CONTINUIDAD: Calcula el valor de n para que la función f sea continua en todo R:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1, & x \leq 4 \\ 2x + n, & x > 4 \end{cases}$$

f es una función a trozos donde: $f_1(x) = x^2 - 5x + 1$ y $f_2(x) = 2x + n$

- $\underline{Si\ \ x \neq 4:}$
  - Si x < 4, f es continua ($f_1(x)$ función cuadrática)
  - Si x > 4, f es continua ($f_2(x)$ función lineal)

Entonces $f\ continua\ en\ \mathbb{R} - \{4\}$ **(1)**

- $\underline{Si\ \ x = 4:}$

$$f\ continua\ en\ x = 4 \Longleftrightarrow \exists \lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$$

- Calculamos el valor de la función en 4 y los límites laterales e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot f(4) = f_1(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 1 = 16 - 20 + 1 = -3 \\ \cdot \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} f_1(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} x^2 - 5x + 1 = -3 \\ \cdot \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f_2(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} 2x + n = 8 + n \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{r} -3 = 8 + n \\ n = -11 \end{array}$$

Entonces $si\ \ n = -11,\ f\ es\ continua\ en\ \ x = 4$ **(2)**

- Si combinamos las conclusiones **(1)** y **(2)**:

$$\left.\begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array}\right\} \Longrightarrow si\ n = -11\ f\ es\ continua\ en\ todo\ \mathbb{R}$$

CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD: Obtén los valores de a y b para que f sea continua y derivable en todos los números reales:

$$a)\ f(x)=\begin{cases} 2x^2-x & si\ \ x<1 \\ ax+b & si\ \ x\geq 1 \end{cases}$$

f es una función a trozos donde: $f_1(x) = 2x^2 - x$ y $f_2(x) = ax + b$

- $\underline{Si\ \ x \neq 1:}$ <u>**CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD**</u>

  - Si x < 1, f es continua y derivable ($f_1(x)$ función cuadrática)
  - Si x > 1, f es continua y derivable ($f_2(x)$ función lineal)

Entonces $f\ continua\ y\ derivable\ en\ \mathbb{R} - \{1\}$ **(1)**

- $\underline{Si\ \ x = 1:}$

  - **CONTINUIDAD:**

$$f\ continua\ en\ x = 1 \Longleftrightarrow \exists \lim_{x\to 4} f(x) = f(1)$$

  - Calculamos el valor de la función en 1 y los límites laterales e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f_1(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x^2 - x = 2 - 1 = 1 \\[2ex] \cdot \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f_2(x) = \lim_{x\to 1^-} ax + b = a + b \\[2ex] \cdot f(1) = f_1(1) = ax + b = a + b \end{array}\right\} \Longrightarrow a + b = 1$$

Entonces $si\ \ a + b = 1,\ f\ es\ continua\ en\ \ x = 1$ **(2a)**

- **DERIVABILIDAD:** $f \ derivable \ en \ x = 1 \iff \begin{cases} f \text{ continua} \\ \exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x)}{h} \end{cases}$

Usamos las derivadas laterales $f'^{-}(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ y $f'^{+}(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$

y

$$f \ derivable \ en \ x = 1 \iff \begin{cases} f \text{ continua} \\ f'^{-}(1) = f'^{+}(1) \end{cases}$$

- Derivamos la función (derivamos cada uno de sus trozos):

$$f'(x) = \begin{cases} (2x^2 - x)' = 4x - 1 & si \ \ x < 1 \\ (ax + b)' = a & si \ \ x > 1 \end{cases}$$

- Calculamos en x=1 el valor de las derivadas por ambos lados e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot f'^{-}(1) = 4 \cdot 1 - 1 = 3 \\ \cdot f'^{+}(1) = a \end{array}\right\} \Longrightarrow a = 3$$

Entonces $si \ \ a = 3, \ f \ es \ derivable \ en \ \ x = 1$ **(2b)**

- Para que sea continua y derivable en x=1, deben cumplirse **(2a)** y **(2b)**, y queda un sistema de ecuaciones a resolver:

$\left.\begin{array}{l} (2a) \\ (2b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} a + b = 1 \\ a = 3 \end{array}\right\} \iff a = 3 \ y \ b = -2$ **(2)**

- **Para finalizar, si combinamos las conclusiones (1) y (2):**

$\left.\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\right\} \Longrightarrow si \ \ a = 3 \ y \ b = -2,$ $f \ es \ continua \ y \ derivable \ en \ todo \ \mathbb{R}$