APLICACIÓN DERIVADAS: TANGENTE A UNA CURVA

1 *Hallar las rectas tangentes a la curva* $y = \dfrac{x^3 - 3x^2}{9}$ *que sean paralelas a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.*

1º. Nos piden tangente a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

La pendiente de esa bisectriz (y=x) es m=1.

2º. Derivamos la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2}{9} \implies f'(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{9}$

3º. La derivada en cada punto nos indica el valor de la pendiente de la curva en ese punto.

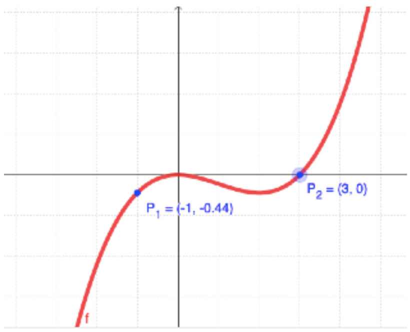
Buscamos los puntos donde la derivada vale 1 igualando la derivada f' a 1:

$$f'(x) = 1 \iff \frac{3x^2 - 6x}{9} = 1 \iff 3x^2 - 6x = 9 \iff x^2 - 2x + 3 = 0 \iff \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

4º. Obtenemos la ordenada de la función en los puntos de abscisa x= –1 y x=3, sustituyendo esos valores en f(x)

$$f(-1) = \frac{(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2}{9} \implies f(1) = -\frac{4}{9}$$

$$f(3) = \frac{3^3 - 3 \cdot 3^2}{9} \implies f(3) = 0$$



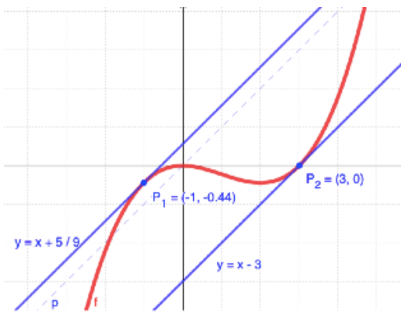
Los puntos de tangencia son (–1, –4/9) y (3, 0):

5º. Obtenemos las rectas que pasan por esos puntos con pendiente 1 (ecuación punto pendiente $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$

Tangente por (–1, –4/9):

$$y - \frac{-4}{9} = 1 \cdot (x - (-1)) \implies y = x + \frac{5}{9}$$

Tangente por (3, 0): $y - 0 = 1 \cdot (x - 3) \implies y = x - 3$



El ejercicio, presentado sin las explicaciones detalladas, quedaría como sigue (así un ejemplo sobre cómo se podría presentar en el examen):

1 *Hallar las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{x^3 - 3x^2}{9}$ que sean paralelas a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.*

La bisectriz del primer y tercer cuadrante tiene pendiente m=1. Buscamos los puntos donde la función tiene pendiente 1 a través de la derivada:

Derivamos: $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2}{9} \implies f'(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{9}$

$$f'(x) = 1 \iff \frac{3x^2 - 6x}{9} = 1 \iff 3x^2 - 6x = 9 \iff x^2 - 2x + 3 = 0 \iff \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

son las abscisas de los puntos de tangencia.

Las ordenadas para las abscisas –1 y 3 son: $\begin{cases} f(-1) = \frac{(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2}{9} \implies f(1) = -\frac{4}{9}, \\ f(3) = \frac{3^3 - 3\cdot 3^2}{9} \implies f(3) = 0 \end{cases}$

Así, los puntos de tangencia buscados son $(-1,\ -\dfrac{4}{9})$ y $(3,\ 0)$.

Obtenemos ahora las tangentes pedidas:

- Tangente por (–1, –4/9): $y - \dfrac{-4}{9} = 1\cdot(x - (-1)) \implies \boxed{y = x + \dfrac{5}{9}}$
- Tangente por (3, 0): $y - 0 = 1\cdot(x - 3) \implies \boxed{y = x - 3}$

Representación gráfica: