Autoevaluación

Página 200

1 **Determina todos los vectores de módulo 2 que son ortogonales a los vectores $\vec{u}(1, -1, -1)$ y $\vec{v}(-1, 2, 1)$.**

Los vectores perpendiculares a los dos vectores a la vez son proporcionales al producto vectorial de ambos.

$\vec{w} = (1, -1, -1) \times (-1, 2, 1) = (1, 0, 1)$

$|\vec{w}| = 2$

Los vectores que buscamos son:

$$\vec{w}_1 = 2\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \text{ y } \vec{w}_2 = -2\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$$

2 **Dados los vectores $\vec{u}(2, 0, 0)$, $\vec{v}(1, 0, -1)$ y $\vec{w}(-2, 3, 2)$, calcula:**

a) El área del paralelogramo determinado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b) El ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) El volumen del paralelepípedo que forman $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

a) Área $= |\vec{v} \times \vec{w}|$

$\vec{v} \times \vec{w} = (1, 0, -1) \times (-2, 3, 2) = (3, 0, 3) \to$ Área $= \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ u^2

b) $$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{(2, 0, 0) \cdot (1, 0, -1)}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

c) $$V = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \text{ u}^3$$

3 **Dados los puntos $P(3, 2, 0)$, $Q(5, 1, 1)$ y $R(2, 0, -1)$:**

a) Halla la recta que pasa por P y Q.

b) Halla el plano que contiene a P, Q y R.

c) Halla la distancia entre P y Q.

a) $\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1)$

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) $\overrightarrow{PR} = (-1, -2, -1)$

$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, -1, 1) \times (-1, -2, -1) = (3, 1, -5) \perp \pi$

$\pi: 3(x-3) + 1(y-2) - 5(z-0) = 0 \to 3x + y - 5z - 11 = 0$

c) $dist(P, Q) = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ u

4 Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento de extremos $A(0, -1, 3)$ y $B(2, -1, 1)$ y que pasa por el punto medio de dicho segmento.

Punto medio: $M = \left(\dfrac{0+2}{2}, \dfrac{-1-1}{2}, \dfrac{3+1}{2}\right) = (1, -1, 2)$

Vector normal al plano: $\overrightarrow{AB} = (2, -1, 1) - (0, -1, 3) = (2, 0, -2)$

La ecuación del plano buscado es: $(x - 1) - 2(z - 2) = 0 \ \rightarrow\ \pi\text{: } 2x - 2z + 2 = 0$

5 Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano $2x + y + 2z - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas.

Puntos de corte:

$P = \pi \cap OX = (1, 0, 0)$

$Q = \pi \cap OY = (0, 2, 0)$

$R = \pi \cap OZ = (0, 0, 1)$

$\overrightarrow{PQ} = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0)$

$\overrightarrow{PR} = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$

$\text{Área triángulo} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \dfrac{1}{2}|(-1, 2, 0) \times (-1, 0, 1)| = \dfrac{1}{2}|(2, 1, 2)| = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{9} = \dfrac{3}{2}\ u^2$

6 Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente al eje Z y pasa por el punto $P(1, 2, 3)$.

El vector director de r, el del eje Z y el que une P con un punto del eje Z deben ser coplanarios.

$Q(0, 0, 1) \qquad P(1, 2, 3)$

$$\vec{v}_z = (0, 0, 1) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow\ 2a - b = 0$$

Además, $\vec{v}_z \cdot \vec{d}_r = 0 \ \rightarrow\ (0, 0, 1)(a, b, c) = 0 \ \rightarrow\ c = 0$

El vector director de r es de la forma $(1, 2, 0)$.

Por tanto, $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 2, 0)$

7 Considera las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ ax - z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x + by = 3 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

a) Determina los valores de $a \neq 0$ y $b \neq 0$ para que r y s sean paralelas.

b) ¿Existen valores de $a \neq 0$ y $b \neq 0$ para que las rectas sean coincidentes?

$$r: \begin{cases} \vec{d}_r = (2, -1, 0) \times (a, 0, 1) = (1, 2, a) \\ P_r = (0, 0, 0) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} \vec{d}_s = (1, b, 0) \times (0, 1, 1) = (b, -1, 1) \\ P_s = (3, 0, 3) \end{cases}$$

a) $\vec{d}_r = k\vec{d}_s \ \rightarrow\ \dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{-1} = \dfrac{a}{1} \ \rightarrow\ \begin{cases} a = -2 \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

b) $\overrightarrow{P_rP_s} = (3, 0, 3)$

Para que sean coincidentes, necesitamos $\overrightarrow{P_rP_s} = k\vec{d}_s \ \rightarrow\ \dfrac{3}{b} = \dfrac{0}{-1} \neq \dfrac{3}{1}$

Las coordenadas no son proporcionales para ningún valor de b, luego no existen valores de $a \neq 0$ y de $b \neq 0$ para los cuales las rectas son coincidentes.

8 **Sean las rectas** $r: x = y = z$ **y** $s: \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 3z = 1 \end{cases}$**.**

a) Comprueba que r **y** s **se cruzan.**

b) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas r **y** s**.**

$r: \begin{cases} \vec{d}_r = (1, 1, 1) \\ P_r = (0, 0, 0) \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} \vec{d}_s = (1, -1, 0) \times (1, 0, -3) = (3, 3, 1) \\ P_s = (1, 0, 0) \end{cases}$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (1, 0, 0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \to \text{Las rectas se cruzan.}$$

b) Vector perpendicular común: $\vec{w} = (1, 1, 1) \times (3, 3, 1) = (-2, 2, 0)$

π: plano que contiene a r y a la dirección $\vec{w}$:

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to -2x - 2y + 4z = 0$$

π': plano que contiene a s y a la dirección $\vec{w}$:

$$\pi': \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to -2x - 2y + 12z + 2 = 0$$

La recta pedida, t, es:

$$t: \begin{cases} -2x - 2y + 4z = 0 \\ -2x - 2y + 12z + 2 = 0 \end{cases}$$

9 **Considera las rectas** $r: \begin{cases} 2x - 4z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ **y** $s: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{a} = \dfrac{2z-1}{4}$**.**

a) Estudia su posición relativa según los valores de a**.**

b) Calcula el ángulo que forman en el caso $a = 2$**.**

$r: \begin{cases} \vec{d}_r = (2, 0, -4) \times (1, 1, 1) = (4, -6, 2) \\ P_r = (1, 0, 0) \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} \vec{d}_s = (2, a, 2) \\ P_s = \left(0, -2, \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$

a) $ran \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix} = 2$

Las rectas se cruzan o se cortan para cualquier valor de a, pero nunca serán paralelas.

$\overrightarrow{P_rP_s} = \left(-1, -2, \dfrac{1}{2}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ -1 & -2 & 1/2 \end{pmatrix} \to |A| = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ -1 & -2 & 1/2 \end{vmatrix} = 4a + 26 = 0 \to a = -\frac{13}{2}$$

- Si $a \neq -\dfrac{13}{2} \to ran(A) = 3 \to$ Las rectas se cruzan.
- Si $a = -\dfrac{13}{2} \to ran(A) = 2 \to$ Las rectas se cortan.

b) $$cos\,(\widehat{\vec{r}, \vec{s}}) = |cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})| = \left|\frac{\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s}{|\vec{d}_r||\vec{d}_s|}\right| = \frac{(4, -6, 2) \cdot (2, 2, 2)}{2\sqrt{14} \cdot 2\sqrt{3}} = 0 \to (\widehat{\vec{r}, \vec{s}}) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Las rectas son perpendiculares.

10 a) Halla las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por $A(0, 2, -4)$ y es paralela a r:
$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 1 = 0 \\ x + 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases}.$$

b) Calcula la distancia del punto $P(1, 1, 0)$ a r.

a) Calculamos el vector director de r, $\vec{d_r}$.

$\vec{d_r} = (5, -3, 2) \times (1, 3, -2) = (0, 12, 18)$

Como son paralelas, $\vec{d_s} // \vec{d_r} \to \vec{d_s} = (0, 2, 3)$

Entonces, $s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases}$

b) $r: \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 1 = 0 \\ x + 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \to x = -\dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{2}{3}\lambda - \dfrac{7}{6},\ z = \lambda$

$$dist(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PP_r} \times \vec{d_r}|}{|\vec{d_r}|}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d_r} = \left(0, \dfrac{2}{3}, 1\right) = \dfrac{1}{3}(0, 2, 3); \quad P_r = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{7}{6}, 0\right) \\ \overrightarrow{PP_r} = \left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{13}{6}, 0\right) \\ \overrightarrow{PP_r} \times \vec{d_r} = \left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{13}{6}, 0\right) \times (0, 2, 3) = \left(-\dfrac{13}{2}, \dfrac{9}{2}, -2\right) \end{array}\right\} \to dist(P, r) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{143}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{22}}{2} \text{ u}$$

11 Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 0, -1)$, es paralelo a la recta $r: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\alpha: 2x - y + z + 1 = 0$.

$(1, -2, 0) \times (0, 0, 1) = (-2, -1, 0) // (2, 1, 0) = \vec{d_r}$

Sea π el plano buscado y $\vec{n}$ su vector normal. Entonces:

$\pi // r \Rightarrow \vec{d_r} \perp \vec{n}$

$\pi \perp \sigma \Rightarrow \vec{n} \perp (2, -1, 1)$

Por tanto, $\vec{n} = (2, 1, 0) \times (2, -1, 1) = (1, -2, -4)$

Ecuación de π: $1(x - 1) - 2(y - 0) - 4(z + 1) = 0 \to x - 2y - 4z - 5 = 0$

12 Considera el plano $\pi: x + y - z = 0$ y el punto $P(1, 1, -1)$. Obtén:

a) El punto Q del plano π tal que la recta s determinada por P y Q sea perpendicular al plano π.

b) Los puntos R de la recta s tales que la distancia de R a π sea el doble que la distancia de P a π.

a) s: recta perpendicular a π que pasa por P.

$s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

Q debe ser la intersección del plano π y la recta perpendicular a π que pasa por P:

$Q = s \cap \pi$

$(1 + \lambda) + (1 + \lambda) - (-1 - \lambda) = 0 \ \rightarrow \ \lambda = -1$

$Q = (0, 0, 0)$

b) $dist\,(P, \pi) = \dfrac{3}{\sqrt{3}} \ \rightarrow \ dist\,(R, \pi) = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$

$$dist\,(R, \pi) = \left| \frac{(1+\lambda)+(1+\lambda)-(-1-\lambda)}{\sqrt{3}} \right| = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3\lambda+3}{\sqrt{3}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{3\lambda+3}{\sqrt{3}} = -\dfrac{6}{\sqrt{3}} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\lambda+3=6 \ \rightarrow \ \lambda=1 \\ 3\lambda+3=-6 \ \rightarrow \ \lambda=-3 \end{array}\right\}$$

Hay dos soluciones: $R_1 = (2, 2, -2)$, $R_2 = (-2, -2, 2)$

13 Halla la ecuación de la recta que está contenida en el plano α: $x + y + z = 3$, es paralela al plano β: $x = 0$ y que pasa por el punto simétrico de $P(-1, 1, 1)$ respecto de β.

Sea M: $\beta \cap r$ con $r \perp \beta$ que pasa por P.

$$r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$-1 + \lambda = 0 \ \rightarrow \ \lambda = 1 \ \rightarrow \ M = (0, 1, 1)$

P': simétrico de P respecto de β $\rightarrow$ M es punto medio de P y P'.

$P' = (x, y, z)$

$$M = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z+1}{2} \right) = (0, 1, 1) \ \rightarrow \ P' = (1, 1, 1)$$

Los planos paralelos a β son: $x + k = 0$

La recta s pedida tiene como ecuaciones implícitas:

$$s: \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + k = 0 \end{cases}$$

Para calcular k tenemos que tener en cuenta que $P \in s$:

$$1 + k = 0 \ \rightarrow \ k = -1 \ \rightarrow \ s: \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

14 Dadas las rectas:

$$r: \frac{2x-1}{2} = 1 - y = z \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x + y + z + m = 0 \\ 3x - 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

calcula m para que estén en el mismo plano.

$$\left.\begin{array}{l} r: \dfrac{x-(1/2)}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{1} \ \rightarrow \ \vec{d}_r = (1, -1, 1) \\ s: \vec{d}_s = (1, 1, 1) \times (3, 0, -4) = (-4, 7, -3) \end{array}\right\}$$

Evidentemente, las rectas no son paralelas. Veamos cómo ha de ser m para que se corten.

Conviene expresar cada una de las dos rectas como intersección de dos planos. Obligamos a que los cuatro planos tengan algún punto común:

$$r: \begin{cases} \dfrac{2x-1}{2} = z \;\to\; 2x - 2z = 1 \\ 1 - y = z \;\to\; y + z = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + y + z = -m \\ 3x - 4z = -1 \end{cases}$$

Para que el sistema tenga solución, es necesario que el determinante de la matriz ampliada sea cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -m \\ 3 & 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -2m - 8;\; -2m - 8 = 0 \iff m = -4$$

Si $m = -4$, las dos rectas se cortan. Por tanto, están en un mismo plano.

15 **Dados la recta y el plano siguientes, halla la ecuación de un plano paralelo a β que diste 3 unidades de la recta r:**

$$r: \begin{cases} 2x - 5y - 1 = 0 \\ x + 5z + 7 = 0 \end{cases} \qquad \beta: x - 3y - z + 6 = 0$$

Los planos π paralelos a β son: $x - 3y - z + k = 0$.

$$r: \begin{cases} 2x - 5y - 1 = 0 \\ x + 5z + 7 = 0 \end{cases} \;\to\; x = -5\lambda - 7,\; y = -2\lambda - 3,\; z = \lambda$$

$$s: \begin{cases} \vec{d_r} = (-5, -2, 1) \\ P_r = (-7, -3, 0) \end{cases}$$

$$(-5, -2, 1) \cdot (1, -3, -1) = 0 \;\to\; r \,//\, \beta$$

$$dist\,(r, \pi) = dist\,(P_r, \pi) = \frac{|-7 + 9 + k|}{\sqrt{11}} = \frac{|2 + k|}{\sqrt{11}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2+k}{\sqrt{11}} = 3 \;\to\; k = 3\sqrt{11} - 2 \\ \dfrac{2+k}{\sqrt{11}} = -3 \;\to\; k = -3\sqrt{11} - 2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

$$\pi_1 = x - 3y - z + 3\sqrt{11} - 2 = 0,\; \pi_2 = x - 3y - z - 3\sqrt{11} - 2 = 0$$

16 **Halla un punto de la recta $x = -y = z$ tal que su distancia a $r: \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ sea igual a 1 unidad.**

$$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \;\to\; P_s = (\lambda, -\lambda, \lambda) \qquad r: \begin{cases} \vec{d_r} = (1, 1, 0) \times (0, 0, 1) = (1, -1, 0) \\ P_r = (0, 0, 3) \end{cases}$$

$$dist\,(P_s, r) = \frac{|\overrightarrow{P_sP_r} \times \vec{d_r}|}{|\vec{d_r}|} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_sP_r} = (-\lambda, \lambda, 3 - \lambda) \\ \overrightarrow{PP_r} \times \vec{d_r} = (-\lambda, \lambda, 3 - \lambda) \times (1, -1, 0) = (3 - \lambda, 3 - \lambda, 0) \\ |\overrightarrow{PP_r} \times \vec{d_r}| = \sqrt{2}\,(3 - \lambda) \end{array}\right\} \;\to\; dist\,(P_s, r) = \frac{\sqrt{2}\,(3 - \lambda)}{\sqrt{2}} = (3 - \lambda) = 1$$

$$dist\,(P_s, r) = 1 \;\to\; 3 - \lambda = 1 \;\to\; \lambda = 2$$

$$P_s = (\lambda, -\lambda, \lambda) = (2, -2, 2)$$

17 **Calcula las ecuaciones de la recta r' sabiendo que es la proyección ortogonal de la recta:**

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 3 \end{cases} \quad \textbf{sobre} \quad \pi: x - y + 2z + 4 = 0.$$

La recta r' es intersección de dos planos: el π y un plano α que contiene a r y es perpendicular a π.

Un vector normal a α es perpendicular al vector dirección de r y al vector normal a π.

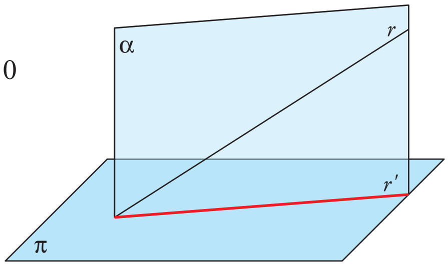
Por tanto:

$(1, 3, 0) \times (1, -1, 2) = (6, -2, -4) \,//\, (3, -1, -2) = \vec{n};\ \ \vec{n} \perp \alpha$

$(0, -2, 3) \in \alpha$

$\alpha: 3(x - 0) - (y + 2) - 2(z - 3) = 0 \ \rightarrow\ 3x - y - 2z + 4 = 0$

La recta es $r' = \begin{cases} 3x - y - 2z + 4 = 0 \\ x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$



18 **Dada la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 39 = 0$, halla:**

a) Su centro y su radio.

b) La ecuación correspondiente al plano tangente en el punto $P(1, -3, 7)$.

a) *Centro*: $C(1, -3, 0)$

Radio: $r = 7$

b) $(1, -3, 7)$ ¿pertenece a la superficie esférica?

$1 + 9 + 49 - 2 - 18 - 39 = 0$. Sí pertenece, pues cumple la ecuación.

(También podríamos haber comprobado que $dist\,(P, C) = 7$).

El vector $\overrightarrow{CP}$ es perpendicular al plano tangente, π:

$\overrightarrow{CP}\,(0, 0, 7) \,//\, (0, 0, 1)$, perpendicular a π.

Ecuación del plano tangente a la esfera en el punto P es:

$\pi: 0(x - 1) + 0(y + 3) + 1(z - 7) = 0 \ \rightarrow\ z = 7$