

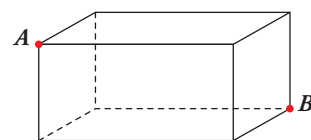
Resuelve

Página 173

Cálculo de distancias

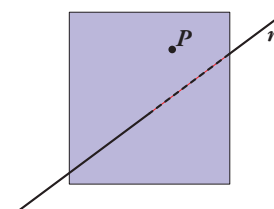
1. Recordando cómo se obtiene la diagonal de un ortoedro en función de sus dimensiones, halla la distancia entre los puntos $A(4, -2, -7)$ y $B(7, 2, 5)$.

$$\text{dist}(A, B) = \sqrt{(7-4)^2 + (2-(-2))^2 + (5-(-7))^2} = 13 \text{ u}$$



2. Halla la distancia del punto $P(8, 6, 12)$ a la recta r , obteniendo previamente la ecuación de un plano que pasa por el punto y es perpendicular a la recta.

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - \lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases}$$



- Ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a r :
 $0 \cdot (x-8) - 1 \cdot (y-6) + 2 \cdot (z-12) = 0$; es decir, $\pi: -y + 2z - 18 = 0$

- Punto, Q , de corte de r y π :
 $-(1-\lambda) + 2(7+2\lambda) - 18 = 0$
 $-1 + \lambda + 14 + 4\lambda - 18 = 0$
 $5\lambda - 5 = 0 \rightarrow \lambda = 1$

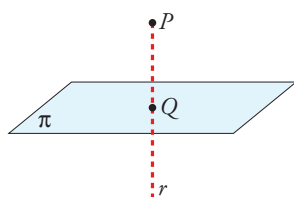
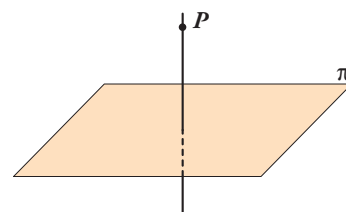
El punto es $Q(2, 0, 9)$

- Calculamos la distancia:

$$\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-6, -6, -3)| = \sqrt{36 + 36 + 9} = \sqrt{81} = 9 \text{ u}$$

3. Para hallar la distancia del punto $P(4, 35, 70)$ al plano π , obtén previamente las ecuaciones de una recta que pasa por P y es perpendicular a π .

$$\pi: 5y + 12z - 1 = 0$$



- Hallamos la ecuación de la recta, r , que pasa por P y es perpendicular a π .
- Obtenemos el punto, Q , de intersección de r y π .
- La distancia de P a π es igual a la distancia entre P y Q .

Para el punto y el plano dados:

- Recta, r , que pasa por P y es perpendicular a π :

$$r: \begin{cases} x = 4 \\ y = 35 + 5\lambda \\ z = 70 + 12\lambda \end{cases}$$

- Punto, Q , de intersección de r y π :

$$5(35 + 5\lambda) + 12(70 + 12\lambda) - 1 = 0$$

$$175 + 25\lambda + 840 + 144\lambda - 1 = 0$$

$$169\lambda + 1014 = 0 \rightarrow \lambda = -6$$

El punto es $Q(4, 5, -2)$.

- Calculamos la distancia:

$$\text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(0, -30, -72)| = \sqrt{900 + 5184} = \sqrt{6084} = 78 \text{ u}$$

1 Direcciones de rectas y planos

Página 174

- 1** Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(1, 0, 7)$ y es perpendicular al plano:

$$5x - 3z + 4 = 0$$

El vector normal al plano, $\vec{n}(5, 0, -3)$, es un vector dirección de la recta r que buscamos. Por tanto, las ecuaciones paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 0 \\ z = 7 - 3\lambda \end{cases}$$

- 2** Halla la ecuación implícita del plano que pasa por $(1, -3, 5)$ y es perpendicular a la recta:

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y+7}{-6} = \frac{z}{1}$$

Si el plano que buscamos, π , es perpendicular a la recta dada, un vector normal al plano es el vector dirección de la recta: $(5, -6, 1)$. Por tanto, la ecuación de π es:

$$5(x-1) - 6(y+3) + 1(z-5) = 0 \rightarrow 5x - 6y + z - 28 = 0$$

- 3** Halla la ecuación del plano paralelo a $5x - y + 4 = 0$ que pasa por $(1, 0, -3)$.

Si son paralelos, el vector normal es el mismo, $(5, -1, 0)$. Por tanto, la ecuación del plano que buscamos es:

$$5(x-1) - y + 0(z+3) = 0 \rightarrow 5x - y - 5 = 0$$

- 4** Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por $(5, -7, -2)$.

$$r: \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 4 - 6\lambda \end{cases}$$

Si el plano que buscamos, π , es perpendicular a r , un vector normal al plano es el vector dirección de la recta: $(5, 2, -6)$.

Por tanto, la ecuación de π es:

$$5(x-5) + 2(y+7) - 6(z+2) = 0 \rightarrow 5x + 2y - 6z - 23 = 0$$

Página 175

- 5** Halla la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s :

$$r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}$$

El plano pasa por $(5, -1, 8)$ y es paralelo a $(1, 0, 2)$ y a $(3, -1, 4)$. Un vector normal al plano es:

$$(1, 0, 2) \times (3, -1, 4) = (2, 2, -1)$$

La ecuación del plano es:

$$2(x-5) + 2(y+1) - 1(z-8) = 0; \text{ es decir: } 2x + 2y - z = 0$$

6 Determina las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a la recta $r: \begin{cases} 3x - 5y + 7z - 4 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$

que pasa por $P(0, -1, -3)$.

Un vector dirección de la recta es:

$$(3, -5, 7) \times (1, -2, 1) = (9, 4, -1)$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 9\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$$

2 Medida de ángulos entre rectas y planos

Página 177

1 Halla el ángulo entre las rectas r y s :

$$r: \begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

El vector dirección de r es $\vec{d}_r = (-5, 3, 0) = \vec{u}$.

El vector dirección de s es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$\vec{d}_s = (1, -2, 3) \times (2, -1, 0) = (3, 6, 3) // (1, 2, 1) = \vec{v}$$

Por tanto:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|(-5, 3, 0) \cdot (1, 2, 1)|}{\sqrt{25 + 9 + 0} \sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{34} \sqrt{6}} = 0,070014 \rightarrow \alpha = 85^\circ 59' 7''$$

2 Calcula el ángulo que forma la recta $r: \frac{x-3}{7} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$ con el plano $\pi: x + 3y - z + 1 = 0$.

Llamamos $90^\circ - \alpha$ al ángulo formado por las direcciones de $\vec{d}$ y $\vec{n}$ sin tener en cuenta sus sentidos.

$$\vec{d} (7, -1, 3) // r$$

$$\vec{n} (1, 3, -1) \perp \pi$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|7 - 3 - 3|}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{649}} \approx 0,039$$

$$90^\circ - \alpha = 87^\circ 45' 1'' \rightarrow \alpha = 2^\circ 14' 59''$$

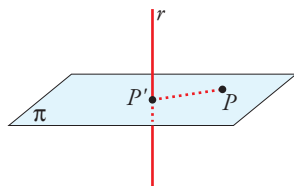
3 Distancias entre puntos, rectas y planos

Página 179

1 Halla razonadamente la distancia de $P(5, 6, 6)$ a la recta $r: (5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$.

Hazlo por cada uno de los tres métodos que has aprendido.

— Solución, obteniendo previamente el punto P' :



- Plano, π , que pasa por P y es perpendicular a r :

$$5(x - 5) - 1(y - 6) + 1(z - 6) = 0$$

$$\text{es decir: } \pi: 5x - y + z - 25 = 0$$

- Intersección, P' , de π y r :

$$5(5\lambda) - (2 - \lambda) + \lambda - 25 = 0$$

$$25\lambda - 2 + \lambda + \lambda - 25 = 0$$

$$27\lambda - 27 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

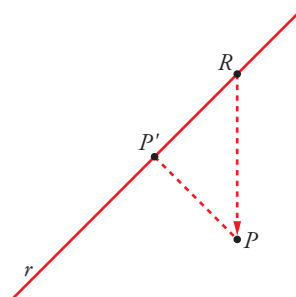
El punto es $P'(5, 1, 1)$

- Distancia entre P y r :

$$\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(0, -5, -5)| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07 \text{ u}$$

— Segundo método:

$R(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$ es un punto genérico de la recta r .



El vector $\overrightarrow{RP} (5 - 5\lambda, 4 + \lambda, 6 - \lambda)$ es variable.

El vector que nos interesa es perpendicular a la recta. Por tanto, cumple:

$$(5, -1, 1) \cdot \overrightarrow{RP} = 0; \text{ es decir:}$$

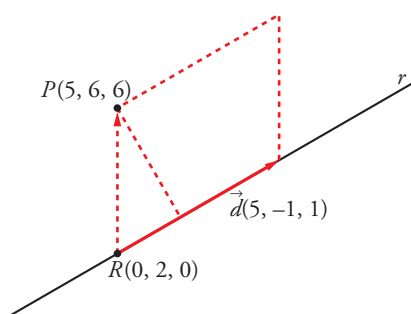
$$5(5 - 5\lambda) - 1(4 + \lambda) + 1(6 - \lambda) = 0$$

$$25 - 25\lambda - 4 - \lambda + 6 - \lambda = 0$$

$$-27\lambda + 27 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

El resto, es igual que con el método anterior.

— Solución directa a partir del producto vectorial:



$$\text{dist}(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$$

$$\overrightarrow{RP} \times \vec{d} = (5, 4, 6) \times (5, -1, 1) = (10, 25, -25)$$

$$|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}| = \sqrt{100 + 625 + 625} = \sqrt{1350}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{25 + 1 + 1} = \sqrt{27}$$

$$\text{dist}(P, r) = \frac{\sqrt{1350}}{\sqrt{27}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07 \text{ u}$$

Página 180

2 Halla la distancia de P a π por el método de la recta perpendicular y aplicando la fórmula.

$$P(11, 7, 9) \quad \pi: 3x + 4z + 6 = 0$$

La recta perpendicular a π que pasa por P tiene por ecuación:

$$r: \begin{cases} x = 11 + 3\lambda \\ y = 7 \\ z = 9 + 4\lambda \end{cases}$$

$$P' = r \cap \pi \rightarrow 3(11 + 3\lambda) + 4(9 + 4\lambda) + 6 = 0 \rightarrow \lambda = -3$$

$$P'(2, 7, -3)$$

$$\text{dist}(P, P') = \text{dist}(P, \pi) = \sqrt{81 + 0 + 144} = 15$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|33 + 36 + 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{75}{5} = 15 \text{ u}$$

3 Halla las distancias a $\pi: 5x - 11y + 2z - 7 = 0$ de los puntos $P(5, -3, 8)$ y $Q(7, 3, \frac{5}{2})$ aplicando la fórmula.

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|25 + 33 + 16 - 7|}{\sqrt{25 + 121 + 4}} = \frac{67}{30} \sqrt{6} \text{ u}$$

$$\text{dist}(Q, \pi) = \frac{|35 - 33 + 5 - 7|}{\sqrt{25 + 121 + 4}} = 0 \text{ u} \rightarrow Q \in \pi$$

Página 181

4 Calcula la distancia entre la recta r y el plano π siguientes:

$$r: (1 - 3\lambda, 2 + \lambda, 1 - \lambda) \quad \pi: x + 3y = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{d}(-3, 1, -1) // r \\ \vec{n}(1, 3, 0) \perp \pi \end{array} \right\} \vec{d} \cdot \vec{n} = -3 + 3 = 0 \rightarrow \vec{d} \perp \vec{n} \rightarrow r // \pi$$

Puesto que la recta es paralela al plano (o, acaso, contenida en él), la distancia de r a π se obtiene calculando la distancia de cualquier punto de r a π :

$$\text{dist}(r, \pi) = \text{dist}[(1, 2, 1), \pi] = \frac{|1 + 6|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{10}} \approx 2,21 \text{ u}$$

5 Calcula la distancia entre estos planos:

$$\pi: y - 5z + 4 = 0 \quad \pi': 2y - 10z = 0$$

Los planos son paralelos, pues sus coeficientes son proporcionales. Por tanto, la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro:

$P(0, 5, 1)$ es un punto de π' . Por tanto:

$$\text{dist}(\pi, \pi') = \text{dist}(P, \pi) = \frac{|5 - 5 + 4|}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{4}{\sqrt{26}} \approx 0,78 \text{ u}$$

Página 183

6 Calcula la distancia entre las dos rectas dadas mediante cada uno de los tres métodos aprendidos:

$$\text{a) } r: \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + 5\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases} \quad \text{b) } r: \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 5 + 7\mu \\ y = 1 - 5\mu \\ z = 1 - 5\mu \end{cases}$$

a) • Primer método:

Hallamos el plano, π , que contiene a r y es paralelo a s :

$$\left. \begin{array}{l} (12, 0, 5) // r \\ (0, 1, 0) // s \end{array} \right\} (12, 0, 5) \times (0, 1, 0) = (-5, 0, 12) \perp \pi$$

El punto $(13, 2, 8)$ es de r , y, por tanto, de π .

Ecuación de π :

$$-5(x - 13) + 0(y - 2) + 12(z - 8) = 0 \rightarrow -5x + 12z - 31 = 0$$

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(s, \pi) = \text{dist}[(6, 6, -9), \pi] = \frac{|-30 - 108 - 31|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{169}{13} = 13 \text{ u}$$

• Segundo método:

Punto genérico de r : $R(13 + 12\lambda, 2, 8 + 5\lambda)$

Punto genérico de s : $S(6, 6 + \mu, -9)$

Un vector genérico que tenga su origen en r y su extremo en s es:

$$\overrightarrow{RS} = (-7 - 12\lambda, 4 + \mu, -17 - 5\lambda)$$

De todos los posibles vectores $\overrightarrow{RS}$, buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \cdot (12, 0, 5) = 0 \rightarrow -169\lambda - 169 = 0 \rightarrow \lambda = -1 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 1, 0) = 0 \rightarrow 4 + \mu = 0 \rightarrow \mu = -4 \end{array} \right.$$

Sustituyendo en r y en s , obtenemos los puntos R y S : $R(1, 2, 3)$, $S(6, 2, -9)$

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(R, S) = |(5, 0, -12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ u}$$

• Tercer método:

$$\text{dist}(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d}']|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$$

$$R(13, 2, 8) \quad \vec{d} (12, 0, 5)$$

$$S(6, 6, -9) \quad \vec{d}' (0, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{RS} (-7, 4, -17)$$

$$[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d}'] = \begin{vmatrix} -7 & 4 & -17 \\ 12 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -169 \rightarrow \text{Volumen} = 169$$

$$|\vec{d} \times \vec{d}'| = |(-5, 0, 12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\text{Por tanto, } \text{dist}(r, s) = \frac{169}{13} = 13 \text{ u}$$

b) • Primer método:

Hallamos el plano, π , que contiene a r y es paralelo a s :

$$\left. \begin{array}{l} (5, -1, 1) // r \\ (7, -5, -5) // s \end{array} \right\} (5, -1, 1) \times (7, -5, -5) = (10, 32, -18) // (5, 16, -9) \perp \pi$$

El punto $(0, 2, 0)$ es de r , y, por tanto, de π .

Ecuación de π :

$$5(x-0) + 16(y-2) - 9(z-0) = 0 \rightarrow 5x + 16y - 9z - 32 = 0$$

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(s, \pi) = \text{dist}[(5, 1, 1), \pi] = \frac{|25 + 16 - 9 - 32|}{\sqrt{25 + 256 + 81}} = 0 \text{ u}$$

(Las rectas r y s se cortan).

• Segundo método:

Punto genérico de r : $R(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$

Punto genérico de s : $S(5 + 7\mu, 1 - 5\mu, 1 - 5\mu)$

Un vector genérico que tenga su origen en r y su extremo en s es:

$$\overrightarrow{RS} = (5 + 7\mu - 5\lambda, -1 - 5\mu + \lambda, 1 - 5\mu - \lambda)$$

De todos los posibles vectores $\overrightarrow{RS}$, buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \cdot (5, -1, 1) = 0 \rightarrow 25 + 35\mu - 27\lambda = 0 \rightarrow \mu = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (7, -5, -5) = 0 \rightarrow 35 + 99\mu - 35\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1 \end{array} \right.$$

Sustituyendo en r y en s , obtenemos los puntos R y S : $R(5, 1, 1)$, $S(5, 1, 1)$.

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(R, S) = 0 \text{ u}$$

• Tercer método:

$$\text{dist}(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d}']|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$$

$$R(0, 2, 0) \quad \vec{d}(5, -1, 1)$$

$$S(5, 1, 1) \quad \vec{d}'(7, -5, -5)$$

$$\overrightarrow{RS}(5, -1, 1)$$

$$[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d}'] = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0 \text{ (las dos primeras filas son iguales).}$$

Por tanto, $\text{dist}(r, s) = 0 \text{ u}$

4 Medidas de áreas y volúmenes

Página 184

- 1** Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en estos puntos: $A(1, 3, 5)$, $B(2, 5, 8)$ y $C(5, 1, -1)$.

$$\overrightarrow{AB} = (2, 5, 8) - (1, 3, 5) = (1, 2, 3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (5, 1, -1) - (1, 3, 5) = (4, -2, -6)$$

$$\text{Área triángulo} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} |(1, 2, 3) \times (4, -2, -6)| = \frac{1}{2} |(-6, 18, -10)| = \frac{1}{2} 2\sqrt{115} = \sqrt{115} \text{ u}^2$$

- 2** Calcula el volumen de un tetraedro cuyos vértices son $A(2, 1, 4)$, $B(1, 0, 2)$, $C(4, 3, 2)$ y $D(1, 5, 6)$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(-1, -1, -2) \\ \overrightarrow{AC}(2, 2, -2) \\ \overrightarrow{AD}(-1, 4, 2) \end{array} \right\} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30$$

$$\text{Volumen} = \frac{30}{6} = 5 \text{ u}^3$$

5 Lugares geométricos en el espacio

Página 185

1 Halla el L.G. de los puntos que equidistan de:

a) $A(4, -1, 7)$ y $B(-2, 5, 1)$

b) $\pi: x + y + z - 2 = 0$ y $\pi': x - y + z - 2 = 0$

c) $\pi: x - 3y + 2z - 8 = 0$ y $\pi': x - 3y + 2z = 0$

a) $\text{dist}(X, A) = \text{dist}(X, B)$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2}$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 14z + 49 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 2z + 1$$

$$-12x + 12y - 12z + 36 = 0 \rightarrow x - y + z - 3 = 0$$

Es un plano: el plano mediador del segmento AB .

b) $\text{dist}(X, \pi) = \text{dist}(X, \pi')$

$$\frac{|x + y + z - 2|}{\sqrt{3}} = \frac{|x - y + z - 2|}{\sqrt{3}} \quad \text{Dos posibilidades:}$$

• $x + y + z - 2 = x - y + z - 2 \rightarrow 2y = 0 \rightarrow y = 0$

• $x + y + z - 2 = -x + y + z - 2 \rightarrow 2x + 2z - 4 = 0 \rightarrow x + z - 2 = 0$

Son dos planos: los planos bisectores de los ángulos diedros formados por π y π' . Los dos planos obtenidos se cortan en la recta r determinada por los puntos $(1, 0, 1)$ y $(0, 0, 2)$, al igual que π y π' .

Además, son perpendiculares, pues $(0, 1, 0) \cdot (1, 0, 1) = 0$.

c) $\text{dist}(X, \pi) = \text{dist}(X, \pi')$

$$\frac{|x - 3y + 2z - 8|}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{|x - 3y + 2z|}{\sqrt{1+9+4}} \quad \text{Dos posibilidades:}$$

• $x - 3y + 2z - 8 = x - 3y + 2z \rightarrow -8 = 0 \rightarrow \text{Imposible.}$

• $x - 3y + 2z - 8 = -x + 3y - 2z \rightarrow 2x - 6y + 4z - 8 = 0 \rightarrow x - 3y + 2z - 4 = 0$

Los planos π y π' son paralelos. El plano obtenido es también paralelo a ellos.

Página 186

2 Averigua si $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10y + 25 = 0$ corresponde a la ecuación de una esfera, y halla su centro y su radio.

$$r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D} = \sqrt{1 + 25 + 0 - 25} = 1$$

Es una esfera de radio 1. Su centro es $(-1, 5, 0)$.

3 Halla el radio de la circunferencia en la que el plano $4x - 3z - 3 = 0$ corta a la esfera $(x-2)^2 + (y+5)^2 + z^2 = 169$.

La esfera tiene el centro en $Q(2, -5, 0)$ y su radio es $R = 13$.

La distancia de Q al plano es:

$$d = \frac{|8 + 15 - 3|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{20}{5} = 4$$

Por tanto: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{169 - 16} = \sqrt{153}$

El radio de la circunferencia es $\sqrt{153}$.

- 4** Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya suma de cuadrados de distancias a $O(0, 0, 0)$ y $Q(10, 0, 0)$ es 68.

Tras efectuar los cálculos, comprueba que la superficie resulta ser una esfera de centro $(5, 0, 0)$ y radio 3.

$$(x^2 + y^2 + z^2) + [(x - 10)^2 + y^2 + z^2] = 68$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + x^2 - 20x + 100 + y^2 + z^2 = 68$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 20x + 32 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 16 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 - 9 = 0$$

$$(x - 5)^2 + y^2 + z^2 = 9 \rightarrow \text{Es una esfera de centro } (5, 0, 0) \text{ y radio } 3.$$

Página 187

- 5** Halla el L.G. de los puntos cuya suma de distancias a $F(0, 0, 5)$ y $F'(0, 0, -5)$ es 26.

$$\text{dist}(X, F) + \text{dist}(X, F') = 26$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 5)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 26$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 5)^2} = 26 - \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2}$$

$$52 \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 676 + x^2 + y^2 + z^2 + 25 + 10z - x^2 - y^2 - z^2 - 25 + 10z$$

$$52 \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 20x + 676$$

$$13 \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 5z + 169$$

$$169 [x^2 + y^2 + (z + 5)^2] = 25z^2 + 1690z + 28561$$

$$169 [x^2 + y^2 + z^2 + 10z + 25] = 25z^2 + 1690z + 28561$$

$$169x^2 + 169y^2 + 169z^2 + 1690z + 4225 = 25z^2 + 1690z + 28561$$

$$169x^2 + 169y^2 + 144z^2 = 24336$$

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{144} + \frac{z^2}{169} = 1 \rightarrow \text{Es un elipsoide.}$$

- 6** Halla el L.G. de los puntos cuya diferencia de distancias a $F(5, 0, 0)$ y $F'(-5, 0, 0)$ es 6.

$$|\text{dist}(X, F) - \text{dist}(X, F')| = 6$$

$$\sqrt{(x - 5)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2} = \pm 6$$

$$\sqrt{(x - 5)^2 + y^2 + z^2} = \pm 6 + \sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2}$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 = 36 + (x + 5)^2 + y^2 + z^2 \pm 12 \sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2}$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 = 36 + x^2 + 10x + 25 + y^2 + z^2 \pm 12 \sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\pm 12 \sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2} = 20x + 36$$

$$\pm 3 \sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2} = 5x + 9$$

$$9[x^2 + 10x + 25 + y^2 + z^2] = 25x^2 + 90x + 81$$

$$9x^2 + 90x + 225 + 9y^2 + 9z^2 = 25x^2 + 90x + 81$$

$$-16x^2 + 9y^2 + 9z^2 = -144$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{16} = 1 \rightarrow \text{Es un hiperboloide.}$$

7 Halla el L.G. de los puntos que equidistan del plano $x + \frac{1}{4} = 0$ y del punto $\left(\frac{1}{4}, 0, 0\right)$.

¿A qué se parece la ecuación obtenida?

$$\text{dist}(X, F) = \text{dist}(X, \pi), \text{ donde } \pi: x + \frac{1}{4} = 0 \text{ y } F\left(\frac{1}{4}, 0, 0\right).$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 + z^2} = \left|x + \frac{1}{4}\right|$$

$$\cancel{x^2} - \frac{1}{2}x + \cancel{\frac{1}{16}} + y^2 + z^2 = \cancel{x^2} + \frac{1}{2}x + \cancel{\frac{1}{16}}$$

$$x = y^2 + z^2$$

Es un paraboloide. Su ecuación es muy similar a la de una parábola.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 188

1. Punto simétrico respecto de un plano

Hazlo tú. Halla el punto simétrico de $A(-3, -1, 0)$ respecto del plano: $\pi: 3x - 2y + z - 7 = 0$ $A'(x, y, z)$: punto simétrico de A respecto del plano π .Recta perpendicular a π que pasa por A :

$$r: \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$M = r \cap \pi \rightarrow 3(-3 + 3\lambda) - 2(-1 - 2\lambda) + \lambda - 7 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

$$M(0, -3, 1)$$

 M es el punto medio entre A y A' .

$$(0, -3, 1) = \left(\frac{x-3}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z}{2} \right) \rightarrow A'(3, -5, 2)$$

2. Punto simétrico respecto de una recta

Hazlo tú. Halla el punto simétrico de $A(1, -1, 1)$ respecto de la recta: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{0} = z-1$ $A'(x, y, z)$: punto simétrico de A respecto de la recta.Plano perpendicular a r que pasa por A :

$$\pi: -x + z + k = 0$$

$$A \in \pi \rightarrow -1 + 1 + k = 0 \rightarrow k = 0$$

$$\pi: -x + z = 0$$

$$M = r \cap \pi \rightarrow -(2 - \lambda) + (1 + \lambda) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$M\left(\frac{3}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$$

 M es el punto medio entre A y A' .

$$\left(\frac{3}{2}, 3, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z+1}{2}\right) \rightarrow A'(2, 7, 2)$$

Página 189

4. Punto de una recta que cumple una condición

Hazlo tú. Halla los puntos de $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ cuya distancia a $P(1, 0, 2)$ sea $\sqrt{11}$.

$$A \in r \rightarrow A(\lambda, 3 - \lambda, 1 + 2\lambda)$$

$$\text{dist}(A, P) = \sqrt{(\lambda-1)^2 + (3-\lambda)^2 + (1+2\lambda-2)^2} = \sqrt{6\lambda^2 - 12\lambda + 11} = \sqrt{11} \rightarrow \lambda = 0, \lambda = 2$$

Hay dos puntos: $A_1(0, 3, 1)$ y $A_2(2, 1, 5)$

5. Distancias, ángulos, áreas**Hazlo tú.**

a) Halla la distancia del punto $P(2, 0, -1)$ a la recta $r: \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$.

b) ¿Qué ángulo forma r con el eje Z ?

a) $A \in r \rightarrow A(3, 0, -2)$

$$\vec{d}_r = (1, -2, 1) \times (1, -1, 0) = (1, 1, 1)$$

$$\vec{AP} = (2, 0, -1) - (3, 0, -2) = (-1, 0, 1)$$

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|\vec{d}_r \times \vec{AP}|}{|\vec{d}_r|} = \frac{|(1, 1, 1) \times (-1, 0, 1)|}{\sqrt{3}} = \frac{|(1, -2, 1)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \text{ u}$$

b) Eje $OZ: \begin{cases} \vec{d}(0, 0, 1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases}$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}|}{|\vec{d}_r| |\vec{d}|} = \frac{|1|}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$$

6. Distancia entre rectas paralelas

Hazlo tú. Halla el valor de k para el cual las rectas siguientes son paralelas:

$$r: \frac{x-1}{k} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{k} \quad s: \frac{x+1}{2k} = \frac{y}{k+3} = \frac{z-2}{2}$$

Calcula, en ese caso, la distancia entre ellas.

Para que sean paralelas:

$$\frac{k}{2k} = \frac{2}{k+3} = \frac{k}{2}$$

Simplificando en la primera fracción, tenemos que:

$$\frac{k}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow k = 1$$

Para este valor, se cumple: $\frac{2}{k+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Estas rectas son paralelas para $k = 1$.

Cálculo de la distancia:

$$r: \begin{cases} \vec{d}_r(1, 2, 1) \\ P_r(1, 0, -3) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} \vec{d}_s(2, 4, 2) \\ P_s(-1, 0, 2) \end{cases}$$

$$\vec{P_r P_s} = (1, 0, -3) - (-1, 0, 2) = (2, 0, -5)$$

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(P_s, r) = \frac{|\vec{d}_r \times \vec{P_r P_s}|}{|\vec{d}_r|} = \frac{|(1, 2, 1) \times (2, 0, -5)|}{\sqrt{6}} = \frac{|(10, -3, -4)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{100+9+16}}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{\frac{5}{6}} \text{ u}$$

Página 190

7. Distancia entre rectas que se cruzan

Hazlo tú.

a) Comprueba que las rectas r y s se cruzan y calcula la distancia entre ellas.

$$r: x+1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{2} \quad s: \begin{cases} x = t \\ y = 1+t \\ z = 2-t \end{cases}$$

b) Halla la ecuación de los planos paralelos a r y s y que distan $\sqrt{14}$ u de s .

$$a) r: \begin{cases} \vec{d}_r(1, -1, 2) \\ P_r(-1, 1, -3) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} \vec{d}_s(1, 1, -1) \\ P_s(0, 1, 2) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (0, 1, 2) - (-1, 1, -3) = (1, 0, 5)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Los vectores son linealmente independientes, no están en un mismo plano, por tanto, r y s se cruzan.b) π : plano paralelo a r y s :

$$\vec{n}_\pi = (1, -1, 2) \times (1, 1, -1) = (-1, 3, 2)$$

$$\pi: -x + 3y + 2z + k = 0$$

$$dist(s, \pi) = dist(P_s, \pi) = \frac{|3 + 4 + k|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} = \sqrt{14} \rightarrow \begin{cases} \frac{7+k}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \rightarrow 7+k=14 \rightarrow k=7 \\ \frac{7+k}{\sqrt{14}} = -\sqrt{14} \rightarrow 7+k=-14 \rightarrow k=-21 \end{cases}$$

Hay dos planos que verifican la condición:

$$\pi: -x + 3y + 2z + 7 = 0$$

$$\pi': -x + 3y + 2z - 21 = 0$$

8. Proyección ortogonal de una recta sobre un plano

Hazlo tú. Halla la proyección ortogonal de la recta $\frac{x+3}{2} = \frac{1-y}{1} = \frac{z}{2}$ sobre el plano $\pi: x + 2y - 5z - 1 = 0$. π' : Plano perpendicular a π que contiene a $r \rightarrow$ contiene las direcciones $\vec{n}_\pi$ y $\vec{d}_r$.

$$\vec{n}_\pi(1, 2, -5).$$

$$r: \begin{cases} \vec{d}_r(2, -1, 2) \\ P_r(-3, 1, 0) \end{cases}$$

$$\pi': \begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi': x + 12y + 5z - 9 = 0$$

$$s: \pi' \cap \pi$$

La recta pedida es:

$$s: \begin{cases} x + 12y + 5z - 9 = 0 \\ x + 2y - 5z - 1 = 0 \end{cases}$$

Página 192

10. Lugares geométricos

Hazlo tú. Halla el L.G. de los puntos cuya distancia a $A(0, 2, 1)$ sea el doble de la distancia a $B(-1, 3, -2)$.

Punto genérico: $P(x, y, z)$

$$\text{dist}(P, A) = 2\text{dist}(P, B)$$

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} = 2\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2}$$

$$x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4\left((x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2\right)$$

$$x^2 + y^2 - 4y + z^2 - 2z + 5 - (4x^2 + 8x + 4y^2 - 24y + 4z^2 + 16z + 56) = 0$$

$$-3x^2 - 8x - 3y^2 + 20y - 3z^2 - 18z - 51 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 8x - 20y + 18z + 51 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{8}{3}x - \frac{20}{3}y + 6z + 17 = 0$$

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + (z-3)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 + 17 - \frac{197}{9} = 0$$

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + (z-3)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{44}{9}$$

Es la ecuación de una circunferencia.

Ejercicios y problemas guiados

Página 193

1. Punto más cercano a una recta

Hallar el punto que está más cercano a $P(1, 3, 0)$ de entre todos los puntos de la recta determinada por el punto $Q(-2, 2, 1)$ y el vector $\vec{v}(1, 1, 1)$.

Calcular la distancia del punto P a la recta.

a) $\pi: x + y + z + k = 0$

$$P \in \pi \rightarrow 1 + 3 + k = 0 \rightarrow k = -4$$

$$\pi: x + y + z - 4 = 0$$

b) $A = r \cap \pi: (-2 + \lambda) + (2 + \lambda) + (1 + \lambda) - 4 = 0 \rightarrow \lambda = 1$

$$A(-1, 3, 2)$$

c) $\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, A) = \sqrt{(1+1)^2 + (3-3)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2} \text{ u}$

2. Distancia de un punto a un plano

Determinar la relación que deben cumplir a y b para que la distancia del punto $P(a, 1, b)$ al plano determinado por los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 0, 0)$ y $C(0, 2, 1)$, sea igual a 1.

a) π : plano determinado por A , B , C .

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0) - (1, 1, 1) = (0, -1, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0, 2, 1) - (1, 1, 1) = (-1, 1, 0)$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: x + y - z - 1 = 0$$

b) $\text{dist}(P, \pi) = \frac{|a+1-b-1|}{\sqrt{3}} = 1 \text{ u}$

c) $\left. \begin{array}{l} \frac{a-b}{\sqrt{3}} = 1 \\ \frac{a-b}{\sqrt{3}} = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} a-b = \sqrt{3} \\ a-b = -\sqrt{3} \end{cases}$

3. Distancia entre rectas

Considerar el punto $Q(3, -1, 4)$ y la recta: $r: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -2t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$

a) Hallar la distancia de Q a la recta r .

b) Justificar que la recta s que pasa por Q y tiene como vector dirección $(1, -1, 1)$, no corta a r .

c) Calcular la distancia entre r y s .

a) $r: \begin{cases} \vec{d}_r(3, -2, 4) \\ P_r(-2, 0, 1) \end{cases}$

$$\overrightarrow{QP_r} = (-2, 0, 1) - (3, -1, 4) = (-5, 1, -3)$$

$$\text{dist}(Q, r) = \frac{|\overrightarrow{QP_r} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|} = \frac{|(-5, 1, -3) \times (3, -2, 4)|}{\sqrt{9+4+16}} = \frac{|(-2, 11, 7)|}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{4+121+49}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6} \text{ u}$$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow$ Son linealmente independientes y por tanto no coplanarios.

c) $\text{dist}(r, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ}, \vec{d}_r, \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \text{ u}$

4. Recta perpendicular a otra

Hallar la ecuación de la recta s que pasa por el punto $P(2, -1, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta r :

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

a) $r: \begin{cases} \vec{d}_r(1, 2, 3) \\ P_r(3, -1, 0) \end{cases}$

α es perpendicular a r y contiene a $P(2, -1, 1)$.

$$\alpha: x + 2y + 3z + k = 0$$

$$P \in \alpha \rightarrow 2 - 2 + 3 + k = 0 \rightarrow k = -3 \rightarrow \alpha: x + 2y + 3z - 3 = 0$$

β contiene a r y a P .

$$\overrightarrow{PP_r} = (3, -1, 0) - (2, -1, 1) = (1, 0, -1)$$

$$\beta: \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \beta: -2x + 4y - 2z + 10 = 0 \rightarrow \beta: x - 2y + z - 5 = 0$$

$$s: \begin{cases} x + 2y + 3z - 3 = 0 \\ x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

b) $Q = r \cap \alpha \rightarrow (3 + \lambda) + 2(-1 + 2\lambda) + 3(3\lambda) - 3 = 14\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{7}$

$$Q = \left(3 + \frac{1}{7}, -1 + 2 \cdot \frac{1}{7}, 3 \cdot \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{22}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{22}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{3}{7}\right) - (2, -1, 1) = \left(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, \frac{-4}{7}\right) = \frac{1}{7}(8, 2, -4)$$

$$s: (x, y, z) = (2, -1, 1) + t(8, 2, -4)$$

5. Puntos equidistantes

Dados los planos de ecuaciones: $\alpha: x - y + z = 0$ y $\beta: x + y - z = 2$:

a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por $A(1, 2, 3)$ y no corta a ninguno de los dos planos.

b) Determinar el punto que equidista de $A(1, 2, 3)$ y $B(2, 1, 0)$ y pertenece a la recta s intersección de α y β .

a) $\vec{n}_\alpha(1, -1, 1)$; $\vec{n}_\beta(1, 1, -1) \rightarrow$ No son proporcionales, luego los planos no son paralelos.

$$\vec{d}_r = (1, -1, 1) \times (1, 1, -1) = (0, 2, 2) = 2(0, 1, 1)$$

$$r: \begin{cases} \vec{d}_r(0, 1, 1) \\ P_r(1, 2, 3) \end{cases} \rightarrow r: (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(0, 1, 1)$$

$$b) \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \rightarrow x = 1, y = 1 + \lambda, z = \lambda \rightarrow P(1, 1 + \lambda, \lambda)$$

$$\text{dist}(P, A) = \text{dist}(P, B)$$

$$\sqrt{2\lambda^2 - 8\lambda + 10} = \sqrt{2\lambda^2 + 1} \rightarrow \lambda = \frac{9}{8}$$

$$P = \left(1, 1 + \frac{9}{8}, \frac{9}{8}\right) = \left(1, \frac{17}{8}, \frac{9}{8}\right)$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 194

Para practicar

■ Ángulos

- 1 Halla el ángulo que forman las rectas r y s en cada caso. Comprueba, previamente, que se cortan:

$$\text{a) } r: \begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = 4 + 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\text{b) } r: \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 15 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 15 + 5\lambda \end{cases}$$

$$\text{c) } r: \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \vec{d}_r(-2, 3, -2); P(5, 4, 0)$$

$$\vec{d}_s(-1, 5, 1); P'(5, 4, 0)$$

Como $P = P'$ y $\vec{d}_s$ no es proporcional a $\vec{d}_r$, entonces sabemos que se cortan en el punto P .

Para ver el ángulo que forman, hacemos el producto escalar de $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$:

$$|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s| = |(-2, 3, -2) \cdot (-1, 5, 1)| = |2 + 15 - 2| = |15|$$

$$|\vec{d}_r| = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}; |\vec{d}_s| = \sqrt{1 + 25 + 1} = \sqrt{27}$$

$$\cos \alpha = \frac{|15|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{27}} = 0,7 \rightarrow \alpha = 45^\circ 33' 42''$$

- b) Las ecuaciones paramétricas de r son:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 15 - \lambda \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\vec{d}_r(1, 1, -1); P(3, 0, 15)$$

$$\vec{d}_s(3, 2, 5); P'(3, 0, 15)$$

Como $P = P'$ y $\vec{d}_s$ no es proporcional a $\vec{d}_r$, entonces sabemos que r y s se cortan en el punto P .

$$|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s| = |(1, 1, -1) \cdot (3, 2, 5)| = 3 + 2 - 5 = 0$$

Como su producto escalar es 0, sabemos que son perpendiculares, por lo que $\alpha = 90^\circ$.

$$\text{c) } \vec{d}_r = (1, -1, 0) \times (0, 0, 1) = (-1, -1, 0) = -1(1, 1, 0)$$

$$\vec{d}_s = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$$

$$\alpha = (\widehat{r, s})$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{(1, 1, 0) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{2} \cdot 1} \right| = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \rightarrow r \perp s$$

2 Halla el valor de m para que r y s formen un ángulo de 90° :

$$r: \begin{cases} x = 2 - 5\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = m\lambda \end{cases}$$

$$\vec{d}_r(-5, 1, -1); \vec{d}_s(1, 2, m)$$

Para que r y s formen 90° , el producto escalar de $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$ tiene que ser 0:

$$\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = (-5, 1, -1) \cdot (1, 2, m) = -5 + 2 - m = 0 \rightarrow m = -3$$

3 Halla, en cada caso, el ángulo que forman la recta y el plano:

a) $r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{2}$

$\pi: x - 2y - z + 1 = 0$

b) $r: x = \lambda, y = 1 + 2\lambda, z = -2$

$\pi: 2x - y + z = 0$

c) $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$

$\pi: x + z = 17$

a) $\vec{d}(-2, 4, 2); \vec{n}(1, -2, -1)$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{|-2 - 8 - 2|}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}} = \frac{12}{12} = 1 \rightarrow 90^\circ - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Observación: Los vectores $\vec{d}$ y $\vec{n}$ tienen la misma dirección, luego la recta y el plano son perpendiculares, es decir, $\alpha = 90^\circ$.

b) $\vec{d}(1, 2, 0); \vec{n}(2, -1, 1)$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{|2 - 2 + 0|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = 0 \rightarrow 90^\circ - \alpha = 90^\circ \rightarrow \alpha = 0^\circ$$

c) $\vec{d}(2, 1, 1); \vec{n}(1, 0, 1)$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{|2 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 90^\circ - \alpha = 30^\circ \rightarrow \alpha = 60^\circ$$

4 Calcula, en cada caso, el ángulo que forman los siguientes pares de planos:

a) $\alpha: z = 3$

b) $\alpha: 2x + y - 3 = 0$

$\beta: x - y + 2z + 4 = 0$

$\beta: x + z - 1 = 0$

a) $\vec{n}_\alpha(0, 0, 1); \vec{n}_\beta(1, -1, 2)$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| |\vec{n}_\beta|} = \frac{2}{1 \cdot \sqrt{6}} = 0,816 \rightarrow \varphi = 35^\circ 15' 52''$$

b) $\vec{n}_\alpha(2, 1, 0); \vec{n}_\beta(1, 0, 1)$

$$\cos(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{|(2, 1, 0) \cdot (1, 0, 1)|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \rightarrow (\widehat{\alpha, \beta}) = \arccos \frac{2}{\sqrt{10}} = 50^\circ 47'$$

5 Calcula los tres ángulos de los triángulos cuyos vértices son:

a) $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 1)$, $C(3, 1, 1)$

b) $A(2, 7, 3)$, $B(1, 2, 5)$, $C(-1, -2, 5)$

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (3, 1, 1)$

$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{11}} = 0,73855 \rightarrow \hat{A} = 42^\circ 23' 31''$$

$\overrightarrow{BA} = (-1, -2, -1)$

$\overrightarrow{BC} = (2, -1, 0)$

$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}} = 0 \rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$

$$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 47^\circ 36' 29''$$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, -5, 2)$

$\overrightarrow{AC} = (-3, -9, 2)$

$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{52}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{94}} = 0,97922 \rightarrow \hat{A} = 11^\circ 42' 6''$$

$\overrightarrow{BA} = (1, 5, -2)$

$\overrightarrow{BC} = (-2, -4, 0)$

$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{-22}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{20}} = -0,898 \rightarrow \hat{B} = 153^\circ 54' 56''$$

$$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 14^\circ 22' 58''$$

6 Calcula el ángulo que forma el plano π con cada uno de los ejes coordenados:

$$\pi: x - 2y + z = 0$$

El ángulo entre una recta y un plano es complementario del que forma dicha recta con la dirección normal al plano.

El vector normal a π es $\vec{n}(1, -2, 1)$.

- El ángulo que forma π con el eje X , de vector director $(1, 0, 0)$, es:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|(1, 0, 0) \cdot (1, -2, 1)|}{|(1, 0, 0)| \cdot |(1, -2, 1)|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{6}} = 0,408 \rightarrow$$

$$\rightarrow 90^\circ - \alpha = 65^\circ 54' 19'' \rightarrow \alpha = 24^\circ 5' 41''$$

- El ángulo que forma π con el eje Y , de vector director $(0, 1, 0)$, es:

$$\cos(90^\circ - \beta) = \frac{|(0, 1, 0) \cdot (1, -2, 1)|}{|(0, 1, 0)| \cdot |(1, -2, 1)|} = \frac{|-2|}{\sqrt{6}} = 0,8165 \rightarrow$$

$$\rightarrow 90^\circ - \beta = 35^\circ 15' 52'' \rightarrow \beta = 54^\circ 44' 8''$$

- El ángulo que forma π con el eje Z , de vector director $(0, 0, 1)$, es:

$$\cos(90^\circ - \gamma) = \frac{|(0, 0, 1) \cdot (1, -2, 1)|}{|(0, 0, 1)| \cdot |(1, -2, 1)|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,408 \rightarrow$$

$$\rightarrow 90^\circ - \gamma = 65^\circ 54' 19'' \rightarrow \gamma = 24^\circ 5' 41''$$

7 Calcula el valor de m para que las rectas r y s formen un ángulo de 60° .

$$r: \begin{cases} x = 1 + \gamma \\ y = \sqrt{2}\gamma \\ z = 1 - \gamma \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = 1 + m\mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$$

$$\vec{d}_r = (1, \sqrt{2}, -1)$$

$$\vec{d}_s = (1, m, 1)$$

$$\alpha = (\widehat{r, s})$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{(1, \sqrt{2}, -1) \cdot (1, m, 1)}{2 \cdot \sqrt{2 + m^2}} \right| = \frac{1}{2} \rightarrow \left| \frac{\sqrt{2}m}{2 \cdot \sqrt{2 + m^2}} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{2}m}{\sqrt{2 + m^2}} = 1 \\ \frac{\sqrt{2}m}{\sqrt{2 + m^2}} = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}m = \sqrt{2 + m^2} \rightarrow m = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}m = -\sqrt{2 + m^2} \rightarrow m = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Distancias

8 Tenemos la recta r y los planos π y σ siguientes:

$$r: \begin{cases} x = 8\lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - 6\lambda \end{cases} \quad \begin{aligned} \pi: x + 2y - z &= 1 \\ \sigma: x - y + z &= 3 \end{aligned}$$

a) Halla el punto P en el que se cortan la recta r y el plano π .

b) Calcula las coordenadas del punto Q donde se cortan r y σ .

c) Obtén la distancia que separa a los puntos P y Q de los apartados anteriores.

a) La intersección de r con π la podemos hallar sustituyendo las coordenadas de r en π :

$$8\lambda + 2(2) - (3 - 6\lambda) = 1 \rightarrow \lambda = 0$$

Por lo que el punto es $P = (0, 2, 3)$.

b) De la misma forma hallamos Q :

$$8\lambda - 2 + 3 - 6\lambda = 3 \rightarrow \lambda = 1$$

Así, $Q = (8, 2, -3)$.

c) $\text{dist}(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(8, 0, -6)| = 10$ u

9 Calcula, en cada caso, la distancia entre el punto P y el plano π :

a) $P(2, -3, 1)$ $\pi: 3x - 4z = 3$ b) $P(0, 1, 3)$ $\pi: x - y - 2z + 3 = 0$

c) $P(2, 0, 1)$ $\pi: x + y - 2z = 0$ d) $P(3, -4, 1)$ $\pi: y = 3$

a) $\text{dist}(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5} = 0,2$ u

b) $\text{dist}(P, \pi) = \frac{|0 - 1 - 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{1 + 1 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} \approx 1,633$ u

c) $\text{dist}(P, \pi) = \frac{|2 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = 0$ u

d) $\text{dist}(P, \pi) = \frac{|-4 - 3|}{1} = 7$ u

- 10** Calcula la distancia entre el punto $Q(2, -1, 0)$ y el plano que contiene al punto $P(2, 0, 4)$ y a la recta:

$$s: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

El plano π , que contiene a P y a s , tiene como vectores dirección $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{PP'}$, siendo P' un punto de s como $P'(3, 2, 4)$.

Hallamos el vector normal al plano:

$$\vec{n} = \vec{d}_s \times \overrightarrow{PP'} = (-2, 3, 0) \times (1, 2, 0) = (0, 0, -7)$$

Tomamos un vector proporcional a $\vec{n}$: $(0, 0, 1)$

Por tanto, el plano es $\pi: z = 4$

$$\text{dist}(Q, \pi) = \frac{|0 - 4|}{\sqrt{1}} = 4 \text{ u}$$

- 11** Halla la distancia entre los siguientes pares de planos:

a) $\pi_1: x - 2y + 3 = 0$; $\pi_2: 2x - 4y + 1 = 0$

b) $\pi_1: 3x - 2y + z - 2 = 0$; $\pi_2: 2x - y + z = -5$

a) Vemos claramente que los dos planos son paralelos. Por tanto, tomamos un punto de P de π_1 y hallamos la distancia del punto P al plano π_2 .

$$P(-3, 0, 0) \in \pi_1$$

$$\text{dist}(P, \pi_2) = \frac{|2 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{5}{\sqrt{20}} = 1,12 \text{ u}$$

b) Los vectores normales a los dos planos no son proporcionales, por lo que los planos se cortan. La distancia es, por tanto, cero.

- 12** Halla la distancia de la recta r al plano π en cada caso:

a) $r: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 + 7\lambda \end{cases}$ $\pi: 3x - 4y - 3 = 0$

b) $r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5 \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$ $\pi: 7x - 2y - z + 1 = 0$

Lo primero que tenemos que ver es si el plano y la recta se cortan: si el vector normal al plano es perpendicular al vector dirección de la recta, entonces, o son paralelos, o la recta está contenida en el plano.

a) $\vec{d}_r(4, 3, 7)$; $\vec{n}(3, -4, 0)$

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n} = 12 - 12 = 0 \rightarrow \text{son perpendiculares}$$

Como el punto $P(2, 0, -1) \in r$ no está contenido en el plano, r y π son paralelos, por lo que la distancia de r a π es igual a la distancia de cualquier punto de r a π . Tomamos P como punto de r .

$$\text{dist}(r, \pi) = \text{dist}(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ u}$$

b) $\vec{d}_r(2, 0, 1)$

$$\vec{n}(7, -2, -1)$$

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n} = 14 - 1 = 13 \neq 0 \rightarrow \text{no son perpendiculares} \rightarrow r \text{ y } \pi \text{ se cortan.}$$

$$\text{dist}(r, \pi) = 0 \text{ u}$$

- 13** Calcula la distancia que hay entre el punto $P(3, 1, 6)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 4 + 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$ mediante los

siguientes pasos:

- Halla un plano, π , que sea perpendicular a r y que contenga a P .
- Obtén la intersección del plano hallado, π , con r . Llama a ese punto Q .
- Calcula la distancia de P a Q .

- El vector normal al plano π es el vector dirección de la recta r .

La ecuación de π es:

$$4(x - 3) + (y - 1) - 3(z - 6) = 0 \rightarrow \pi: 4x + y - 3z + 5 = 0$$

- Para hallar la intersección de π con r , sustituimos las coordenadas genéricas de r en la ecuación de π :

$$4(4 + 4\lambda) + (2 + \lambda) - 3(-1 - 3\lambda) + 5 = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

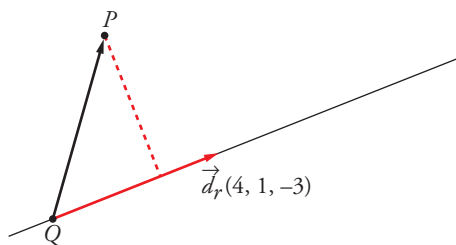
Sustituimos λ en las ecuaciones paramétricas de $r \rightarrow Q(0, 1, 2)$

- $\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, Q) = \sqrt{(3-0)^2 + (1-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5 \text{ u}$

Página 195

- 14** Calcula la distancia que hay entre la recta y el punto del ejercicio anterior mediante los siguientes pasos:

- Halla el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo Q un punto de la recta r .
- Halla el área del paralelogramo descrito por el vector $\overrightarrow{PQ}$ y el vector dirección de r .
- Divide el área calculada entre el módulo del vector dirección de r .



$$a) P(3, 1, 6), Q(4, 2, -1) \in r$$

$$\overrightarrow{PQ} (1, 1, -7)$$

$$b) \overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r = (4, -25, -3)$$

$$\text{Área del paralelogramo} = |\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r| = \sqrt{4^2 + 25^2 + 3^2} = \sqrt{650} \text{ u}^2$$

$$c) \text{dist}(P, r) = \frac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{Longitud de la base}} = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|} = \frac{\sqrt{650}}{\sqrt{26}} = 5 \text{ u}$$

- 15** Halla la distancia entre el punto $P(2, 2, -11)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 9 + 12\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = 6 + 5\lambda \end{cases}$ siguiendo los pasos de los ejercicios anteriores.

$$a) \left. \begin{matrix} P(2, 2, -11) \\ Q(9, -1, 6) \end{matrix} \right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ}(7, -3, 17)$$

$$b) \overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r = (36, 169, 15)$$

$$\text{Área del paralelogramo} = |\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r| = \sqrt{36^2 + 169^2 + 15^2} = \sqrt{30\,082} \text{ u}^2$$

$$c) \text{dist}(P, r) = \frac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{Longitud de la base}} = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|} = \frac{\sqrt{30\,082}}{\sqrt{178}} = 13 \text{ u}$$

16 Calcula la distancia que hay entre estas rectas:

$$r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -10 - 3\lambda \\ z = 9 + 5\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2 - 12\lambda \\ y = 1 + 9\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

Para ello, sigue estos pasos:

a) Halla el plano π que contenga a la recta r y sea paralelo a la recta s .

b) Halla la distancia de un punto (el que quieras) de s al plano π .

$$r: R(0, -10, 9), \vec{d}_r(4, -3, 5)$$

$$s: S(2, 1, 4), \vec{d}_s(-12, 9, 1)$$

$$a) \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (4, -3, 5) \times (-12, 9, 1) = (-48, -64, 0) // (3, 4, 0) \perp \pi$$

π está definido por un punto, $R(0, -10, 9)$, y un vector normal, $(3, 4, 0)$.

$$\pi: 3(x-0) + 4(y+10) + 0(z-9) = 0 \rightarrow \pi: 3x + 4y + 40 = 0$$

$$b) \text{dist}(r, s) = \text{dist}(s, \pi) = \text{dist}(S, \pi) = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 40}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{50}{5} = 10 \text{ u}$$

17 Halla la distancia que hay entre estas rectas siguiendo los pasos del ejercicio anterior:

$$r: \begin{cases} x = -7 + 5\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 19 + 12\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 10 - 10\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 26 - 24\lambda \end{cases}$$

$$\bullet \text{ El vector normal a } \pi \text{ será } \vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (5, 1, 12) \times (-10, 5, -24) = (-84, 0, 35)$$

$$-84(x+7) + 35(z-19) = 0 \rightarrow \pi: -84x + 35z - 1253 = 0$$

$$\bullet Q(10, -2, 26) \in s$$

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(Q, \pi) = \frac{|-84 \cdot 10 + 35 \cdot 26 - 1253|}{\sqrt{84^2 + 35^2}} = \frac{1183}{91} = 13 \text{ u}$$

18 Calcula la distancia que hay entre estas rectas:

$$r: \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 5\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$$

Para ello, haz lo siguiente:

a) Halla el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo P y Q puntos de las rectas r y s , respectivamente.

b) Halla el volumen, V , del paralelepípedo descrito por $\overrightarrow{PQ}$ y los vectores dirección de r y s .

c) Halla el área, A , del paralelogramo descrito por los vectores dirección de r y s .

d) La distancia de r a s coincide con el resultado de dividir V entre A .

$$a) r: \begin{cases} \vec{d}_r(3, 2, 1) \\ P(-2, 0, 1) \end{cases}; \quad s: \begin{cases} \vec{d}_s(-1, 5, 1) \\ Q(1, 0, -2) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 0, -2) - (-2, 0, 1) = (3, 0, -3)$$

$$b) V = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = |-60| = 60 \text{ u}^3$$

$$c) \text{Área} = |\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = |(3, 2, 1) \times (-1, 5, 1)| = |(-3, -4, 17)| = \sqrt{9+16+289} = \sqrt{314} \text{ u}^2$$

$$d) \text{dist}(r, s) = \frac{60}{\sqrt{314}} \text{ u}$$

■ Áreas y volúmenes

19 Halla el área de cada uno de los triángulos ABC donde:

a) $A(2, 7, 3)$, $B(1, -5, 4)$, $C(7, 0, 11)$

b) $A(3, -7, 4)$, $B(-1, 2, 5)$, $C(-5, 11, 6)$

Justifica la solución del segundo.

a) $\overrightarrow{AB}(-1, -12, 1)$; $\overrightarrow{AC}(5, -7, 8)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|(-89, 13, 67)|}{2} = \frac{\sqrt{12\,579}}{2} \approx 56,08 \text{ u}^2$$

b) $\overrightarrow{AB}(-4, 9, 1)$; $\overrightarrow{AC}(-8, 18, 2)$

Las coordenadas son proporcionales, luego los puntos están alineados:

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 0$$

20 Calcula, en cada caso, el volumen del tetraedro de vértices:

a) $(2, 1, 4)$; $(1, 0, 2)$; $(4, 3, 2)$; $(1, 5, 6)$

b) $(4, 1, 2)$; $(2, 0, 1)$; $(2, 3, 4)$; $(6, 5, 1)$

a) $A(2, 1, 4)$; $B(1, 0, 2)$; $C(4, 3, 2)$; $D(1, 5, 6)$

$$\overrightarrow{AB}(-1, -1, -2)$$
; $\overrightarrow{AC}(2, 2, -2)$; $\overrightarrow{AD}(-1, 4, 2)$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

b) $A(4, 1, 2)$; $B(2, 0, 1)$; $C(2, 3, 4)$; $D(6, 5, 1)$

$$\overrightarrow{AB}(-2, -1, -1)$$
; $\overrightarrow{AC}(-2, 2, 2)$; $\overrightarrow{AD}(2, 4, -1)$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 30 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

21 Calcula el área total y el volumen del tetraedro de vértices:

$$A(2, 3, 1)$$
, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$

• Área del triángulo ABC :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, -2, -3) \times (4, 0, 6) = (-12, -24, 8)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{784}}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ u}^2$$

• Área del triángulo ABD :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (2, -2, -3) \times (-7, -7, 7) = (-35, 7, -28)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{2\,058}}{2} \approx 22,68 \text{ u}^2$$

• Área del triángulo ACD :

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = (4, 0, 6) \times (-7, -7, 7) = (42, -70, -28)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{7\,448}}{2} = 43,15 \text{ u}^2$$

• Área del triángulo BCD :

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (2, 2, 9) \times (-9, -5, 10) = (65, -101, 8)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|}{2} = \frac{\sqrt{14\,490}}{2} = 60,19 \text{ u}^2$$

- Área total = $14 + 22,68 + 43,15 + 60,19 = 140,02 \text{ u}^2$
 - Volumen = $\overrightarrow{AB} (2, -2, -3); \overrightarrow{AC} (4, 0, 6); \overrightarrow{AD} (-7, -7, 7)$
- $$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{308}{6} \approx 51,33 \text{ u}^3$$

22 Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano:

$$\pi: 6x - 5y + 3z - 30 = 0$$

- Hallamos los vértices:

$$x = 0, y = 0 \rightarrow z = 10 \rightarrow A(0, 0, 10)$$

$$y = 0, z = 0 \rightarrow x = 5 \rightarrow B(5, 0, 0)$$

$$x = 0, z = 0 \rightarrow y = -6 \rightarrow C(0, -6, 0)$$

- Calculamos el volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (10 \cdot 5 \cdot 6) = 50 \text{ u}^3$$

- Lo calculamos utilizando el producto mixto:

$$V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 50 \text{ u}^3$$

23 Halla la ecuación del plano π perpendicular a la recta $r: \frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{4}$ y que pasa por el punto $(-1, 1, 0)$, y calcula el volumen de la figura limitada por π y los tres planos coordenados.

Un vector normal al plano es $\vec{n} (2, 3, 4)$.

La ecuación del plano es:

$$2(x+1) + 3(y-1) + 4(z-0) = 0 \rightarrow 2x + 3y + 4z - 1 = 0$$

Calculamos los vértices:

$$x = y = 0 \rightarrow z = \frac{1}{4} \rightarrow A\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$$

$$y = z = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow B\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \rightarrow y = \frac{1}{3} \rightarrow C\left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$$

$$O(0, 0, 0)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{144} \text{ u}^3$$

Esfera**24** Justifica cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a esferas y di su centro y su radio:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$

b) $2x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

d) $x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xz - 4 = 0$

e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 3 = 0$

f) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 30 = 0$

g) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 6y - 3/2 = 0$

a) No tiene término en z^2 . No es una esfera.

b) Los coeficientes de x^2 , y^2 , z^2 no son iguales, luego no es una esfera.

- c) Los coeficientes de x^2 , y^2 , z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 2:

$$x^2, y^2, z^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 0 - (-8) = 9 \rightarrow \text{radio} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 0)$$

- d) Los coeficientes de x^2 , y^2 , z^2 no son iguales, luego no es una esfera.

- e) Los coeficientes de x^2 , y^2 , z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2, y^2, z^2 + 2x - 4z - 1 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 4 - (-1) = 6 \rightarrow \text{radio} = \sqrt{6}$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 2)$$

- f) Los coeficientes de x^2 , y^2 , z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2, y^2, z^2 + 2x - 4z - 10 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 4 - (-10) = 15 \rightarrow \text{radio} = \sqrt{15}$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 2)$$

- g) Los coeficientes de x^2 , y^2 , z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 2:

$$x^2, y^2, z^2 + 2x - 3y - \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + \frac{9}{4} + 0 - \left(-\frac{3}{4}\right) = 4 \rightarrow \text{radio} = 2$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = \left(-1, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

25 Halla la ecuación de las siguientes esferas:

- a) Centro $(1, 0, -5)$ y radio 1.

- b) Diámetro AB con $A(3, -4, 2)$, $B(5, 2, 0)$.

- c) Centro $(4, -2, 3)$ y tangente al plano $x - z = 0$.

- d) Centro $(3, -1, 2)$ y tangente al plano YZ .

- a) $(x-1)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 1$, o bien, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 10z + 25 = 0$

- b) El centro es el punto medio de AB :

$$C = \left(\frac{3+5}{2}, -\frac{4+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (4, -1, 1)$$

El radio es la distancia de C a uno de los puntos:

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

La ecuación es:

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 11, \text{ o bien, } x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 2z + 7 = 0$$

- c) El radio es la distancia del centro $C(4, -2, 3)$ al plano $\pi: x - z = 0$:

$$r = \text{dist}(C, \pi) = \frac{|4-3|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow r^2 = \frac{1}{2}$$

La ecuación será:

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \frac{1}{2}, \text{ o bien:}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 6z + \frac{57}{2} = 0 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x + 8y - 12z + 57 = 0$$

d) El plano YZ es el plano $\pi: x = 0$.

El radio es la distancia del centro $C(3, -1, 2)$ al plano π :

$$r = \text{dist}(C, \pi) = 3$$

La ecuación será:

$$(x-3)^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$$

26 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto $(2, -1, 4)$ es igual a 7.

Es una esfera de centro $(2, -1, 4)$ y radio 7:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2, \text{ o bien, } x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z - 28 = 0$$

27 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $A(-2, 3, 4)$ sea el doble de la distancia a $B(3, -1, -2)$.

Consideramos un punto genérico: $P(x, y, z)$

$$\text{dist}(P, A) = 2\text{dist}(P, B)$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2}$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 4((x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2)$$

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y + z^2 - 8z + 29 - (4x^2 - 24x + 4y^2 + 8y + 4z^2 + 16z + 56) = 0$$

$$-3x^2 + 28x - 3y^2 - 14y - 3z^2 - 24z - 27 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 28x + 14y + 24z + 27 = 0$$

Es la ecuación de una circunferencia.

28 Dados $A(4, 2, 0)$ y $B(2, 6, -4)$, halla el lugar geométrico de los puntos P tales que PA sea perpendicular a PB .

Consideramos un punto genérico: $P(x, y, z)$

$$\overrightarrow{PA} = (4, 2, 0) - (x, y, z) = (4-x, 2-y, -z)$$

$$\overrightarrow{PB} = (2, 6, -4) - (x, y, z) = (2-x, 6-y, -z-4)$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$$

$$(4-x, 2-y, -z) \cdot (2-x, 6-y, -z-4) = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 4z + 20 = 0$$

Es la ecuación de una circunferencia de centro el punto medio entre A y B .

Página 196

Para resolver

29 Halla los puntos de la recta $r: x-1=y+2=z$ que equidistan de los planos $\alpha: 4x-3y-1=0$ y $\beta: 3x+4y-1=0$.

Punto genérico de la recta: $P(1+\lambda, -2+\lambda, \lambda)$

$$\text{dist}(P, \alpha) = \text{dist}(P, \beta)$$

$$\frac{|4(1+\lambda) - 3(-2+\lambda) - 1|}{\sqrt{25}} = \frac{|3(1+\lambda) + 4(-2+\lambda) - 1|}{\sqrt{25}} \rightarrow |\lambda+9| = |7\lambda-6| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda+9 = 7\lambda-6 \rightarrow -6\lambda+15=0 \rightarrow \lambda = \frac{5}{2} \\ \lambda+9 = -(7\lambda-6) \rightarrow 8\lambda+3=0 \rightarrow \lambda = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

$$P = \left(1 + \frac{5}{2}, -2 + \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), \quad P' = \left(1 - \frac{3}{8}, -2 - \frac{3}{8}, -\frac{3}{8}\right)$$

$$P = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), \quad P' = \left(\frac{5}{8}, -\frac{19}{8}, -\frac{3}{8}\right)$$

- 30 a)** Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\sigma: 2x - y + 3z + 1 = 0$.

b) Obtén las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ .

c) Halla el ángulo que forma la recta r con el plano σ .

a) Obtenemos un punto y un vector dirección de la recta r :

$$P(1, -1, 1) \in r \rightarrow P(1, -1, 1) \in \pi$$

$$(1, 1, -1) \times (1, 2, 1) = (3, -2, 1) = \vec{d} // r \rightarrow \vec{d} (3, -2, 1) // \pi$$

Si π es ortogonal a σ , el vector normal de σ es paralelo a π :

$$\vec{n}_{\sigma} (2, -1, 3) \perp \sigma \rightarrow (2, -1, 3) // \pi$$

Obtenemos un vector normal a π :

$$(3, -2, 1) \times (2, -1, 3) = (-5, -7, 1) \rightarrow (5, 7, -1)$$

La ecuación del plano π es:

$$5(x - 1) + 7(y + 1) - 1(z - 1) = 0 \rightarrow 5x + 7y - z + 3 = 0$$

b) Ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ :

$$\begin{cases} \pi: 5x + 7y - z + 3 = 0 \\ \sigma: 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

Vector dirección de la recta:

$$(5, 7, -1) \times (2, -1, 3) = (20, -17, -19)$$

Punto de la recta:

$$x = 0 \rightarrow \begin{cases} 7y - z + 3 = 0 \\ -y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \begin{matrix} y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{matrix}} \right\} R\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Ecuaciones de la recta:

$$\begin{cases} x = 20\lambda \\ y = -\frac{1}{2} - 17\lambda \\ z = -\frac{1}{2} - 19\lambda \end{cases}$$

c) $\alpha = (\widehat{r, s})$

$\beta = (\widehat{r, n_{\sigma}})$

$\alpha = 90^\circ - \beta$

$$\cos \beta = \frac{(3, -2, 1) \cdot (2, -1, 3)}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{6 - 2 + 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{2} \rightarrow \beta = 60^\circ$$

$\alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

31 Si $r: \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ y $\pi: x + 2y + 3z - 1 = 0$, halla la ecuación de una recta situada en el plano

π , que pase por el punto $P(2, 1, -1)$ y sea perpendicular a r .

Un vector dirección de r es:

$$(1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a $(2, 1, 1)$ y perpendicular a $(1, 2, 3)$ (pues está situada en el plano π). Un vector dirección de la recta es:

$$(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$$

El punto $P(2, 1, -1)$ pertenece al plano y debe pertenecer a la recta buscada. Luego la recta es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

32 Determina la recta perpendicular común a las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

Restando la 1.ª ecuación a la 2.ª:

$$y = 3 - z \rightarrow x = 7 - 2y = 7 - 2(3 - z) = 1 + 2z$$

Haciendo $z = \lambda$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{Un punto genérico de } r \text{ es } R(1 + 2\lambda, 3 - \lambda, \lambda)$$

$$s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \mu \end{cases} \rightarrow \text{Un punto genérico de } s \text{ es } S(2, -3, \mu)$$

Un vector variable de origen en r y extremo en s es $\overrightarrow{RS}(1 - 2\lambda, -6 + \lambda, \mu - \lambda)$.

Este vector debe ser perpendicular a r y a s :

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (2, -1, 1) = 0 \rightarrow 2 - 4\lambda + 6 - \lambda + \mu - \lambda = 0 \rightarrow -6\lambda + \mu + 8 = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 0, 1) = 0 \rightarrow \mu - \lambda = 0 \rightarrow \mu = \lambda \rightarrow \mu = \lambda \end{cases}$$

$$-5\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{8}{5}; \mu = \frac{8}{5}$$

Así:

$$\left. \begin{matrix} R\left(\frac{21}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) \\ S\left(2, -3, \frac{8}{5}\right) \end{matrix} \right\} \overrightarrow{RS}\left(-\frac{11}{5}, -\frac{22}{5}, 0\right) \rightarrow \vec{d}(1, 2, 0)$$

La perpendicular común a las rectas es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 8/5 \end{cases}$$

33 a) Halla p para que las rectas r_1 y r_2 sean perpendiculares:

$$r_1: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2} \quad r_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-p}{p-1} = \frac{z-3}{3}$$

b) Calcula su punto de intersección y la ecuación del plano que las contiene para el valor de p que has hallado.

a) $(4, -2, 2) \cdot (1, p-1, 3) = 4 - 2p + 2 + 6 = 12 - 2p = 0 \rightarrow p = 6$

b) $r_1: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 6 + 5\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases}$

• Punto de intersección:

$$\begin{cases} 4\lambda = 1 + \mu \\ 1 - 2\lambda = 6 + 5\mu \\ 2\lambda = 3 + 3\mu \end{cases} \quad \text{Sumando las dos últimas ecuaciones: } 1 = 9 + 8\mu \rightarrow -8 = 8\mu \rightarrow \mu = -1$$

$$\lambda = \frac{3 + 3\mu}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

1.ª ecuación: $4 \cdot 0 = 1 - 1$. Luego $\lambda = 0$, $\mu = -1$.

Sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r_1 (o bien $\mu = -1$ en las de r_2), obtenemos el punto de corte: $(0, 1, 0)$.

• Ecuación del plano que las contiene:

$$(4, -2, 2) \times (1, 5, 3) = (-16, -10, 22) \rightarrow (8, 5, -11) \text{ es un vector normal al plano.}$$

Ecuación:

$$8(x - 0) + 5(y - 1) - 11(z - 0) = 0 \rightarrow 8x + 5y - 11z - 5 = 0$$

34 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 2, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta siguiente:

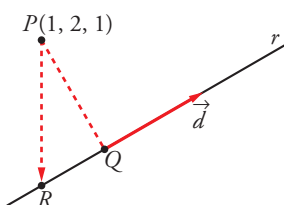
$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

Escribimos r en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \rightarrow y = x - z - 1 = 2 - z - z - 1 = 1 - 2z \\ x + z = 2 \rightarrow x = 2 - z \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto genérico de r es: $R(2 - \lambda, 1 - 2\lambda, \lambda)$



Si llamamos al punto $P(1, 2, 1)$, el vector $\overrightarrow{PR}$ ha de ser perpendicular a r , es decir, perpendicular a $\vec{d}(-1, -2, 1)$.

Por tanto, como $\overrightarrow{PR}(1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda)$:

$$\overrightarrow{PR} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda) \cdot (-1, -2, 1) = 0$$

$$-1 + \lambda + 2 + 4\lambda - 1 + \lambda = 0 \rightarrow 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$$

La recta que buscamos pasa por el punto $P(1, 2, 1)$ y por el punto $Q(2, 1, 0)$ (Q se obtiene sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r).

Un vector dirección será: $\overrightarrow{PQ}(1, -1, -1)$

La recta es: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

- 35** Los vértices del triángulo ABC son los puntos de corte del plano $2x + y - 3z = 6$ con los ejes coordenados. Halla la ecuación de la altura que parte del vértice B que está en el eje Y .

Los vértices del triángulo son:

$$y = 0, z = 0 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3 \rightarrow A(3, 0, 0)$$

$$x = 0, z = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow B(0, 6, 0)$$

$$x = 0, y = 0 \rightarrow -3z = 6 \rightarrow z = -2 \rightarrow C(0, 0, -2)$$

Debemos hallar la ecuación de la altura que parte de B .

Su vector dirección $\vec{d}(a, b, c)$ debe ser:

- Ortogonal a $\overrightarrow{AC} \rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \vec{d} = 0$
- Ortogonal al vector normal del plano ABC , es decir, del plano $2x + y - 3z = 6$, puesto que la altura debe estar contenida en dicho plano $\rightarrow (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0$.

Luego tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \vec{d} = 0 &\rightarrow (-3, 0, -2) \cdot (a, b, c) = 0 \rightarrow 3a + 2c = 0 \\ (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0 &\rightarrow (2, 1, -3) \cdot (a, b, c) = 0 \rightarrow 2a + b - 3c = 0 \end{aligned} \right\}$$

Soluciones: $(-2t, 13t, 3t) \rightarrow$ Si $t = -1$, $\vec{d}(2, -13, -3)$

Ecuación de la altura que pasa por B :

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 6 - 13\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

- 36** Halla el punto P de la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$ que equidiste de los planos:

$$\alpha: x + y + z = -3 \quad \text{y} \quad \beta: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 + \mu \end{cases}$$

- Un punto genérico de la recta r es: $R(1 + 2\lambda, -1 + \lambda, 3\lambda)$
- Escribimos el plano β en forma implícita:

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \beta: x + y - z - 3 = 0$$

- La distancia de R a α y a β ha de ser la misma: $\text{dist}(R, \alpha) = \text{dist}(R, \beta)$

$$\frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda + 3\lambda + 3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda - 3\lambda - 3|}{\sqrt{1+1+1}}, \text{ es decir:}$$

$$|6\lambda + 3| = 3 \begin{cases} 6\lambda + 3 = 3 \rightarrow 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \\ 6\lambda + 3 = -3 \rightarrow 6\lambda = -6 \rightarrow \lambda = -1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $P(1, -1, 0)$ y $P'(-1, -2, -3)$

- 37** Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano $\sigma: x - 2y + 3z + 6 = 0$ y que dista 12 unidades del origen.

Un plano paralelo a $x - 2y + 3z + 6 = 0$ es de la forma $\pi: x - 2y + 3z + k = 0$. Tenemos que hallar k para que la distancia al origen sea de 12 unidades:

$$\text{dist}[(0, 0, 0), \pi] = \frac{|k|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{|k|}{\sqrt{14}} = 12 \begin{cases} k = 12\sqrt{14} \\ k = -12\sqrt{14} \end{cases}$$

Hay dos planos: $x - 2y + 3z + 12\sqrt{14} = 0$ y $x - 2y + 3z - 12\sqrt{14} = 0$

38 a) Halla las ecuaciones de la recta que corta perpendicularmente a r y s :

$$r: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 3 \\ y = -6 + 4\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

b) Calcula la distancia entre r y s .

$$a) r: \begin{cases} \vec{d}_r(1, 5, 0) \\ P(-3, -2, 0) \end{cases} \quad s: \begin{cases} \vec{d}_s(0, 4, 1) \\ Q(3, -6, 2) \end{cases}$$

Vector perpendicular común:

$$\vec{v} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (1, 5, 0) \times (0, 4, 1) = (5, -1, 4)$$

La recta t perpendicular común es la intersección $\pi \cap \pi'$, con π , plano que contiene a r y es paralelo a $\vec{v}$ y π' , plano que contiene a s y es paralelo a $\vec{v}$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+3 & y+2 & z \\ 1 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 20x - 4y - 26z + 52 = 0$$

$$\pi': \begin{vmatrix} x-3 & y+6 & z-2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 17x + 5y - 20z + 19 = 0$$

$$t: \begin{cases} 20x - 4y - 26z + 52 = 0 \\ 17x + 5y - 20z + 19 = 0 \end{cases}$$

$$b) P \in r \rightarrow P(-3 + \lambda, -2 + 5\lambda, 0)$$

$$Q \in s \rightarrow Q(3, -6 + 4\mu, 2 + \mu)$$

El vector perpendicular común verifica:

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{d}_r = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{d}_s = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (6 - \lambda, 4\mu - 5\lambda - 4, \mu + 2) \cdot (1, 5, 0) = 0 \rightarrow 20\mu - 26\lambda - 14 = 0 \\ (6 - \lambda, 4\mu - 5\lambda - 4, \mu + 2) \cdot (0, 4, 1) = 0 \rightarrow 17\mu - 20\lambda - 14 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 1, \mu = 2$$

Los puntos que determinan la distancia mínima son:

$$P = (-3 + 1, -2 + 5, 0) = (-2, 3, 0)$$

$$Q = (3, -6 + 8, 2 + 2) = (3, 2, 4)$$

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(P, Q) = \sqrt{(3+2)^2 + (2-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{42} \text{ u}$$

39 Sea r la recta de intersección de los planos $ax + 9y - 3z = 8$ y $x + ay - z = 0$.

Determina el valor de a para que:

a) Los dos planos sean paralelos.

b) Los dos planos sean perpendiculares.

c) La recta r corte al plano XY en un punto cuya distancia al origen de coordenadas sea igual a $\sqrt{2}$.

a) Las coordenadas de $(a, 9, -3)$ y $(1, a, -1)$ han de ser proporcionales:

$$\frac{a}{1} = \frac{9}{a} = \frac{-3}{-1} \left\langle \begin{array}{l} \frac{a}{1} = \frac{-3}{-1} \rightarrow a = 3 \\ \frac{9}{a} = \frac{-3}{-1} \rightarrow a = 3 \end{array} \right\rangle a = 3$$

b) Los vectores normales han de ser perpendiculares:

$$(a, 9, -3) \cdot (1, a, -1) = a + 9a + 3 = 10a + 3 = 0 \rightarrow a = \frac{-3}{10}$$

c) El plano OXY es el plano $z = 0$. Hallamos el punto de corte de r con el plano OXY :

$$\begin{cases} ax + 9y - 3z = 8 \\ x + ay - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + 9y = 8 \\ x + ay = 0 \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} a & 9 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 9$$

(El problema solo tiene solución si $a^2 - 9 \neq 0$, es decir, si $a \neq 3$ y $a \neq -3$. Si $a = 3$ o $a = -3$, el sistema es incompatible).

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 8a$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} a & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$x = \frac{8a}{a^2 - 9}; \quad y = \frac{-8}{a^2 - 9}; \quad z = 0$$

El punto de corte es $P\left(\frac{8a}{a^2 - 9}, \frac{-8}{a^2 - 9}, 0\right)$. Su distancia al origen ha de ser $\sqrt{2}$:

$$\text{dist}(P, O) = \sqrt{\left(\frac{8a}{a^2 - 9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2 - 9}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{8a}{a^2 - 9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2 - 9}\right)^2 = 2 \rightarrow \frac{64a^2 + 64}{(a^2 - 9)^2} = 2$$

$$64a^2 + 64 = 2(a^4 + 81 - 18a^2) \rightarrow 64a^2 + 64 = 2a^4 + 162 - 36a^2$$

$$0 = 2a^4 - 100a^2 + 98 \rightarrow a^4 - 50a^2 + 49 = 0$$

$$a^2 = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 196}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{2304}}{2} = \frac{50 \pm 48}{2} \begin{cases} a^2 = 49 \rightarrow a = \pm 7 \\ a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones: $a_1 = -7$, $a_2 = 7$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$

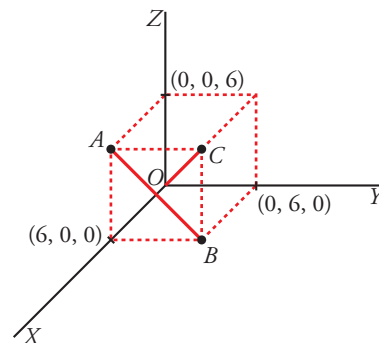
40 Dibuja un cubo de 6 unidades de lado, con un vértice en el origen y los tres vértices contiguos sobre los ejes de coordenadas. Halla la mínima distancia de una diagonal del cubo a una diagonal de una cara, sabiendo que las rectas que contienen a las diagonales se cruzan.

- La diagonal del cubo para por $O(0, 0, 0)$ y por $C(6, 6, 6)$:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- La diagonal de la cara pasa por $A(6, 0, 6)$ y por $B(6, 6, 0)$:

$$s: \begin{cases} x = 6 \\ y = \mu \\ z = 6 - \mu \end{cases}$$



$$\text{dist}(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\vec{d}, \vec{d}', \vec{OA}]|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$$

$$[\vec{d}, \vec{d}', \vec{OA}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

$$\vec{d} \times \vec{d}' = (1, 1, 1) \times (0, 1, -1) = (-2, 1, 1) \rightarrow |\vec{d} \times \vec{d}'| = \sqrt{6}$$

$$\text{Por tanto: } \text{dist}(r, s) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \text{ u}$$

4.1 Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es $(1, 3, 2)$.

Si el punto más próximo al origen es $P(1, 3, 2)$, el vector $\overrightarrow{OP}(1, 3, 2)$ es normal al plano.

Por tanto, la ecuación del plano es:

$$1(x-1) + 3(y-3) + 2(z-2) = 0 \rightarrow x + 3y + 2z - 14 = 0$$

4.2 Halla los puntos simétricos de $P(1, 2, 3)$ respecto del plano $\alpha: x - 3y - 2z + 4 = 0$ y respecto de la recta:

$$r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$$

— Simétrico respecto del plano:

- Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a α :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

- Punto de corte de α con la recta anterior:

$$(1 + \lambda) - 3(2 - 3\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 4 = 0$$

$$1 + \lambda - 6 + 9\lambda - 6 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$14\lambda - 7 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

La recta y el plano se cortan en $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$. Este es el punto medio del segmento PP' , siendo

P' el simétrico de P respecto del plano α . Luego, si $P'(x, y, z)$, entonces:

$$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \rightarrow P'(2, -1, 1)$$

— Simétrico respecto de la recta:

- Escribimos la recta en paramétricas:

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \rightarrow y = x + 3 \\ 4x - z = 0 \rightarrow z = 4x \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

- Hallamos la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P :

$$1(x-1) + 1(y-2) + 4(z-3) = 0 \rightarrow x + y + 4z - 15 = 0$$

- Obtenemos el punto de intersección de la recta r con el plano:

$$\lambda + 3 + \lambda + 16\lambda - 15 = 0$$

$$18\lambda - 12 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

El punto de corte es $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Este es el punto medio del segmento PP'' , siendo P'' el

simétrico de P respecto de la recta r . Así, si $P''(a, b, c)$, entonces:

$$\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right) \rightarrow P''\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

43 a) Encuentra los puntos de $r: \begin{cases} x+y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ que disten $\frac{1}{3}$ del plano $\pi: 2x-y+2z+1=0$.

b) Obtén los puntos de π que distan $\frac{1}{3}$ de los puntos hallados en el apartado anterior.

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\begin{cases} y = -x \\ z = x \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{Un punto de } r \text{ es de la forma } R(\lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$\text{dist}(R, \pi) = \frac{|2\lambda + \lambda + 2\lambda + 1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|5\lambda + 1|}{3} = \frac{1}{3} \begin{cases} 5\lambda + 1 = 1 \rightarrow \lambda = 0 \\ 5\lambda + 1 = -1 \rightarrow \lambda = -2/5 \end{cases}$$

Hay dos puntos: $(0, 0, 0)$ y $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

b) Los dos puntos obtenidos están a distancia $\frac{1}{3}$ de π .

Se trata de encontrar la proyección de estos puntos sobre el plano π .

• Para $(0, 0, 0)$:

Obtenemos la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y es perpendicular a π :

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte de esta recta con π :

$$4\lambda + \lambda + 4\lambda + 1 = 0 \rightarrow 9\lambda = -1 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{9}$$

El punto es $\left(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$.

• Para $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$:

Hallamos la recta que pasa por este punto y es perpendicular a π :

$$\begin{cases} x = -2/5 + 2\lambda \\ y = 2/5 - \lambda \\ z = -2/5 + 2\lambda \end{cases}$$

Obtenemos el punto de corte de esta recta con π :

$$2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) - \left(\frac{2}{5} - \lambda\right) + 2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) + 1 = 0$$

$$-\frac{4}{5} + 4\lambda - \frac{2}{5} + \lambda - \frac{4}{5} + 4\lambda + 1 = 0$$

$$9\lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{9}$$

El punto es $\left(-\frac{8}{45}, \frac{13}{45}, -\frac{8}{45}\right)$.

44 Dados los puntos $A(-1, 3, -1)$, $B(-3, 1, -7)$ y $C(0, 5, 1)$:

a) Prueba que son los vértices de un triángulo.

b) Halla la longitud del segmento que determina el punto B y su proyección sobre AC .

a) Es suficiente probar que no están alineados:

$$\overrightarrow{AB} = (-3, 1, -7) - (-1, 3, -1) = (-2, -2, -6)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0, 5, 1) - (-1, 3, -1) = (1, 2, 2)$$

$$\frac{-2}{1} \neq \frac{-2}{2} \rightarrow \text{Los puntos no están alineados, son vértices de un triángulo.}$$

b) El segmento que nos piden es la altura del triángulo que forman.

Calculamos el área del paralelogramo, A_p , que forman $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, la dividimos entre la medida de la base, $|\overrightarrow{AC}|$ y obtenemos la altura:

$$A_p: |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |(-2, -2, -6) \times (1, 2, 2)| = |(8, 2, 2)| = \sqrt{64 + 4 + 4} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{Medida de la base: } |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$

La longitud del segmento que determina el punto B y su proyección sobre AC es:

$$\frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2} \text{ u}$$

45 Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta $r: \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ y otro sobre $s: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$.

a) Calcula el área del cuadrado.

b) Si uno de los vértices del cuadrado es $(0, 0, 0)$, ¿cuál es el otro vértice situado sobre la recta r ?

$$a) r: \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\lambda, y = \frac{1}{2}\lambda, z = \lambda$$

$$r: \begin{cases} \vec{d}_r \left(-1, \frac{1}{2}, 1 \right) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases}; \quad s: \begin{cases} \vec{d}_s(2, -1, -2) \\ P_s(3, 1, -5) \end{cases}$$

$$\vec{d}_s = -2\vec{d}_r \rightarrow r \parallel s$$

El lado del cuadrado es la distancia entre las rectas.

$$\begin{aligned} l = \text{dist}(r, s) &= \text{dist}(P_r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \frac{|(3, 1, -5) \times (2, -1, -2)|}{|(2, -1, -2)|} = \\ &= \frac{|(-7, -4, -5)|}{|(2, -1, -2)|} = \frac{\sqrt{49 + 16 + 25}}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \sqrt{10} \text{ u} \end{aligned}$$

$$\text{Área} = 10 \text{ u}^2$$

b) Un punto genérico de r es:

$$A \left(-\lambda, \frac{1}{2}\lambda, \lambda \right)$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(A, O) &= \sqrt{10} \rightarrow \sqrt{(-\lambda)^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda\right)^2 + (\lambda)^2} = \sqrt{10} \rightarrow \frac{9}{4}\lambda^2 = 10 \rightarrow \\ &\rightarrow \lambda = \frac{2}{3}\sqrt{10}, \lambda = -\frac{2}{3}\sqrt{10} \end{aligned}$$

Hay dos posibles soluciones:

$$A \left(-\frac{2}{3}\sqrt{10}, \frac{1}{3}\sqrt{10}, \frac{2}{3}\sqrt{10} \right) \text{ y } A' \left(\frac{2}{3}\sqrt{10}, -\frac{1}{3}\sqrt{10}, -\frac{2}{3}\sqrt{10} \right)$$

Página 197

46 Halla el punto del plano de ecuación $x - z = 3$ que está más cerca del punto $P(3, 1, 4)$, así como la distancia entre el punto P y el plano dado.

- Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por $P(3, 1, 4)$:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

- El punto que buscamos es el punto de corte de r y el plano:

$$(3 + \lambda) - (4 - \lambda) = 3$$

$$3 + \lambda - 4 + \lambda = 3 \rightarrow 2\lambda = 4 \rightarrow \lambda = 2$$

El punto es $P'(5, 1, 2)$.

- La distancia entre P y el plano es igual a la distancia entre P y P' :

$$\text{dist}(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(2, 0, -2)| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \approx 2,83 \text{ u}$$

47 Se consideran los puntos $P(2, 1, -1)$, $Q(1, 4, 1)$ y $R(1, 3, 1)$:

a) Comprueba que no están alineados y halla el área del triángulo que determinan.

b) Si desde el punto $V(1, 1, -1)$ se trazan rectas a cada uno de los puntos P , Q y R , se obtiene una pirámide. Halla la altura de dicha pirámide y su volumen.

a) $\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}(-1, 3, 2) \\ \overrightarrow{PR}(-1, 2, 2) \end{array} \right\}$ No tienen las coordenadas proporcionales, luego los puntos no están alineados.

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 0, 1) \rightarrow A_{\text{PARALELOGRAMO}} = |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12 \text{ u}^2$$

b) La altura es la distancia de V al plano determinado por P , Q y R .

Un vector normal al plano es $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 0, 1)$. La ecuación del plano es:

$$2(x - 2) + 1(z + 1) = 0$$

$$\pi: 2x + z - 3 = 0$$

$$\text{Altura} = \text{dist}(V, \pi) = \frac{|2 - 1 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ u}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} |\text{Área base} \cdot \text{altura}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{3} \text{ u}^3$$

48 Halla el volumen de un paralelepípedo de bases $ABCD$ y $EFGH$ sabiendo que $A(1, 0, 0)$, $B(2, 3, 0)$, $C(4, 0, 5)$ y $E(7, 6, 3)$.

Halla las coordenadas de los restantes vértices del paralelepípedo.

Hallamos las coordenadas de los restantes vértices:

- Vértice $D(d_1, d_2, d_3)$:

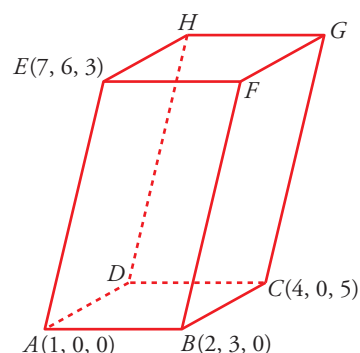
$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \rightarrow (-1, -3, 0) = (d_1 - 4, d_2, d_3 - 5)$$

$$D(3, -3, 5)$$

- Vértice $F(f_1, f_2, f_3)$:

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} \rightarrow (6, 6, 3) = (f_1 - 2, f_2 - 3, f_3)$$

$$F(8, 9, 3)$$



- Vértice $G(g_1, g_2, g_3)$ y vértice $H(h_1, h_2, h_3)$:

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG} \rightarrow (6, 6, 3) = (g_1 - 4, g_2, g_3 - 5)$$

$$G(10, 6, 8)$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} \rightarrow (6, 6, 3) = (h_1 - 3, h_2 + 3, h_3 - 5)$$

$$H(9, 3, 8)$$

$$\overrightarrow{AB}(1, 3, 0), \overrightarrow{AD}(2, -3, 5), \overrightarrow{AE}(6, 6, 3)$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 33 \rightarrow \text{Volumen} = 33 \text{ u}^3$$

49 Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1} \quad s: \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$$

determina su posición relativa y el área de uno de los cuadrados, dos de cuyos lados están sobre r y s .

- Escribimos la recta s en forma paramétrica:

$$\begin{cases} -y + z = 2 - x \\ -y - z = -4 - 3x \end{cases} \quad \text{Sumando: } -2y = -2 - 4x \rightarrow y = 1 + 2x; \quad z = 2 - x + y = 3 + x$$

$$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

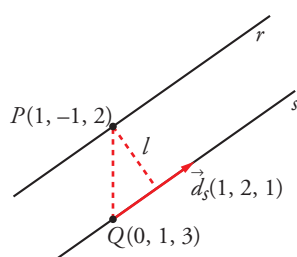
- Estudiamos la posición relativa de las dos rectas:

$$\vec{d}_r(1, 2, 1); P(1, -1, 2)$$

$$\vec{d}_s(1, 2, 1); Q(0, 1, 3)$$

Las rectas tienen la misma dirección; $P \in r$, pero $P \notin s$; luego las rectas r y s son paralelas.

- El lado del cuadrado es igual a la distancia entre las rectas r y s .



$$\overrightarrow{QP}(1, -2, -1)$$

$$\overrightarrow{QP} \times \vec{d}_s = (1, -2, -1) \times (1, 2, 1) = (0, -2, 4)$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(r, s) = \text{dist}(P, s) &= \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \frac{|(0, -2, 4)|}{|(1, 2, 1)|} = \\ &= \frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{1+4+1}} = \sqrt{\frac{20}{6}} = \sqrt{\frac{10}{3}} \text{ u} \end{aligned}$$

- El área del cuadrado es:

$$\text{Área} = \left(\sqrt{\frac{10}{3}} \right)^2 = \frac{10}{3} \text{ u}^2$$

50 Halla la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ sobre el plano $\alpha: x - 3y + 2z + 12 = 0$.

La proyección ortogonal de r sobre α es la recta intersección del plano α con otro plano, π , perpendicular a α y que contiene a r .

$$P(1, 1, 2); \vec{d}_r(2, 1, 2); \vec{n}(1, -3, 2)$$

$$\vec{d}_r \times \vec{n} = (2, 1, 2) \times (1, -3, 2) = (8, -2, -7)$$

La ecuación de π es:

$$8(x-1) - 2(y-1) - 7(z-2) = 0 \rightarrow \pi: 8x - 2y - 7z + 8 = 0$$

La proyección ortogonal de r sobre α es:

$$r': \begin{cases} x - 3y + 2z + 12 = 0 \\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

51 Considera las rectas r y s :

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \quad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

Halla los puntos que dan la mínima distancia y determina la ecuación de la perpendicular común a r y s .

Un punto genérico de r es $R(3 + 2\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$

Un punto genérico de s es $S(\mu, -\mu, -\mu)$

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es:

$$\overrightarrow{RS}(-3 - 2\lambda + \mu, -\lambda - \mu, -1 - \lambda - \mu)$$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s :

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (2, 1, 1) = 0 \rightarrow -6\lambda - 7 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{7}{6} \\ \overrightarrow{RS} \cdot (1, -1, -1) = 0 \rightarrow -2 + 3\mu = 0 \rightarrow \mu = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Los puntos que dan la mínima distancia son:

$$R\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right) \text{ y } S\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

La perpendicular común es la recta que pasa por R y S :

$$\overrightarrow{RS}\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \vec{d}(0, 1, -1)$$

La recta es:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{7}{6} + \lambda \\ z = -\frac{1}{6} - \lambda \end{cases}$$

- 52** Los puntos $P(0, 1, 0)$ y $Q(-1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero, S , pertenece a la recta $r: \begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases}$. La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r .

a) Determina las coordenadas de S .

b) Calcula el área del triángulo PQS .

$$a) \overrightarrow{PS} \perp \vec{d}_r \rightarrow \overrightarrow{PS} \cdot \vec{d}_r = 0$$

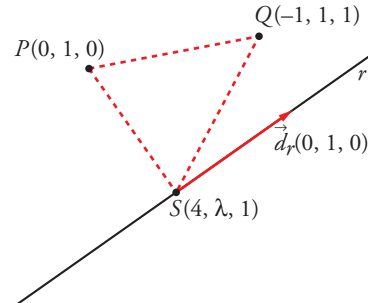
$$(4, \lambda - 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

$$S(4, 1, 1)$$

$$b) \overrightarrow{PS} (4, 0, 1); \overrightarrow{PQ} (-1, 0, 1)$$

$$\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ} = (4, 0, 1) \times (-1, 0, 1) = (0, -5, 0)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ}|}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ u}^2$$



- 53** Considera un cuadrado cuyo centro es el punto $C(1, 1, -1)$ y tiene uno de sus lados en la recta:

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$$

a) Halla la ecuación del plano en el que se encuentra el cuadrado.

b) Calcula la longitud del lado del cuadrado.

a) Es el plano, π , que contiene a C y a $r: \vec{d}_r (1, 1, 0); P(2, 1, 1) \in r$.

$$C(1, 1, -1)$$

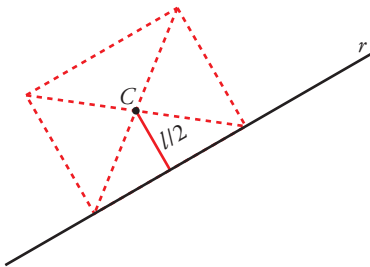
$$\overrightarrow{PC} (-1, 0, -2) \parallel \pi$$

Un vector normal al plano es:

$$\vec{n} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 2) = (2, -2, -1)$$

La ecuación del plano es:

$$2(x-1) - 2(y-1) - 1(z+1) = 0 \rightarrow 2x - 2y - z - 1 = 0$$



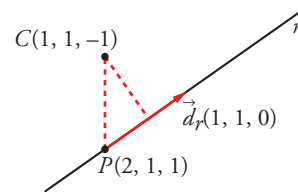
b) La distancia de C a r es la mitad del lado del cuadrado.

$$\vec{d}_r \times \overrightarrow{PC} = (1, 1, 0) \times (-1, 0, -2) = (-2, 2, 1)$$

$$|\vec{d}_r| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\text{dist}(C, r) = \frac{|\overrightarrow{PC} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|} = \frac{\sqrt{4+4+1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ u}$$

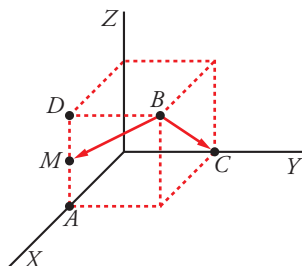
$$\frac{l}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{lado del cuadrado} = l = 3\sqrt{2} \approx 4,24 \text{ u}$$



- 54** En la figura adjunta, calcula el ángulo que forma la recta BC con la recta que une B con el punto medio del lado AD .

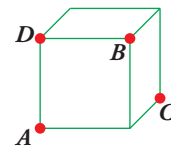
Vamos a considerar el cubo de lado 1 con un vértice en el origen:

Así: $A(1, 0, 0); B(1, 1, 1); C(0, 1, 0); D(1, 0, 1); M\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$



$$\overrightarrow{BC} (-1, 0, -1); \overrightarrow{BM} \left(0, -1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{BM}|} = \frac{1/2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5/4}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0,316 \rightarrow \alpha = 71^\circ 33' 54''$$

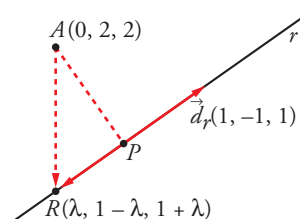


55 Sea la recta $r: \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

- Determina la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por $(0, 2, 2)$, y las coordenadas del punto P intersección de r y s .
 - Halla la ecuación del plano π que contiene a r y a s , y la de la recta t perpendicular a π por el punto P .
 - Si Q es cualquier punto de t , explica, sin hacer ningún cálculo, qué relación hay entre las distancias de Q a r , a s y a π .
- a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \rightarrow z = 3x + 2y - 1 = 1 + x \\ x + y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 - x \end{cases} \quad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Un punto genérico de r es $R(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$.



$\overrightarrow{AR}$ ha de ser perpendicular a r ; es decir, $\overrightarrow{AR} \cdot \vec{d}_r = 0$.

$$(\lambda, -1 - \lambda, -1 + \lambda) \cdot (1, -1, 1) = 0$$

$$\lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda = 0 \rightarrow 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$$

$$R(0, 1, 1)$$

La recta s pasa por $A(0, 2, 2)$ y por $R(0, 1, 1)$.

$$\overrightarrow{RA}(0, 1, 1) \rightarrow s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

El punto de intersección de r y s es $P(0, 1, 1)$.

- b) Ecuación del plano π que contiene a r y a s :

$$\vec{n} = (1, -1, 1) \times (0, 1, 1) = (-2, -1, 1); P(0, 1, 1) \in \pi$$

$$-2(x - 0) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0 \rightarrow \pi: -2x - y + z = 0$$

Ecuación de la recta t perpendicular a π por el punto P :

$$t: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

- c) Si $Q \in t \rightarrow \text{dist}(Q, r) = \text{dist}(Q, s) = \text{dist}(Q, \pi) = \text{dist}(Q, P)$

Las tres distancias coinciden con la distancia de Q al punto P , luego las tres son iguales entre sí.

56 a) Halla la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1, 2, 1)$ y $R(1, 0, -1)$.

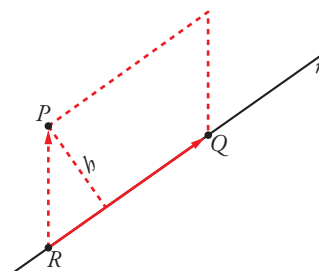
- b) Encuentra todos los puntos S del plano determinado por P, Q y R , de manera que el cuadrilátero de vértices P, Q, R y S sea un paralelogramo.

- a) Si r es la recta que pasa por R y por Q , entonces:

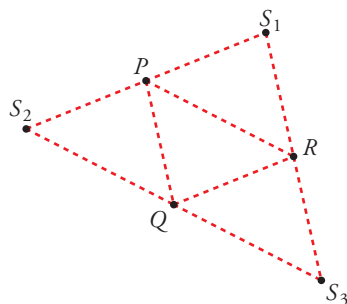
$$\text{dist}(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Bse}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ}|}{|\overrightarrow{RQ}|}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{RP}(0, -1, 4) \\ \overrightarrow{RQ}(0, 2, 2) \end{array} \right\} \overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ} = (-10, 0, 0)$$

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|(-10, 0, 0)|}{|(0, 2, 2)|} = \frac{10}{\sqrt{4+4}} = \frac{10}{\sqrt{8}} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,54 \text{ u}$$



- b) Hay tres posibilidades: que P y Q no formen un lado del paralelogramo, que P y R no formen un lado o que Q y R no formen un lado.



- Si P y R no forman un lado del paralelogramo, obtenemos $S_1(x, y, z)$:
 $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RS_1} \rightarrow (0, -3, 2) = (x - 1, y, z + 1) \rightarrow S_1(1, -3, 1)$
- Si P y Q no forman un lado del paralelogramo, obtenemos $S_2(a, b, c)$:
 $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{QS_2} \rightarrow (0, -1, 4) = (a - 1, b - 2, c - 1) \rightarrow S_2(1, 1, 5)$
- Si Q y R no forman un lado del paralelogramo, obtenemos $S_3(\alpha, \beta, \gamma)$:
 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS_3} \rightarrow (0, 3, -2) = (\alpha - 1, \beta, \gamma + 1) \rightarrow S_3(1, 3, -3)$

57 Halla el plano de la familia $mx + y + z - (m + 1) = 0$ que está situado a distancia 1 del origen de coordenadas.

Hallamos la distancia del origen, $(0, 0, 0)$, al plano y la igualamos a 1:

$$dist = \frac{|m \cdot 0 + 0 + 0 - (m + 1)|}{\sqrt{m^2 + 1 + 1}} = \frac{|m + 1|}{\sqrt{m^2 + 2}} = 1 \text{ u}$$

$$|m + 1| = \sqrt{m^2 + 2} \rightarrow (m + 1)^2 = m^2 + 2 \rightarrow m^2 + 1 + 2m = m^2 + 2$$

$$2m = 1 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

El plano es: $\frac{1}{2}x + y + z - \frac{3}{2} = 0$; es decir: $x + 2y + 2z - 3 = 0$

58 Halla la distancia de la recta $r: \begin{cases} x = 3z + 3 \\ y = 4z - 1 \end{cases}$ a los ejes coordenados.

Hallaremos el plano π que contiene a r y es paralelo a cada uno de los ejes de coordenadas.

$$r: \begin{cases} x - 3z - 3 = 0 \\ y - 4z + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3 + 3\lambda, y = -1 + 4\lambda, z = \lambda$$

$$r: \begin{cases} \vec{d}_r(3, 4, 1) \\ P_r(3, -1, 0) \end{cases}$$

- Eje OX :

$$\left. \begin{matrix} \vec{d}_{OX}(1, 0, 0) \\ P_{OX}(0, 0, 0) \end{matrix} \right\} \rightarrow \pi_x: \begin{vmatrix} x - 3 & y + 1 & z \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = y - 4z + 1 = 0$$

$$dist(OX, r) = dist(OX, \pi_x) = \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{1 + 16}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \text{ u}$$

- Eje OY :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{d}_{OY}(0, 1, 0) \\ P_{OY}(0, 0, 0) \end{array} \right\} \rightarrow \pi_y: \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x + 3z + 3 = 0$$

$$\text{dist}(OY, r) = \text{dist}(OY, \pi_y) = \frac{|0 + 0 + 3|}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ u}$$

- Eje OZ :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{d}_{OZ}(0, 0, 1) \\ P_{OZ}(0, 0, 0) \end{array} \right\} \rightarrow \pi_z: \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4x - 3y - 15 = 0$$

$$\text{dist}(OZ, r) = \text{dist}(OZ, \pi_z) = \frac{|0 - 0 - 15|}{\sqrt{16+9}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ u}$$

- 59 a)** Determina el valor de a y b para que los tres planos se corten en una misma recta.

$$\begin{cases} x + ay + z = 0 \\ x + y - 2z = b \\ -2x + y + z = -2 \end{cases}$$

- b)** Halla el simétrico del origen de coordenadas respecto de la recta común a los tres planos dados.

- a) Para que los tres planos se corten en una recta, los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada tienen que ser iguales a 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & b \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para que $\text{ran}(A) = 2$, tiene que ser $|A| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3a + 6 = 0 \rightarrow a = -2; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Para que $\text{ran}(A') = 2$, añadimos al menor anterior la cuarta columna y el menor obtenido también tiene que ser igual a 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & b \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3b - 6 = 0 \rightarrow b = 2$$

- b) Para $a = -2$ y $b = 2$, el sistema es equivalente a:

$$r: \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases} \rightarrow x = \frac{4}{3} + \lambda, y = \frac{2}{3} + \lambda, z = \lambda$$

Calculamos el plano perpendicular a r que pasa por O .

$$\pi: x + y + z = 0$$

El punto de intersección $M = r \cap \pi$ es el punto medio entre O y su simétrico $O'(a, b, c)$ respecto de la recta.

$$r \cap \pi: \left(\frac{4}{3} + \lambda\right) + \left(\frac{2}{3} + \lambda\right) + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$$

$$M = \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}, \frac{2}{3} - \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) \rightarrow O' = \left(\frac{4}{3}, 0, -\frac{4}{3}\right)$$

- 60** Los puntos $A(0, 0, 0)$ y $B(1, 1, 1)$ son dos de los vértices de un triángulo, cuyo tercer vértice, C , está contenido en $r: \begin{cases} x=2y \\ z=1 \end{cases}$. Si el área del triángulo es $\sqrt{2}/2$, ¿cuáles pueden ser las coordenadas de C ?

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) - (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$$

$$r: \begin{cases} x-2y=0 \\ z=1 \end{cases} \rightarrow x=2\lambda, y=\lambda, z=1$$

El punto $C(2\lambda, \lambda, 1)$

$$\overrightarrow{AC} = (2\lambda, \lambda, 1)$$

La expresión $\frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$ nos da el área del triángulo que forman los tres puntos.

$$\frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|(1, 1, 1) \times (2\lambda, \lambda, 1)|}{2} = \frac{|(1-\lambda, 2\lambda-1, -\lambda)|}{2} = \frac{\sqrt{(1-\lambda)^2 + (2\lambda-1)^2 + (-\lambda)^2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{6\lambda^2 - 6\lambda + 2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sqrt{6\lambda^2 - 6\lambda + 2} = \sqrt{2} \rightarrow \lambda = 1, \lambda = 0$$

Los puntos son $C(2, 1, 1)$ y $C'(0, 0, 1)$.

- 61** Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que equidistan de los puntos $A(1, -1, 0)$ y $B(2, 3, -4)$. Comprueba que obtienes un plano perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y que pasa por el punto medio de AB .

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\text{dist}(P, A) = \text{dist}(P, B) \rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 8z + 16$$

$$\pi: 2x + 8y - 8z - 27 = 0 \rightarrow \text{Ecuación de un plano.}$$

- Veamos que π es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 4, -4)$$

$$\text{Vector normal al plano} \rightarrow \vec{n}(2, 8, -8) // \overrightarrow{AB}$$

Luego $\overrightarrow{AB} \perp \pi$.

- Comprobamos que π pasa por el punto medio de AB :

$$M = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{0-4}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, 1, -2 \right)$$

$$2 \cdot \left(\frac{3}{2} \right) + 8 \cdot 1 - 8 \cdot (-2) - 27 = 0 \rightarrow M \in \pi$$

El plano π es el plano mediodor del segmento AB .

- 62** Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos $\alpha: 3x + y - 2z + 1 = 0$ y $\beta: x - 3y + 2z - 3 = 0$.

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\text{dist}(P, \alpha) = \text{dist}(P, \beta) \rightarrow \frac{|3x + y - 2z + 1|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{|x - 3y + 2z - 3|}{\sqrt{1+9+4}}$$

$$|3x + y - 2z + 1| = |x - 3y + 2z - 3| \rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + y - 2z + 1 = x - 3y + 2z - 3 \rightarrow 2x + 4y - 4z + 4 = 0 \rightarrow x + 2y - 2z + 2 = 0 \\ 3x + y - 2z + 1 = -x + 3y - 2z + 3 \rightarrow 4x - 2y - 2 = 0 \rightarrow 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Son los planos bisectores del diedro que determinan α y β .

Página 198

63 Halla las ecuaciones del lugar geométrico de todos los puntos del plano $x = y$ que distan 1 del plano $2x - y + 2z = 2$.

Si P es un punto del plano $x = y$, entonces es de la forma $P(x, y, z)$. La distancia de P al plano dado ha de ser igual a 1, es decir:

$$\frac{|2x - x + 2z - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|x + 2z - 2|}{3} = 1 \rightarrow |x + 2z - 2| = 3 \begin{cases} x + 2z - 2 = 3 \rightarrow x + 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = -3 \rightarrow x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas:

$$r: \begin{cases} x + 2z - 5 = 0 \\ x = y \end{cases} \quad s: \begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ x = y \end{cases}$$

64 a) Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuaciones:

$$\alpha: 3x - 4y + 5 = 0$$

$$\beta: 2x - 2y + z + 9 = 0$$

b) ¿Qué puntos del eje Y equidistan de ambos planos?

a) Si $P(x, y, z)$ es uno de los puntos del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} \rightarrow \frac{|3x - 4y + 5|}{5} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{3}$$

$$3|3x - 4y + 5| = 5|2x - 2y + z + 9|$$

$$\begin{cases} 9x - 12y + 15 = 10x - 10y + 5z + 45 \rightarrow x + 2y + 5z + 30 = 0 \\ 9x - 12y + 15 = -10x + 10y - 5z - 45 \rightarrow 19x - 22y + 5z + 60 = 0 \end{cases}$$

Son los planos bisectores del diedro que determinan los dos planos dados.

b) Un punto del eje OY es de la forma $Q(0, y, 0)$. La distancia de Q a cada uno de los planos ha de ser la misma, es decir:

$$\frac{|-4y + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-2y + 9|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} \rightarrow \frac{|-4y + 5|}{5} = \frac{|-2y + 9|}{3}$$

$$3|-4y + 5| = 5|-2y + 9| \begin{cases} -12y + 15 = -10y + 45 \rightarrow -2y = 30 \rightarrow y = -15 \\ -12y + 15 = 10y - 45 \rightarrow -22y = -60 \rightarrow y = \frac{30}{11} \end{cases}$$

Hay dos puntos:

$$Q_1(0, -15, 0) \text{ y } Q_2\left(0, \frac{30}{11}, 0\right)$$

65 Calcula el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que están a la misma distancia de $P(-1, 2, 5)$ y $Q(-3, 4, 1)$.

¿A qué distancia se encuentra el punto P de dicho conjunto?

Si $A(x, y, z)$ es un punto del conjunto, su distancia a P y a Q ha de ser la misma, es decir:

$$\text{dist}(A, P) = \text{dist}(A, Q) \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2} = \sqrt{(x + 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 10z + 25 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 2z + 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow -4x + 4y - 8z + 4 = 0 \rightarrow \pi: x - y + 2z - 1 = 0$$

Es el plano mediador del segmento que une P y Q .

La distancia de P a dicho plano será igual a la mitad de la distancia entre P y Q :

$$\text{dist}(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-2, 2, -4)| = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{dist}(P, \pi) = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} \approx 2,45 \text{ u}$$

66 a) Halla la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ en el punto $P(1, 2, 1)$.

b) ¿Cuál es el punto diametralmente opuesto a P en la esfera dada?

a) El punto P es un punto de la esfera.

El centro de la esfera es $C(1, 2, 0)$.

El plano que buscamos pasa por P y es perpendicular al vector $\overrightarrow{CP}(0, 0, 1)$.

Su ecuación es:

$$0 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 1) = 0, \text{ es decir: } z - 1 = 0$$

b) Es el simétrico de P respecto del centro de la esfera.

Si llamamos $P'(x, y, z)$ al punto que buscamos, C es el punto medio del segmento PP' , es decir:

$$\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}, \frac{1+z}{2} \right) = (1, 2, 0) \rightarrow P'(1, 2, -1)$$

67 Halla la ecuación de la esfera tangente a los planos $x - 2z - 8 = 0$ y $2x - z + 5 = 0$ y cuyo centro pertenece a la recta:

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

El centro de la esfera es de la forma $C(-2, 0, z)$ (pues pertenece a la recta r).

La distancia del centro a cada uno de los planos es la misma. Además, esta distancia es el radio de la esfera:

$$\begin{aligned} \frac{|-2 - 2z - 8|}{\sqrt{1+4}} &= \frac{|-4 - z + 5|}{\sqrt{4+1}} \rightarrow \frac{|-2z - 10|}{\sqrt{5}} = \frac{|-z + 1|}{\sqrt{5}} \rightarrow |-2z - 10| = \\ &= |-z + 1| \begin{cases} -2z - 10 = -z + 1 \rightarrow z = -11 \rightarrow C_1(-2, 0, -11) \\ -2z - 10 = z - 1 \rightarrow -3z = 9 \rightarrow z = -3 \rightarrow C_2(-2, 0, -3) \end{cases} \end{aligned}$$

Hay dos soluciones:

• $C_1(-2, 0, -11) \rightarrow \text{Radio} = \frac{12}{\sqrt{5}}$

Ecuación: $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 11)^2 = \frac{144}{5}$

• $C_2(-2, 0, -3) \rightarrow \text{Radio} = \frac{4}{\sqrt{5}}$

Ecuación: $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = \frac{16}{5}$

68 La esfera $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$ corta al plano $2x - 2y + z - 2 = 0$ en una circunferencia.

Halla su centro y su radio.

• Obtengamos el centro de la circunferencia:

— El centro de la esfera es $P(3, -2, 1)$.

— La recta que pasa por P y es perpendicular al plano es:

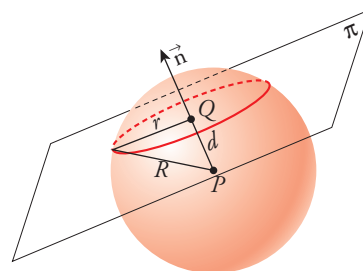
$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

— El punto de corte de esta recta con el plano dado es el centro de la circunferencia:

$$2(3 + 2\lambda) - 2(-2 - 2\lambda) + (1 + \lambda) - 2 = 0$$

$$6 + 4\lambda + 4 + 4\lambda + 1 + \lambda - 2 = 0 \rightarrow 9\lambda + 9 = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

$$Q(1, 0, 0)$$



- Calculamos el radio de la circunferencia:

La distancia entre los centros P y Q es:

$$d = |\overrightarrow{QP}| = |(2, -2, 1)| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

El radio de la esfera es $R = 5$.

Luego el radio de la circunferencia es:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

- 69 a) Halla la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A(4, 1, -3)$ y $B(3, 2, 1)$ y que tiene su centro en la recta $\frac{x-8}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-1}$.**

- b) ¿Cuál es la ecuación del plano tangente en B a dicha esfera?**

- a) Escribimos la recta en paramétricas:

$$\begin{cases} x = 8 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases}$$

Como el centro pertenece a esta recta, es de la forma $C(8 + 2\lambda, 3 + \lambda, -4 - \lambda)$.

La distancia de C a los puntos A y B ha de ser la misma. Además, esta distancia es el radio de la esfera:

$$\text{dist}(A, C) = \text{dist}(B, C) \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$$

$$|(2\lambda + 4, \lambda + 2, -\lambda - 1)| = |(2\lambda + 5, \lambda + 1, -\lambda - 5)|$$

$$\sqrt{(2\lambda + 4)^2 + (\lambda + 2)^2 + (-\lambda - 1)^2} = \sqrt{(2\lambda + 5)^2 + (\lambda + 1)^2 + (-\lambda - 5)^2}$$

$$4\lambda^2 + 16 + 16\lambda + \lambda^2 + 4 + 4\lambda + \lambda^2 + 1 + 2\lambda = 4\lambda^2 + 25 + 20\lambda + \lambda^2 + 1 + 2\lambda + \lambda^2 + 25 + 10\lambda$$

$$-10\lambda = 30 \rightarrow \lambda = -3 \rightarrow C(2, 0, -1)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 3 = \text{radio de la esfera}$$

La ecuación es:

$$(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9, \text{ o bien: } x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 4 = 0$$

- b) Un vector normal al plano es $\overrightarrow{CB} = (1, 2, 2)$.

El plano pasa por $B(3, 2, 1)$. Su ecuación es:

$$1 \cdot (x - 3) + 2 \cdot (y - 2) + 2 \cdot (z - 1) = 0$$

$$x - 3 + 2y - 4 + 2z - 2 = 0$$

$$x + 2y + 2z - 9 = 0$$

- 70 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a $(2, 0, 0)$ y $(-2, 0, 0)$ sea igual a 6.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\sqrt{(x - 2)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x + 2)^2 + y^2 + z^2} = 6$$

$$\sqrt{(x - 2)^2 + y^2 + z^2} = 6 - \sqrt{(x + 2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 = 36 + x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2 - 12\sqrt{(x + 2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$12\sqrt{(x + 2)^2 + y^2 + z^2} = 8x + 36 \rightarrow 3\sqrt{(x + 2)^2 + y^2 + z^2} = 2x + 9$$

$$9[x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2] = 4x^2 + 36x + 81 \rightarrow 9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 + 9z^2 = 4x^2 + 36x + 81$$

$$5x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 45 \rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{5} = 1$$

Es un *elipsoide*.

71 Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de $(0, 0, 3)$ y del plano $z = -3$.

Sea $P(x, y, z)$ un punto del lugar geométrico pedido. Entonces:

$$\text{dist} = (P, (0, 0, 3)) = \text{dist} (P, \{z = -3\})$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 3)^2} = \frac{|z + 3|}{\sqrt{1}} = |z + 3|$$

Por tanto:

$$x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = (z + 3)^2$$

$$x^2 + y^2 + \cancel{z^2} - 6z + \cancel{9} = \cancel{z^2} + 6z + \cancel{9}$$

$$x^2 + y^2 - 12z = 0$$

Se trata de un *paraboloide*.

72 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a $(0, 5, 0)$ y $(0, -5, 0)$ sea igual a 4.

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$|\sqrt{x^2 + (y - 5)^2 + z^2} - \sqrt{x^2 + (y + 5)^2 + z^2}| = 4$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = \pm 4$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2} = \pm 4 + \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2}$$

$$x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2 = 16 + x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2 \pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2}$$

$$\pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = 20y + 16$$

$$\pm 2\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = 5y + 4$$

$$4(x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2) = 25y^2 + 40y + 16$$

$$4x^2 + 4y^2 + 40y + 100 + 4z^2 = 25y^2 + 40y + 16$$

$$4x^2 - 21y^2 + 4z^2 = -84$$

$$-\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{21} = 1$$

Es un *hiperboloide*.

73 ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los puntos $(2, 3, 4)$ y $(2, 3, -4)$ es igual a 8?

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2} = 8$$

$$\cancel{(x - 2)^2} + (y - 3)^2 + \cancel{(z - 4)^2} = 64 + \cancel{(x - 2)^2} + (y + 3)^2 + \cancel{(z - 4)^2} -$$

$$- 16\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2}$$

$$16\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2} = 64 + 12y$$

$$4\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2} = 16 + 3y$$

$$16(x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 8z + 16) = 256 + 96y + 9y^2$$

$$16x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 64x - 128z + 208 = 0$$

Se trata de un *elipsoide*.

74 Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del plano $x = y$ y del punto $(0, -2, 1)$.

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|x - y|}{\sqrt{2}}$$

$$\text{dist}(P, Q) = \sqrt{x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2}$$

$$\left(\frac{|x - y|}{\sqrt{2}}\right)^2 = x^2 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 2z + 1$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = 2x^2 + 2y^2 + 8y + 8 + 2z^2 - 4z + 2$$

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 8y - 4z + 10 = 0$$

Se trata de un *paraboloide*.

Cuestiones teóricas

75 ¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.

a) La ecuación $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano:

I) Si $a = 0$ y $b = 0$ el plano es perpendicular al plano XY .

II) Si $b = 0$ y $c = 0$ el plano es paralelo al plano YZ .

III) Si $a = 0$ y $c = 0$ el plano es perpendicular al eje Y .

b) Si $P \in r$ hay infinitas rectas perpendiculares a r que pasan por P .

c) No es posible calcular la distancia entre el plano $x + y - 2z - 5 = 0$ y la recta $x = y = z$.

d) El punto $P'(2, 6, -3)$ es el simétrico de $P(-1, 3, 3)$ respecto del plano $x + y - 2z - 5 = 0$.

e) No es posible hallar el punto de corte de las rectas

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{2y-1}{-6} = \frac{2z-3}{6} \quad s: \frac{x-3}{-2} = \frac{2y+3}{2} = \frac{z}{4}$$

f) La distancia entre los planos $\alpha: x + y - z = 1$ y $\beta: \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 1 - t \\ z = 2 + s \end{cases}$ es igual a $\sqrt{3}$ u.

g) El plano $2x + y + z = 2$ determina con los ejes de coordenadas un triángulo de área $\sqrt{6}$ u².

h) Si $A(x_1, y_1, z_1)$ es un punto que está contenido en el plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ es un punto tal que $\overrightarrow{AB} \cdot (a, b, c) = 0$, entonces $B \in \pi$.

a) I) Falso, pues el plano es perpendicular a $(0, 0, 1)$, que es la dirección del eje OZ , y es paralelo al plano XY , no perpendicular.

II) Verdadero, pues el plano es perpendicular a $(1, 0, 0)$, que es la dirección del eje OX , y es paralelo al plano YZ .

III) Verdadero, pues el plano es perpendicular a $(0, 1, 0)$, que es la dirección del eje OY .

b) Verdadero, todas las rectas del plano π perpendicular a r que pasan por P verifican la condición.

c) Falso, siempre es posible calcular la distancia entre un plano y una recta.

En este caso, como $\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = (1, 1, -2) \cdot (1, 1, 1) = 0$ y el punto $(0, 0, 0)$ de la recta no está en el plano, $r \parallel \pi$.

La distancia $\text{dist}(r, \pi)$ es la distancia de cualquier punto de la recta al plano.

$$\text{dist}(O, \pi) = \frac{|-5|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{5}{6} \sqrt{6} \text{ u}$$

$$d) \overrightarrow{PP'} = (2, 6, -3) - (-1, 3, 3) = (3, 3, -6) = 3(1, 1, 2) \rightarrow \overrightarrow{PP'} \perp \pi$$

$$\text{El punto medio es } M = \left(\frac{2-1}{2}, \frac{6+3}{2}, \frac{-3+3}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, 0 \right)$$

Sustituimos las coordenadas de M en π :

$$\frac{1}{2} + \frac{9}{2} - 5 = 0 \rightarrow M \in \pi$$

Luego el segmento PP' es perpendicular a π y lo corta en su punto medio. La afirmación es verdadera.

$$e) r: \begin{cases} \vec{d}_r(2, -3, 3) \\ P_r\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \end{cases} \quad s: \begin{cases} \vec{d}_s(-2, 1, 4) \\ P_s\left(3, \frac{-3}{2}, 0\right) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = \left(3, \frac{-3}{2}, 0\right) - \left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(2, -2, -\frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & -3/2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Verdadero, las rectas se cruzan.}$$

$$f) \vec{n}_\beta = (1, -1, 0) \times (1, 0, 1) = (-1, 1, -1) = -\vec{n}_\alpha \rightarrow \text{Los planos son paralelos.}$$

$$\beta: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \beta: z - y - x = 0$$

$$\text{dist}(\alpha, \beta) = |\text{dist}(O, \alpha) - \text{dist}(O, \beta)| = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ u}$$

Falso, la distancia es $\frac{1}{\sqrt{3}}$ u.

$$g) A = OX \cap \pi = (1, 0, 0)$$

$$B = OY \cap \pi = (0, 2, 0)$$

$$C = OZ \cap \pi = (0, 0, 2)$$

$$\overrightarrow{AB}(-1, 2, 0); \overrightarrow{AC}(-1, 0, 2)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|(-1, 2, 0) \times (-1, 0, 2)|}{2} = \frac{|(4, 2, 2)|}{2} = \frac{\sqrt{16+4+4}}{2} = \sqrt{6} \text{ u}^2$$

Verdadero.

$$h) \text{Verdadero, porque } \overrightarrow{AB} \perp \vec{n}_\pi.$$

Si $A \in \pi$, todo vector con origen en A y perpendicular al vector normal al plano tiene su extremo en π , luego $B \in \pi$.

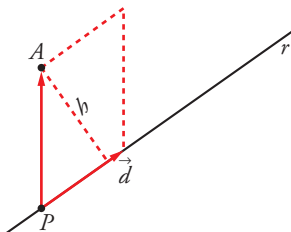
76 Justifica que la distancia del punto $A(x_2, y_2, z_2)$ a la recta $r: \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ es:

$$\text{dist}(A, r) = \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Llamamos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{d}(a, b, c)$. P es un punto de la recta y $\vec{d}$ un vector dirección de esta.

La distancia de A a la recta r es igual a la altura del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{PA}$ y $\vec{d}$, es decir:

$$\text{dist}(A, r) = \frac{\text{Área paralelogramo}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



77 Sean r la recta determinada por el punto A y el vector director $\vec{d}_r$ y s la recta determinada por B y $\vec{d}_s$. Si suponemos que r y s se cruzan:

a) Justifica la igualdad $\text{dist}(r, s) = \frac{|\vec{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$.

b) Justifica que la perpendicular común a r y a s se puede obtener así:

$$\begin{cases} \det(\vec{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ \det(\vec{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$$

a) $\text{dist}(r, s)$ = altura del paralelepípedo determinado por:

$$\vec{AB}, \vec{d}_r \text{ y } \vec{d}_s = \frac{\text{Volumen}}{\text{Área de la base}} = \frac{|\vec{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

b) La recta, p , perpendicular a r y a s , tiene por vector dirección $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$. Esta recta, p , es la intersección de los planos α y β , siendo:

α : Plano que contiene a s y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$; es decir:

$$\alpha: \det(\vec{AX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0, \text{ donde } X = (x, y, z)$$

β : Plano que contiene a r y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$; es decir:

$$\beta: \det(\vec{BX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$$

Por tanto, $p: \begin{cases} \det(\vec{AX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ \det(\vec{BX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$

78 Comprueba que los puntos $A(\lambda, 2, \lambda)$, $B(2, -\lambda, 0)$ y $C(\lambda, 0, \lambda + 2)$ forman un triángulo isósceles.

$$\text{dist}(A, B) = \sqrt{(2 - \lambda)^2 + (-\lambda - 2)^2 + (-\lambda)^2} = \sqrt{3\lambda^2 + 8}$$

$$\text{dist}(A, C) = \sqrt{(\lambda - \lambda)^2 + (-2)^2 + (\lambda + 2 - \lambda)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{dist}(B, C) = \sqrt{(\lambda - 2)^2 + (-\lambda)^2 + (\lambda + 2)^2} = \sqrt{3\lambda^2 + 8}$$

Los lados AB y BC miden lo mismo, luego el triángulo es isósceles.

Página 199

Para profundizar

79 Los puntos $P(1, -1, 1)$ y $Q(3, -3, 3)$ son dos vértices opuestos de un cuadrado. Sabemos que dicho cuadrado está contenido en un plano perpendicular al plano de ecuación $x + y = 0$.

a) Halla los vértices restantes.

b) Calcula el perímetro del cuadrado.

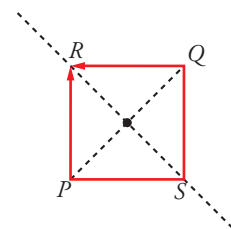
a) Los otros dos vértices, R y S , pertenecen a la mediatriz del segmento PQ .

La mediatriz del segmento PQ tiene como vector dirección el vector normal al plano $x + y = 0$; es decir, $(1, 1, 0)$.

Pasa por el punto medio del segmento PQ ; es decir, por $M(2, -2, 2)$. Luego la ecuación de la mediatriz es:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Un punto de r es de la forma $R(2 + \lambda, -2 + \lambda, 2)$.

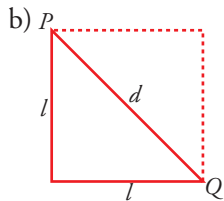


Buscamos R tal que $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$ (es decir $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{QR}$):

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PR}(1+\lambda, -1+\lambda, 1) \\ \overrightarrow{QR}(-1+\lambda, 1+\lambda, -1) \end{array} \right\}$$

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = \lambda^2 - 1 + \lambda^2 - 1 - 1 = 2\lambda^2 - 3 = 0 \quad \begin{cases} \lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \lambda = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Los vértices son: $R\left(\frac{4+\sqrt{6}}{2}, \frac{-4+\sqrt{6}}{2}, 2\right)$ y $S\left(\frac{4-\sqrt{6}}{2}, \frac{-4-\sqrt{6}}{2}, 2\right)$



La longitud de la diagonal es:

$$d = |\overrightarrow{PQ}| = |(2, -2, 2)| = \sqrt{12}$$

$$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d^2 = 2l^2 \rightarrow 12 = 2l^2 \rightarrow l = \sqrt{6}$$

El perímetro será: $P = 4\sqrt{6}$ u

80 Considera las rectas r , s y t siguientes:

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -2 - 2\mu \end{cases} \quad t: \begin{cases} x = \gamma \\ y = -1 - \gamma \\ z = \gamma \end{cases}$$

Halla un punto P que esté en la recta t y tal que el plano que determina con la recta s contenga a la recta r .

$$P \in t \rightarrow P = (\gamma, -1 - \gamma, \gamma)$$

$$r: \begin{cases} \vec{d}_r(0, 1, 1) \\ P_r(-2, 0, 0) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} \vec{d}_s(1, -1, -2) \\ P_s(0, 0, -2) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_sP}(\gamma, -1 - \gamma, \gamma + 2)$$

π : plano que contiene a P y a s

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z+2 \\ 1 & -1 & -2 \\ \gamma & -1-\gamma & \gamma+2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: (4+3\gamma)x + (2+3\gamma)y + z + 2 = 0$$

Calculamos el valor de γ para que $P_r \in \pi$:

$$P_r \in \pi \rightarrow (4+3\gamma) \cdot (-2) + 2 = 0 \rightarrow -8 - 6\gamma + 2 = 0 \rightarrow \gamma = -1$$

La condición para que $r \subset \pi$ es que $\vec{d}_r \perp \vec{n}_\pi \rightarrow \vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$.

$$\vec{n}_\pi = (3+2\gamma, \gamma, -\gamma) = (1, -1, 1)$$

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = (0, 1, 1) \cdot (1, -1, 1) = 0$$

Luego $r \subset \pi$.

El punto pedido es $P(-1, 0, -1)$.

- 81** Halla las intersecciones de la superficie $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ con los tres planos coordenados.

¿Qué figura obtienes? ¿Cómo se llama la superficie dada?

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Con $x = 0$: $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes 4 y 3.*

Con $y = 0$: $\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes 5 y 3.*

Con $z = 0$: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes 5 y 4.*

Es un *elipsoide*.

- 82** Halla el centro y las longitudes de los ejes del elipsoide siguiente:

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$$

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$$

$$2(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 4z + 4) = 3 + 8 + 3 + 4$$

$$2(x - 2)^2 + 3(y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 18$$

$$\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{6} + \frac{(z - 2)^2}{18} = 1$$

Centro: $(2, -1, 2)$

Semiejes: $3, \sqrt{6}$ y $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

- 83** Halla las intersecciones de la superficie $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$ con los planos coordenados, y describe qué tipo de curvas obtienes. ¿Cómo se llama la superficie dada?

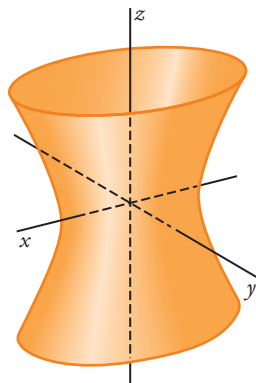
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$$

Con $x = 0$: $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1 \rightarrow$ *Hipérbola, semieje real 2.*

Con $y = 0$: $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 \rightarrow$ *Hipérbola, semieje real 3.*

Con $z = 0$: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes 3 y 2.*

Es un *hiperboloide*.

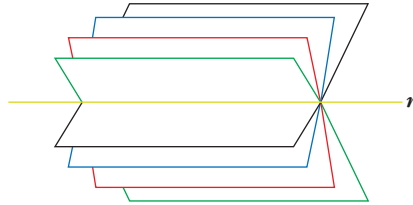


84 Haz de planos

La recta $r: \begin{cases} \pi: 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ \sigma: x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ es la intersección de los planos π y σ .

El conjunto de todos los planos que contienen a r se llama **HAZ DE PLANOS** de arista r , y su expresión analítica es:

$$a(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$$



Para cada par de valores de a y b (salvo para $a = 0$ y $b = 0$), se obtiene la ecuación de un plano del haz.

a) Halla el plano del haz que pasa por el origen de coordenadas.

b) ¿Para qué valor de k uno de los planos del haz es perpendicular a la recta $t: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{k}$?
¿Cuál es ese plano?

c) Halla dos puntos que pertenezcan a todos los planos del haz anterior.

d) Escribe la expresión del haz de planos cuya arista es la recta $s: \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

e) ¿Cuál de los planos de este haz dista más del origen de coordenadas?

a) El término independiente será cero: $-4a + b = 0 \rightarrow b = 4a$. Luego:

$$a(2x + 3y - z - 4) + 4a(x - 2y + z + 1) = 0; \text{ es decir:}$$

$$2x + 3y - z - 4 + 4x - 8y + 4z + 4 = 0$$

$$2x + 3y - z - 4 + 4x - 8y + 4z + 4 = 0$$

$$6x - 5y + 3z = 0$$

b) Un plano del haz es:

$$(2a + b)x + (3a - 2b)y + (-a + b)z + (-4a + b) = 0$$

Un vector normal al plano es:

$$\vec{n} (2a + b, 3a - 2b, -a + b)$$

Para que el plano sea perpendicular a la recta, el vector normal del plano y el vector dirección de la recta han de ser paralelos, es decir, sus coordenadas deben ser proporcionales:

$$\frac{2a+b}{3} = \frac{3a-2b}{5} = \frac{-a+b}{k}$$

$$\left. \begin{aligned} 10a + 5b &= 9a - 6b \\ 2ka + kb &= -3a + 3b \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a + 11b &= 0 \rightarrow a = -11b \\ (2k+3)a + (k-3)b &= 0 \end{aligned}$$

$$-11(2k+3) + (k-3) = 0 \rightarrow -22k - 33 + k - 3 = 0$$

$$-21k - 36 = 0 \rightarrow k = \frac{-36}{21} = \frac{-12}{7} \rightarrow k = \frac{-12}{7}$$

El plano del haz es:

$$-11b(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$$

$$-11(2x + 3y - z - 4) + (x - 2y + z + 1) = 0$$

$$-22x - 33y + 11z + 44 + x - 2y + z + 1 = 0$$

$$-21x - 35y + 12z + 45 = 0$$

Otra resolución:

Si la recta es perpendicular a un cierto plano del haz, será perpendicular a todas las rectas contenidas en ese plano, y, en concreto, a la recta r , arista del haz.

Vector dirección de r : $\vec{d} = (2, 3, -1) \times (1, -2, 1) = (1, -3, -7)$

Vector dirección de t : $\vec{d}' = (3, 5, k)$

$$\vec{d} \cdot \vec{d}' = 0 \rightarrow (1, -3, -7) \cdot (3, 5, k) = 3 - 15 - 7k = 0 \rightarrow k = \frac{-12}{7}$$

A partir de aquí, obtendríamos la relación entre a y b , y el plano del haz como en el caso anterior.

c) Los puntos que pertenecen a todos los planos del haz son los puntos de la recta r . Por ejemplo: $(1, 0, -2)$ y $(0, 3, 5)$.

d) Escribimos la recta s en forma implícita:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} \rightarrow -2x+10 = 3y+3 \rightarrow -2x-3y+7=0$$

$$\frac{x-5}{3} = \frac{z-3}{1} \rightarrow x-5 = 3z-9 \rightarrow x-3z+4=0$$

$$s: \begin{cases} 2x+3y-7=0 \\ x-3z+4=0 \end{cases}$$

La expresión del haz de planos cuya arista es s es:

$$a(2x+3y-7) + b(x-3z+4) = 0$$

e) Es el plano que contiene a la recta (puesto que es del haz) y es perpendicular a $\overrightarrow{OO'}$, siendo $O(0, 0, 0)$ y O' la proyección de O sobre la recta.

Lo calculamos en el caso de la recta s :

Un punto genérico de la recta s es:

$$P(5+3\lambda, -1-2\lambda, 3+\lambda)$$

Un vector dirección de s es $\vec{d}_s(3, -2, 1)$.

El vector $\overrightarrow{OP}$ ha de ser perpendicular a $\vec{d}_s$:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{d}_s = 0 \rightarrow 3(5+3\lambda) - 2(-1-2\lambda) + (3+\lambda) = 0$$

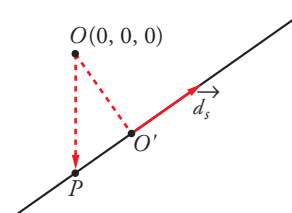
$$15 + 9\lambda + 2 + 4\lambda + 3 + \lambda = 0 \rightarrow 14\lambda + 20 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-20}{14} = \frac{-10}{7}$$

Luego:

$O'\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; y el vector normal al plano es $\overrightarrow{OO'}\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; o bien $(5, 13, 11)$.

El plano será:

$$5\left(x - \frac{5}{7}\right) + 13\left(y - \frac{13}{7}\right) + 11\left(z - \frac{11}{7}\right) = 0 \rightarrow 5x + 13y + 11z - 45 = 0$$



Autoevaluación**Página 199**

- 1** a) Calcula la distancia del punto $A(1, 0, 0)$ al plano que pasa por $P(1, -1, -2)$ y es paralelo al plano $\pi: x + 2y + 3z + 6 = 0$.

b) Halla el punto simétrico de A respecto del plano π .

c) ¿Qué ángulo forma la recta que pasa por A y P con π ?

a) $\pi': x + 2y + 3z + k = 0$

$$P \in \pi' \rightarrow 1 - 2 - 6 + k = 0 \rightarrow k = 7 \rightarrow \pi': x + 2y + 3z + 7 = 0$$

$$\text{dist}(A, \pi') = \frac{|1 + 7|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{4}{7} \sqrt{2} \sqrt{7} \text{ u}$$

b) $A'(x, y, z)$: simétrico de A respecto de π .

r : recta perpendicular a π que pasa por A .

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

$$M = r \cap \pi \rightarrow (1 + \lambda) + 2(2\lambda) + 3(3\lambda) + 6 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$M\left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right)$$

$A'(x, y, z)$: simétrico de A respecto de M .

$$\left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right) \rightarrow x = 0, y = -2, z = -3 \rightarrow A' = (0, -2, -3)$$

c) $\overrightarrow{AP} = (1, -1, -2) - (1, 0, 0) = (0, -1, -2)$

$$\vec{d}(0, -1, -2)$$

$$\widehat{\text{sen}(s, \pi)} = \frac{|(0, -1, -2) \cdot (1, 2, 3)|}{\sqrt{5} \sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{35}} \sqrt{2} \rightarrow \widehat{(s, \pi)} = \arcsen \frac{3}{\sqrt{35}} \sqrt{2}$$

- 2** a) Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de $P(5, 1, 3)$ y $Q(3, 7, -1)$.

b) Comprueba que el plano que obtienes, π , es perpendicular al segmento PQ en su punto medio.

c) El plano π corta a los ejes coordenados en los puntos A , B y C . Calcula el área del triángulo ABC .

d) Calcula el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y O (origen de coordenadas).

a) $A(x, y, z)$: punto genérico.

$$\text{dist}(A, P) = \text{dist}(A, Q)$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2}$$

$$x^2 - 10x + y^2 - 2y + z^2 - 6z + 35 = x^2 - 6x + y^2 - 14y + z^2 + 2z + 59$$

$$x^2 - 10x + y^2 - 2y + z^2 - 6z + 35 = (x^2 - 6x + y^2 - 14y + z^2 + 2z + 59) = 0$$

$$-4x + 12y - 8z - 24 = 0$$

Es un plano:

$$\pi: -x + 3y - 2z - 6 = 0$$

b) $\vec{n}_\pi(-1, 3, -2)$

$$\overrightarrow{PQ} = (3, 7, -1) - (5, 1, 3) = (-2, 6, -4) = 2(-1, 3, -2) \rightarrow \overrightarrow{PQ} // \vec{n}_\pi \rightarrow \pi \perp \overrightarrow{PQ}$$

$$M = \left(\frac{8}{2}, \frac{8}{2}, \frac{2}{2}\right) = (4, 4, 1)$$

Sustituimos las coordenadas de M en π :

$$-4 + 12 - 2 - 6 = 0 \rightarrow M \in \pi$$

Luego π es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio.

c) $A(-6, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, -3)$

$$\overrightarrow{AB}(6, 2, 0)$$

$$\overrightarrow{AC}(6, 0, -3)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |(6, 2, 0) \times (6, 0, -3)| = \frac{1}{2} |(-6, 18, -12)| = \frac{6}{2} |(-1, 3, -2)| = 3\sqrt{1+9+4} = 3\sqrt{14} \text{ u}^2$$

d) $\overrightarrow{OA}(-6, 0, 0), \overrightarrow{OB}(0, 2, 0), \overrightarrow{OC}(0, 0, -3)$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6 \text{ u}^3$$

3 Determina el punto simétrico del punto $A(-3, 1, 6)$ respecto de la recta r de ecuación:

$$x-1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

Buscamos un punto M de la recta de manera que el vector $\overrightarrow{AM}$ sea perpendicular al vector dirección de r .

Un punto de r es de la forma $(1, -3, -1) + \lambda(1, 2, 2) = (1 + \lambda, -3 + 2\lambda, -1 + 2\lambda)$.

$$\overrightarrow{AM}(4 + \lambda, -4 + 2\lambda, -7 + 2\lambda)$$

El vector dirección de la recta es $(1, 2, 2)$.

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{d}_r = 4 + \lambda - 8 + 4\lambda - 14 + 4\lambda = -18 + 9\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

El punto M es $(3, 1, 3)$.

Buscamos un punto $A'(\alpha, \beta, \gamma)$ simétrico de A respecto de M :

$$A' = M + \overrightarrow{AM} = (3, 1, 3) + (6, 0, -3) = (9, 1, 0)$$

4 Considera la recta y el plano siguientes:

$$r: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1} \quad \pi: 3x + 4y - 6 = 0$$

a) Comprueba que son paralelos y calcula $\text{dist}(r, \pi)$.

b) Halla las ecuaciones de dos rectas distintas que estén contenidas en π y que sean paralelas a r y calcula la distancia entre ellas.

a) $r: \begin{cases} \vec{d}_r(-4, 3, 1) \\ P_r(1, 2, 3) \end{cases}$

$$\pi: 3x + 4y - 6 = 0$$

$$\vec{d}_r(-4, 3, 1), \vec{n}_\pi(3, 4, 0)$$

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \rightarrow \vec{d}_r \perp \vec{n}_\pi \rightarrow r // \pi$$

$$\text{dist}(r, \pi) = \text{dist}(P_r, \pi) = \left| \frac{3+8-6}{5} \right| = 1 \text{ u}$$

b) Tomamos dos puntos de π distintos, P y P' .

$$s: \begin{cases} \vec{d}_s = \vec{d}_r = (-4, 3, 1) \\ P(2, 0, 1) \end{cases}$$

$$t: \begin{cases} \vec{d}_t = \vec{d}_r = (-4, 3, 1) \\ P(2, 0, 2) \end{cases}$$

$$\text{dist}(s, t) = \text{dist}(P, t) = \frac{|\overrightarrow{PP'} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|} = \frac{|(0, 0, 1) \times (-4, 3, 1)|}{\sqrt{16+9+1}} = \frac{|(-3, -4, 0)|}{\sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}} \text{ u}$$

5 Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$ y $s: \begin{cases} 2x - y + z + 4 = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$:

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s .

b) Calcula la distancia entre r y s .

a) $\vec{d}_r(2, -1, 1); \vec{d}_s = (2, -1, 1) \times (1, 0, 3) = (-3, -5, 1)$

Por tanto, si llamamos t a la recta que buscamos:

$$\vec{d}_t = (2, -1, 1) \times (-3, -5, 1) = (4, -5, -13)$$

Plano α que contiene a t y a r :

$$\left. \begin{matrix} P(3, 5, 4) \\ \vec{d}_r(2, -1, 1) \\ \vec{d}_t(4, -5, -13) \end{matrix} \right\} \rightarrow \alpha: \begin{vmatrix} x-3 & 2 & 4 \\ y-5 & -1 & -5 \\ z-4 & 1 & -13 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \alpha: 3x + 5y - z - 30 = 0$$

Plano β que contiene a t y a s :

Hallamos primero un punto de s haciendo $x = 0$ en las ecuaciones de s :

$$\left. \begin{matrix} -y + z + 4 = 0 \\ 3z = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 4 \end{cases} \rightarrow Q(0, 4, 0)$$

Por tanto:

$$\left. \begin{matrix} Q(0, 4, 0) \\ \vec{d}_s(-3, -5, 1) \\ \vec{d}_t(4, -5, -13) \end{matrix} \right\} \rightarrow \beta: \begin{vmatrix} x & -3 & 4 \\ y-4 & -5 & -5 \\ z & 1 & -13 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \beta: 2x - y + z + 4 = 0$$

La recta t es:

$$t: \begin{cases} 3x + 5y - z - 30 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

b) Expresamos la recta s en ecuaciones paramétricas para que sea fácil tomar un punto, P , y un vector director, $\vec{d}_s$, de dicha recta. Hacemos $z = \lambda$ y despejamos:

$$s: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 4 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad P(0, 4, 0) \in s \quad \vec{d}_s(-3, -5, 1)$$

Q y $\vec{d}_r$ son, respectivamente, un punto y un vector director de la recta r :

$$Q(3, 5, 4) \in r; \vec{d}_r(2, -1, 1)$$

Hallamos el vector $\overrightarrow{PQ}$ (3, 1, 4)

$$\text{dist}(r, s) = \frac{|[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

$$[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -45$$

$$|\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = |-4, 5, 13| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 13^2} = \sqrt{210}$$

$$\text{dist}(r, s) = \frac{|-45|}{\sqrt{210}} = \frac{45}{\sqrt{210}} = \frac{3\sqrt{210}}{14} \text{ u}$$

6 a) Halla el centro y el radio de esta esfera:

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 20 = 0$$

b) Calcula el radio de la circunferencia que determina el plano $3x - 4z + 5 = 0$ al cortar a S .

a) Completamos cuadrados en la ecuación de la esfera:

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5^2$$

Por tanto, el *radio* es 5, y el *centro*, $C(2, 0, -1)$.

b) Hallamos la distancia del centro de la esfera al plano $\pi: 3x - 4z + 5 = 0$:

$$\text{dist}(C, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 4(-1) + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ u}$$

Por Pitágoras:

$$r = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ u}$$

