene la parte real igual a 1 y su producto es $-7+i$ (Soluc: $3+i$ y $-2+i$)

22. Determinar los valores de a y b para que el complejo $z=a+bi$ satisfaga la ecuación $z^2 = \bar{z}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soluc: } z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 1 \end{array} \right.$$

23. Comprobar que los números complejos $2\pm 3i$ verifican la ecuación $x^2-4x+13=0$

24. Hallar una ecuación polinómica cuyas raíces sean:

a) $1\pm 3i$ (Soluc: $x^2-2x+10=0$)

b) $5\pm 2i$ (Soluc: $x^2-10x+29=0$)

c) $2+i$ y $3+5i$ (Soluc: $x^2-(5+6i)x+1+13i=0$)

d) $\pm i$ (Soluc: $x^2+1=0$)

25. TEORÍA: a) Demostrar que si las raíces complejas de $Ax^2+Bx+C=0$ son $a\pm bi$, entonces:

$$A[(x-a)^2+b^2]=Ax^2+Bx+C$$

(Ayuda: Desarrollar el miembro izquierdo y aplicar las relaciones de Cardano-Vieta)



b) ¿V o F?: $3\bar{i} = \overline{3i}$

c) ¿V o F?: Si un complejo es igual a su conjugado, entonces carece de parte imaginaria.

Forma polar de un complejo:

26. Representar los siguientes complejos, sus opuestos y sus conjugados:

a) $z_1=3+4i$

b) $z_2=1-i$

c) $z_3=-3+i$

d) $z_4=-2-5i$

e) $z_5=7i$

f) $z_6=-7$

g) i

h) $-\sqrt{2}i$

27. Pasar a forma polar los siguientes complejos (**se recomienda representarlos previamente, para así elegir correctamente su argumento**):

a) $4 + 4\sqrt{3}i$

(Soluc: 860°)

j) $-i$

(Soluc: 1270°)

b) $3 - 3\sqrt{3}i$

(Soluc: 6300°)

k) $3+4i$

(Soluc: $553^\circ 8'$)

c) $-\sqrt{2}-i$

(Soluc: $\sqrt{3}144^\circ 44'$)

l) $3-4i$

(Soluc: $5306^\circ 52'$)

d) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

(Soluc: 2225°)

m) $-3+4i$

(Soluc: $5126^\circ 52'$)

e) $\sqrt{3}-i$

(Soluc: 2330°)

n) $-5+12i$

(Soluc: $13112^\circ 37'$)

f) $1+i$

(Soluc: $\sqrt{2}45^\circ$)

o) $-8i$

(Soluc: 8270°)

g) $1-i$

(Soluc: $\sqrt{2}315^\circ$)

p) 8

(Soluc: 80°)

h) $-1-i$

(Soluc: $\sqrt{2}225^\circ$)

q) -8

(Soluc: 8180°)

i) i

(Soluc: 190°)

r) $3+2i$

(Soluc: $\sqrt{13}33^\circ 41'$)

s) $-2-5i$

(Soluc: $\sqrt{29}248^\circ 12'$)

28. a) Hallar m para que el número complejo $m+3i$ tenga módulo 5. Justificar gráficamente la solución.
(Soluc: $m=\pm 4$)

b) Hallar m para que su argumento sea 60° (Soluc: $m=\sqrt{3}$)

29. Hallar un número complejo tal que $|z|=3$ e $\operatorname{Im}(z)=-2$. Justificar gráficamente la solución.

(Soluc: $z_1=\sqrt{5}-2i$, $z_2=-\sqrt{5}-2i$)

30. Hallar un número complejo del 2^{o} cuadrante que tiene por módulo 2 y tal que $\operatorname{Re}(z)=-1$. Expresarlo en forma polar. Justificar gráficamente la solución. (Soluc: $-1+\sqrt{3}i=2_{120^\circ}$)

31. Hallar un complejo de argumento 45° tal que sumado a $1+2i$ dé un complejo de módulo 5 (Soluc: $2+2i$)

32. Encontrar un complejo tal que sumándolo con $1/2$ dé otro complejo de módulo $\sqrt{3}$ y argumento 60°

(Soluc: $\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{3}{2}i$)

33. Pasar a forma binómica (no vale pasar los radianes a grados):

a) 4_{30°

(Soluc: $2\sqrt{3}+2i$)

e) $2_{3\pi/2}$

b) 4_{90°

f) 1_{90°

c) 2_{0°

g) 1_{30°

d) 5π

(Soluc: $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$)

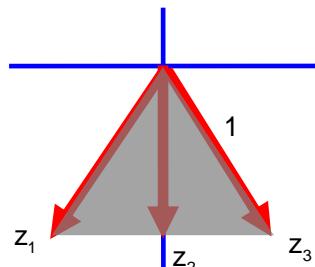


- | | |
|-----------------|--|
| h) 260° | (Soluc: $1 + \sqrt{3}i$) |
| i) 6225° | (Soluc: $-3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$) |
| j) 350° | (Soluc: $\cong(1,928+2,298i)$) |
| k) 4120° | (Soluc: $-2 + 2\sqrt{3}i$) |
| l) 2150° | (Soluc: $-\sqrt{3} + i$) |
| m) $3\pi/3$ | (Soluc: $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$) |
| n) 2100° | (Soluc: $\cong -0,3473 + 1,9696i$) |
| o) 2180° | (Soluc: -2) |

- | | |
|---|--|
| p) $1_{7\pi/6}$ | (Soluc: $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$) |
| q) $(\sqrt{3})_{5\pi/6}$ | (Soluc: $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$) |
| r) $\left(\frac{1}{5}\right)_{180^\circ}$ | |
| s) $\left(\frac{1}{7}\right)_{270^\circ}$ | |
| t) $\left(\frac{1}{10}\right)_{\pi/2}$ | |

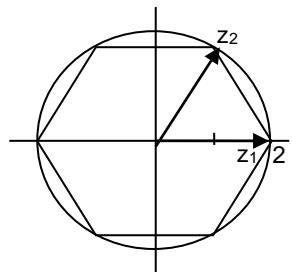
34. Dado el triángulo equilátero de lado 1 de la figura, hallar **razonadamente**, en forma **polar y binómica**, z_1 , z_2 y z_3 :

$$\left(\text{Soluc: } z_1 = 1_{240^\circ} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; z_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)_{270^\circ}; z_3 = 1_{300^\circ} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

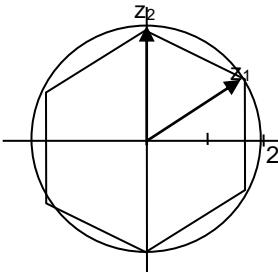


35. Hallar los números complejos, en forma polar y binómica, que corresponden a los vértices de estos hexágonos:

a)



b)



$$(\text{Sol: } z_1 = 2^{0^\circ}; z_2 = 2_{60^\circ} = 1 + \sqrt{3}i; z_3 = -z_1; z_4 = -z_1; z_5 = -z_2; z_6 = \bar{z}_2) \quad (\text{Sol: } z_1 = 2_{30^\circ} = \sqrt{3} + i; z_2 = 2_{90^\circ} = 2i; z_3 = -z_1; z_4 = -z_1; z_5 = -z_2; z_6 = \bar{z}_1)$$

36. Determinar el valor de **a** para que el complejo $z = (3-6i)(2-ai)$ sea:

a) Un número real. ¿De qué número se trata?

$$(\text{Sol: } a = -4; 30)$$

b) Un número imaginario puro. ¿De qué número se trata?

$$(\text{Sol: } a = 1; -15i)$$

c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 1^{er} y 3^{er} cuadrantes. ¿De qué número se trata?

$$(\text{Sol: } a = 6; -30 - 30i)$$

37. Determinar el valor de **m** para que el complejo $z = \frac{2-mi}{8-6i}$ sea:

a) Un número real. ¿Qué número es?

$$(\text{Soluc: } m = 3/2; 1/4)$$

b) Imaginario puro. ¿Cuál en concreto?

$$(\text{Soluc: } m = -8/3; i/3)$$

c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 2º y 4º cuadrantes. ¿De qué complejo se trata?

$$(\text{Soluc: } m = 14; 1-i)$$

38. Determinar el valor de **a** para que el complejo $z = (2+3i)(-2+ai)$ sea:

a) Un número real. ¿Qué número es?

$$(\text{Soluc: } a = 3)$$

b) Un número imaginario puro. ¿De qué número se trata?

$$(\text{Soluc: } a = -4/3)$$

c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 1^{er} y 3^{er} cuadrantes. ¿Cuál es?

$$(\text{Soluc: } a = 2/5; -26/5 - 26i/5)$$

39. a) Dado $z=2_{45^\circ}$, hallar \bar{z} en polar. (Soluc: 2_{315°)

b) Dado $z=1_{30^\circ}$, hallar $-z$

c) Si $z=2_{150^\circ}$, hallar su conjugado y su opuesto.

d) Hallar un número complejo y su opuesto sabiendo que su conjugado es $\bar{z}=3_{70^\circ}$

40. Representar razonadamente las siguientes regiones del plano complejo:

a) $\operatorname{Im}(z)=-2$ (Sol: recta horizontal)

b) $\operatorname{Re}(z)=\operatorname{Im}(z)$ (Sol: bisectriz del 1^{er} cuadrante)

c) $-1 < \operatorname{Re}(z) \leq 3$ (Sol: banda vertical)

d) $\operatorname{Im}(z) < 2$ (Sol: semiplano)

e) $|z|=5$ (Sol: circunferencia)

f) $|z|<3$ (Sol: región circular)

g) $-1 \leq |z| < 3$ (Sol: anillo)

h) $\operatorname{Arg}(z)=30^\circ$ (Sol: recta)

i) $\operatorname{Re}(z)=-3$ (Sol: recta vertical)

j) $|z| \geq 4$

k) $\operatorname{Arg}(z)=90^\circ$

41. TEORÍA:

a) Demostrar que $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

b) Si $z=r_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha+180^\circ}$ y $r_{360^\circ-\alpha}$?

c) El producto de dos complejos imaginarios, ¿puede ser real? Poner un ejemplo.

d) ¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su opuesto?

e) ¿Qué condición debe cumplir un número complejo z para que $\bar{z} = \frac{1}{z}$? (Sol: Su módulo tiene que ser 1)

f) ¿V o F? $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

g) (*) El número complejo z satisface que $|z-1|=1$. Probar que $|z|^2 = 2 R_e(z)$. (Ayuda: Plantear $z=x+iy$, elevar al cuadrado y usar que $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$)

Producto y cociente en forma polar:

42. a) Dados los números complejos 3_{30° y 5_{60° , comprobar que el producto en forma polar y en forma binómica dan el mismo complejo. (Soluc: $15i$)

b) Ídem con $3i$ y $2-2i$ (Soluc: $6+6i = 6\sqrt{2}_{45^\circ}$)

c) Ídem con el cociente entre 4_{120° y 2_{60° (Soluc: $1+\sqrt{3}i = 2_{60^\circ}$)

43. Efectuar las siguientes operaciones en forma polar y pasar el resultado a binómica:

a) $3_{45^\circ} \cdot 2_{15^\circ}$ (Soluc: $6_{60^\circ} = 3 + 3\sqrt{3}i$)

b) $3_{150^\circ} \cdot 4_{45^\circ}$ (Soluc: $12_{195^\circ} \cong -11,59 - 3,11i$)

c) $1_{33^\circ} \cdot 2_{16^\circ} \cdot 3_{41^\circ}$ (Soluc: $6_{90^\circ} = 6i$)

d) $3_{12^\circ} \cdot 4_{17^\circ} \cdot 2_1$ (Soluc: $24_{30^\circ} = 12\sqrt{3} + 12i$)

e) $2_{106^\circ} : 1_{61^\circ}$ (Soluc: $2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$)

f) $9_{37^\circ} : 3_{97^\circ}$ (Soluc: $3_{300^\circ} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$)

g) $(2_{40^\circ})^3$ (Soluc: $8_{120^\circ} = -4 + 4\sqrt{3}i$)

h) $1_{33^\circ} : 2_{16^\circ} \cdot 3_{41^\circ}$ (Soluc: $\left(\frac{3}{2}\right)_{58^\circ} \cong 0,79 + 1,27i$)

i) $3_{12^\circ} : 4_{17^\circ} : 2_1$ (Soluc: $\left(\frac{3}{8}\right)_{354^\circ} \cong 0,37 - 0,04i$)

- 44.** El complejo de argumento 80° y módulo 12 es el producto de dos complejos; uno de ellos tiene de módulo 3 y argumento 50° . Escribir en forma binómica el otro complejo. (*Soluc:* $2\sqrt{3} + 2i$)

- 45.** Efectuar las siguientes operaciones en forma polar y pasar el resultado a binómica:

a) $\frac{2_{15^\circ} \cdot 4_{135^\circ}}{8_{170^\circ}}$ (*Soluc:* $1_{340^\circ} \cong 0,94 - 0,34i$)

b) $\frac{2_{15^\circ} \cdot (1+i)}{2_{-15^\circ} \cdot (1-i)}$ (*Soluc:* $1_{120^\circ} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$)

c) $(1 + \sqrt{3}i)(\overline{1-i})(\sqrt{3} - i)$ (*Soluc:* $4\sqrt{2}_{75^\circ} \cong 1,46 + 5,46i$)

d) i^2 (*Soluc:* $1_{180^\circ} = -1$)

- 46.** Hallar el valor de α para que el producto $3_{\pi/2} \cdot 1_\alpha$ sea:

- ↑ a) Un número real positivo. ¿De qué número se trata? (*Soluc:* $\alpha=3\pi/2; 3$)
 ↓ b) Un número real negativo. Ídem. (*Soluc:* $\alpha=\pi/2; -3$)

- 47.** Hallar el valor de α para que el cociente $5_\pi : 3_\alpha$ sea:

- a) Un número real positivo. (*Soluc:* $\alpha=\pi$)
 b) Un número real negativo. (*Soluc:* $\alpha=0$)
 c) Un número imaginario puro con su parte imaginaria positiva. (*Soluc:* $\alpha=\pi/2$)
 d) Un número imaginario puro con su parte imaginaria negativa. (*Soluc:* $\alpha=3\pi/2$)
 e) “ “ “ situado en la bisectriz del 2º cuadrante. (*Soluc:* $\alpha=\pi/4$)

- 48.** Sin necesidad de efectuar el producto en binómica, hallar cuánto ha de valer **m** para que el complejo

↑ $z=(m-2i)(2+4i)$ tenga módulo 10 (*Soluc:* $m=\pm 1$)

- ↓ **49.** Sin necesidad de efectuar el cociente, determinar el valor de **a** para que el módulo del complejo $z = \frac{a+2i}{1-i}$ sea 2 (*Soluc:* $a=\pm 2$)

- 50.** (*) Hallar dos números complejos sabiendo que su producto es -8 y el cociente de uno entre el cuadrado del otro es la unidad. (Ayuda: utilizar la forma polar) (*Soluc:* $z_1=4_{120^\circ}$ y $z_2=2_{60^\circ}$)

- 51.** (*) Hallar dos números complejos sabiendo que su producto es 4 y el cociente de uno entre el cuadrado del otro es 2 (*Soluc:* $z_1 = (2\sqrt[3]{4})_{\circ^\circ}$ y $z_2 = (\sqrt[3]{2})_{\circ^\circ}$)

- 52.** Interpretar geométricamente el resultado de multiplicar el complejo $z=a+bi=r_\alpha$ por la unidad imaginaria i .
 (*Soluc:* Se trata de una rotación de 90° en el plano complejo)

- 53.** Calcular $\cos 75^\circ$ y $\operatorname{sen} 75^\circ$ mediante el producto $1_{30^\circ} \cdot 1_{45^\circ}$ (*Soluc:* $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{sen} 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$)

- 54. a)** Hallar **en binómica** un \mathbb{C} tal que su cuadrado sea igual a su conjugado. (*Soluc:* $z_1=0; z_2=1; z_3=-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; z_4=-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$)

- b)** Hacer el problema anterior **en polar** y observar que se obtiene el mismo resultado. ¿Qué forma es más conveniente?

Potencias en forma polar:

55. Calcular, aplicando el método más apropiado (es decir, operando en polar o en binómica) en cada caso; dar el resultado en forma binómica (Se recomienda comprobar con Derive o similar):

| | | | |
|--|--|--|--|
| a) $(1+i)^2$ | (Soluc: $2i$) | o) $(\sqrt{3}-i)^5$ | (Soluc: $-16\sqrt{3}-16i$) |
| b) $(2-2i)^2$ | (Soluc: $-8i$) | p) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}\right)^3$ | (Soluc: $27i$) |
| c) $(1+i)^3$ | (Soluc: $-2+2i$) | q) $(-1+i)^{30}$ | (Soluc: $2^{15}i$) |
| d) $(2+3i)^3$ | (Soluc: $-46+9i$) | r) $\frac{(-1+i)^2}{(-i+1)^3}$ | (Soluc: $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$) |
| e) $(1-i)^4$ | (Soluc: -4) | s) $(2+2\sqrt{3}i)^4$ | (Soluc: $-128-128\sqrt{3}i$) |
| f) $(-2+i)^5$ | (Soluc: $38+41i$) | t) $(4+4\sqrt{3}i)^4$ | (Soluc: $-2048-2048\sqrt{3}i$) |
| g) $\frac{(1+i)^2}{4+i}$ | (Soluc: $\frac{2}{17} + \frac{8}{17}i$) | u) $(2+2\sqrt{3}i)^2$ | (Soluc: $-8+8\sqrt{3}i$) |
| h) $\frac{2+i}{(1+i)^2}$ | (Soluc: $\frac{1}{2} - i$) | v) $(1+i)^5$ | (Soluc: $-4-4i$) |
| i) $(i^4+i^{-13})^3$ | (Soluc: $-2-2i$) | w) $(1+2i)^3$ | (Soluc: $-11-2i$) |
| j) $(1+i)^{20}$ | (Soluc: -1024) | x) $(2+i^5)^3$ | (Soluc: $2+5i$) |
| k) $\left(\overline{-2-2\sqrt{3}i}\right)^6$ | (Soluc: 4096) | y) $(3+3i)^5$ | (Soluc: $-972-972i$) |
| l) $\frac{i^7 - i^{-7}}{2i}$ | (Soluc: -1) | z) $\frac{(\sqrt{3}i+1)^2}{i+\sqrt{3}}$ | (Soluc: $-\sqrt{3}+i$) |
| m) $(4-4\sqrt{3}i)^3$ | (Soluc: -512) | α) $\frac{(\sqrt{3}i+1)^2}{(1+i)(1-i)}$ | (Soluc: $-1+\sqrt{3}i$) |
| n) $(-2+2\sqrt{3}i)^4$ | (Soluc: $-128+128\sqrt{3}i$) | | |

TIPO
EXAMEN

56. Ídem (más elaborados):

| | | | |
|--|---|--|---|
| a) $\frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)^4}{\left(\frac{-9\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2}i\right) \cdot 3i}$ | (Soluc: $3_{180^\circ} = -3$) | f) $\frac{(-2\sqrt{3}-2i)^4}{(-1+\sqrt{3}i)^3 (2+2i)^2}$ | (Soluc: $4_{210^\circ} = -2\sqrt{3}-2i$) |
| b) $\frac{(2\sqrt{3}-2i)^8}{(-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i)^6}$ | (Soluc: $\left(\frac{1}{4}\right)_{30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}i$) | g) $\frac{(\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}-i)}{(1+i)^2}$ | (Soluc: $2_{150^\circ} = -\sqrt{3}+i$) |
| c) $\frac{(1-\sqrt{3}i)^3 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{2}i)}{(-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)^2}$ | (Soluc: $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$) | h) $\frac{(2-2\sqrt{3}i)^3}{(-\sqrt{3}+i)^4 \cdot i}$ | (Soluc: $4_{210^\circ} = -2\sqrt{3}-2i$) |
| d) $\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^2 (-1-i)^4}{(-1-i)^3 i^7}$ | (Soluc: $4\sqrt{2}_{135^\circ} = -4+4i$) | i) $\left[\frac{(-\sqrt{3}+i) \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)}{-6} \right]^3$ | (Soluc: i) |
| e) $\frac{(-2\sqrt{3}-2i)^5}{(-4+4\sqrt{3}i)^3 2i}$ | (Soluc: $1_{240^\circ} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$) | j) $\frac{(\sqrt{3}-i)^4}{(-2+2i)^3 \cdot 3i^{-18}}$ | (Soluc: $\approx 0,2277 + 0,0610i$) |



k) $\frac{i^{-13} \cdot (1 - \sqrt{3}i)^3}{(-i-1)^4 \cdot (-\sqrt{3}-i)}$

$\left(Soluc: 1_{60^\circ} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

m) $\frac{(1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6)^7}{(1+i+i^2+i^3+i^4+i^5)^6}$

(Soluc: 1/8)

l) $\frac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}{(1-i)^2}$ (Soluc: 2i)

57. a) Operar $\frac{(1+2i)(1-2i)}{(2+i)^2}$ en binómica. $\left(Soluc: \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right)$

b) Operar en forma polar y pasar (utilizando la calculadora) el resultado a binómica. ($Soluc: \cong 1_{305^\circ 52' 12''}$)

58. Dados los complejos $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 3i$ y $z_3 = 1 + i$, calcular las siguientes expresiones, dando el resultado en binómica (Se recomienda comprobar con Derive o similar):

a) $\frac{z_1 + z_2}{z_3}$

b) $z_1 \cdot z_3$

c) $(z_1)^4$

d) $\overline{z_2}$

$\left(Soluc: a) \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i; b) (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i; c) -8 + 8\sqrt{3}i; d) -3i \right)$

59. Dado el complejo $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, calcular $z^5 \cdot \bar{z}$ (Soluc: -64)

60. a) Aplicando la fórmula de De Moivre¹, hallar $\sin 3\alpha$ y $\cos 3\alpha$. Comprobar las expresiones obtenidas sustituyendo valores apropiados de α (p.ej. $\alpha=30^\circ$) ($Soluc: \sin 3\alpha=3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha; \cos 3\alpha=4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$)

b) Ídem para $\sin 4\alpha$ y $\cos 4\alpha$

c) Ídem para las ya conocidas $\sin 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$

Raíces de un nº complejo:

61. Calcular las siguientes raíces (dando el resultado en binómica en aquellos apartados marcados con (*)), y representarlas en el plano complejo (Se recomienda comprobar con Derive o similar):

a) $\sqrt[4]{1+i}$

(Soluc: $\sqrt[8]{2}_{11,25^\circ}; \sqrt[8]{2}_{101,25^\circ}; \sqrt[8]{2}_{191,25^\circ}; \sqrt[8]{2}_{281,25^\circ}$)

b) $\sqrt[3]{1-i}$

(Soluc: $\sqrt[6]{2}_{105^\circ}; \sqrt[6]{2}_{225^\circ}; \sqrt[6]{2}_{345^\circ}$)

(*) c) $\sqrt[4]{\frac{-4}{1-\sqrt{3}i}}$

(Soluc: $\sqrt[4]{2}_{60^\circ}; \sqrt[4]{2}_{150^\circ}; \sqrt[4]{2}_{240^\circ}; \sqrt[4]{2}_{330^\circ}$)

d) $\sqrt[3]{\frac{-1+3i}{2-i}}$

(Soluc: $\sqrt[6]{2}_{45^\circ}; \sqrt[6]{2}_{165^\circ}; \sqrt[6]{2}_{285^\circ}$)

(*) e) $\sqrt[3]{-i}$

$\left(Soluc: i; -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i \right)$

(*) f) $\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}$

$\left(Soluc: \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; -0,97 + 0,26i; 0,26 - 0,97i \right)$

¹ Abraham De Moivre (1667-1754), matemático francés. Como dato curioso, parece ser que al final de sus días predijo exactamente la fecha de su propia muerte: se dio cuenta de que cada día dormía 15 minutos más que el día anterior; a partir de ahí, conjeturó que el descanso eterno le llegaría el día que durmiera durante 24 horas. Ese día aciago, calculado por él mismo, resultó ser el 27 de noviembre de 1754.



(*) g) \sqrt{i}

$$\left(\text{Soluc: } \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

h) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$

$$(Soluc: 0,89_{95^\circ}, 0,89_{215^\circ}, 0,89_{335^\circ})$$

(*) i) $\sqrt[3]{8i}$

$$(Soluc: 2i; \pm \sqrt{3} + i)$$

(*) j) $\sqrt[4]{-1}$

$$\left(\text{Soluc: } \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

(*) k) $\sqrt[3]{8}$

$$(Soluc: 2; -1 \pm \sqrt{3}i)$$

(*) l) $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$

$$\left(\text{Soluc: } \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i; -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i; \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i \right)$$

m) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i}$

$$(Soluc: 2_{100^\circ}, 2_{220^\circ}, 2_{340^\circ})$$

(*) n) $\sqrt[3]{\frac{8+8i}{1-i}}$

$$\left(\text{Soluc: } -2i; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + i \right)$$

o) $\sqrt[4]{-2+2i}$

$$(Soluc: \sqrt[8]{8}_{33,75^\circ}, \sqrt[8]{8}_{123,75^\circ}, \sqrt[8]{8}_{213,75^\circ}, \sqrt[8]{8}_{303,75^\circ})$$

(*) p) $\sqrt[4]{-16}$

$$(Soluc: \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i)$$

q) $\sqrt[5]{-243}$

$$(Soluc: 3_{30^\circ}, 3_{108^\circ}, 3_{180^\circ}, 3_{252^\circ}, 3_{324^\circ})$$

(*) r) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$

$$(Soluc: \sqrt{3}+i; -1+\sqrt{3}i; -\sqrt{3}-i; 1-\sqrt{3}i)$$

(*) s) $\sqrt[3]{\frac{-1-i}{-1+i}}$

(*) t) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

(*) u) $\sqrt[3]{\frac{-8+8i}{1+i}}$

(*) v) $\sqrt[4]{\frac{-4}{1-\sqrt{3}i}}$

(*) w) $\sqrt[4]{\frac{-16i}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}}$

x) $\sqrt[3]{-1}$

y) $\sqrt{-36}$

z) $\sqrt[3]{-27}$

a) $\sqrt[5]{729i}$

β) $\sqrt[4]{16_{180^\circ}}$

(*) γ) $\sqrt[4]{\frac{8\sqrt{3}+8i}{-\sqrt{3}+i}}$

$$\left(\text{Soluc: } \frac{\sqrt[4]{8}}{2} + \frac{\sqrt[4]{72}}{2}i; -\frac{\sqrt[4]{72}}{2} + \frac{\sqrt[4]{8}}{2}i; -\frac{\sqrt[4]{8}}{2} - \frac{\sqrt[4]{72}}{2}i; \frac{\sqrt[4]{72}}{2} - \frac{\sqrt[4]{8}}{2}i \right)$$

(*) δ) $\sqrt[3]{\frac{i^6 + i^{-6}}{-2i}}$

62. TEORÍA:

- El número $4+3i$ es la raíz cuarta de un cierto complejo z ; hallar las otras tres raíces.
- ¿Pueden ser $2+i$, $-2+i$, $-1-2i$ y $1-2i$ las raíces cuartas de un complejo? Justificar la respuesta.
- ¿Pueden ser 2_{28° , 2_{100° , 2_{172° , 2_{244° y 2_{316° las raíces de un complejo? ¿De cuál?
- El complejo 3_{40° es vértice de un pentágono regular. Hallar los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.
- Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es $i+i$. Hallar z y las otras raíces cúbicas.

63. a) Hallar las raíces cúbicas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

$$\left(\text{Soluc: } 1; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

b) Hallar las raíces cuartas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

(Soluc: $\pm 1; \pm i$)

c) Hallar las raíces quintas de la unidad en forma polar, y dibujarlas.

(Soluc: $1_{0^\circ}, 1_{72^\circ}, 1_{144^\circ}, 1_{216^\circ}, 1_{288^\circ}$)

d) Hallar las raíces sextas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas. (Soluc: $\pm 1; \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$)

64. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los complejos (Se recomienda comprobar con Derive o similar). Dibujar los afijos de las raíces:

a) $x^3+8=0$ (Soluc: $-2, 1 \pm \sqrt{3}i$)

b) $x^4-16=0$ (Soluc: $\pm 2, \pm 2i$)

c) (*) $ix^4+16=0$

d) (*) $x^4+1=0$ (Soluc: $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$)