Ejercicio 1. PUNTUACIÓN: 4 puntos en total (1 cada apartado)

Calcula las siguientes derivadas:

$a)\ f_1(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ $b)\ f_2(x) = 4^{\cos\frac{1}{x^2}} + \sin^3 x$ $c)\ f_3(x) = \frac{e^{x^3}}{\sqrt{x}}$ $d)\ f_4(x) = 2x \cdot \arctan\frac{x+2}{x}$

Ejercicio 2. PUNTUACIÓN: 1,5 puntos en total.

Calcula a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & si \quad x \le 1 \\ 2bx - 2 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Ejercicio 3. PUNTUACIÓN: 1,5 puntos en total.

Dada la función $f(x) = x^2 - x - 2$:

a) Obtén la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $x = 1$. (0,5)
b) Calcula el punto en el que la/las tangente/s a la función es/son paralela/s a la recta de ecuación: $r: 3x + y + 7 = 0$ (0,5 punto)
c) Obtén la ecuación o las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos (0,5).

Ejercicio 4. PUNTUACIÓN: 3 puntos en total (0,75 cada apartado)

Obtén el valor de los siguientes límites, resolviendo las indeterminaciones si es necesario:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2}$ b) $\lim_{x\to -1} \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{\frac{x^3}{x-1}}$

c) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^{\frac{x^3-1}{x}}$ d) $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+x}\right)$

GUÍA DE CORRECCIÓN

Ejercicio 1: Derivadas (4 puntos en total)

- **Apartado a) (1 punto)** f1(x) = ln(sqrt((x^2 - 1) / (x^2 + 1)))
  - [0,25 p] Aplica correctamente la propiedad del logaritmo: f1(x) = (1/2) * [ln(x^2 - 1) - ln(x^2 + 1)]. O bien, aplica la regla de la cadena para ln(u) y sqrt(v).
  - [0,25 p] Aplica la derivada de ln(u): (1/2) * [u'/u - v'/v]. O bien, aplica la regla de la cadena correctamente si no simplificó primero.

- ○ [0,25 p] Calcula correctamente las derivadas de los argumentos (2x).
- ○ [0,25 p] Realiza la resta de fracciones y simplifica algebraicamente hasta 2x / (x^4 - 1).

- **Apartado b) (1 punto)** f2(x) = 4^(cos(1/x^2)) + sin^3(x)
  - [0,25 p] Deriva el primer término a^u: 4^(cos(1/x^2)) * ln(4) * (cos(1/x^2))'.
  - [0,25 p] Deriva cos(1/x^2) usando la regla de la cadena: -sin(1/x^2) * (-2/x^3).
  - [0,25 p] Deriva el segundo término u^n: 3 * sin^2(x) * (sin x)'.
  - [0,25 p] Calcula (sin x)' = cos x y escribe la suma final correcta.
- **Apartado c) (1 punto)** f3(x) = e^(x^3) / sqrt(x)
  - [0,25 p] Plantea correctamente la regla del cociente (u'v - uv') / v^2.
  - [0,25 p] Calcula correctamente u' = (e^(x^3))' = e^(x^3) * 3x^2.
  - [0,25 p] Calcula correctamente v' = (sqrt(x))' = 1 / (2*sqrt(x)).
  - [0,25 p] Sustituye en la fórmula y simplifica algebraicamente la expresión resultante.
- **Apartado d) (1 punto)** f4(x) = 2x * arctan((x+2) / x)
  - [0,25 p] Plantea correctamente la regla del producto u'v + uv'.
  - [0,25 p] Calcula u'=2 y deriva el segundo factor (arctan w)' = w' / (1 + w^2).
  - [0,25 p] Calcula correctamente w' = ((x+2)/x)' = (1 + 2/x)' = -2/x^2.
  - [0,25 p] Sustituye w' y w en la derivada del arcotangente, simplifica y escribe la expresión final correcta.

Puntuación Ejercicio 1: ___ / 4

Ejercicio 2: Continuidad y Derivabilidad (1,5 puntos en total)

- **Continuidad en x=1:**
  - [0,25 p] Caso x neq 1. Continua y derivable por poliinómica
  - [0,25 p] Calcula correctamente los límites laterales y el valor de la función: a + b + 1 y 2b - 2.
  - [0,25 p] Obtiene la ecuación correcta de la condición de continuidad: a + b + 1 = 2b - 2 => a - b = -3.
- **Derivabilidad en x=1:**
  - [0,25 p] Calcula correctamente las derivadas laterales: f'(x) = 2ax + b si x < 1 y f'(x) = 2b si x > 1.
  - [0,25 p] Plantea la condición f'(1-) = f'(1+) y obtiene la ecuación correcta: 2a + b = 2b => 2a - b = 0.
- **Resolución del sistema:**
  - [0,25 p] Resuelve correctamente el sistema de ecuaciones { a - b = -3 ; 2a - b = 0 }, obteniendo a=3 y b=6.

Puntuación Ejercicio 2: ___ / 1,5

Ejercicio 3: Recta Tangente (1,5 puntos en total)

- **Apartado a) Tangente en x=1 (0,5 puntos)**
  - [0,25 p] Calcula el punto de tangencia: x0 = 1, y0 = f(1) = -2. Punto (1, -2).
  - [0,25 p] Calcula la derivada f'(x) = 2x - 1, la pendiente m = f'(1) = 1 y escribe la ecuación y - (-2) = 1*(x - 1) o su forma simplificada y = x - 3.
- **Apartado b) Punto con tangente paralela a r (0,5 puntos)**
  - [0,25 p] Halla la pendiente de la recta r: 3x + y + 7 = 0 => y = -3x - 7, por tanto mr = -3.
  - [0,25 p] Iguala f'(x) = mr => 2x - 1 = -3, resuelve x = -1, y calcula la coordenada y: f(-1) = 0. Punto (-1, 0).
- **Apartado c) Ecuación de la tangente en dicho punto (0,5 puntos)**
  - [0,25 p] Utiliza el punto (-1, 0) y la pendiente m = -3.
  - [0,25 p] Escribe la ecuación de la recta tangente: y - 0 = -3*(x - (-1)) o su forma simplificada y = -3x - 3.

Puntuación Ejercicio 3: ___ / 1,5

Ejercicio 4: Límites (3 puntos en total)

- **Apartado a) (0,75 puntos)** lim (x -> 0) (1 - cos x) / (2x^2)
  - [0,25 p] Identifica la indeterminación 0/0.
  - [0,25 p] Aplica L'Hôpital correctamente una vez (lim sin(x) / (4x)) o plantea usar el límite notable lim (1 - cos x) / x^2 = 1/2.
  - [0,25 p] Aplica L'Hôpital por segunda vez (lim cos(x) / 4) o usa el límite notable, y calcula el resultado final 1/4.
- **Apartado b) (0,75 puntos)** lim (x -> -1) ((x^2 + 1) / x^2)^(x^3 / (x-1))
  - [0,25 p] Calcula el límite de la base: ((-1)^2 + 1) / (-1)^2 = 2/1 = 2.
  - [0,25 p] Calcula el límite del exponente: (-1)^3 / (-1 - 1) = -1 / -2 = 1/2.
  - [0,25 p] Concluye que no hay indeterminación y calcula el resultado final 2^(1/2) = sqrt(2).
- **Apartado c) (0,75 puntos)** lim (x -> +inf) ((x^2 - 2) / x^2)^((x^3 - 1) / x)
  - [0,25 p] Identifica la indeterminación 1^inf.
  - [0,25 p] Plantea la fórmula e^(lim g*(f-1)) y calcula el límite del exponente: lim (x -> +inf) ((x^3-1)/x) * ((x^2-2)/x^2 - 1) = lim (x -> +inf) (-2(x^3-1) / x^3) = -2.
  - [0,25 p] Escribe el resultado final e^(-2) o 1/e^2.
- **Apartado d) (0,75 puntos)** lim (x -> -inf) (sqrt(x^2 + 3) - sqrt(x^2 + x))
  - [0,25 p] Identifica la indeterminación inf - inf y multiplica y divide por el conjugado.
  - [0,25 p] Simplifica el numerador (3 - x) y maneja correctamente sqrt(x^2) = |x| = -x al dividir numerador y denominador por |x| (o -x). lim (3 - x) / (-x*sqrt(1 + 3/x^2) - x*sqrt(1 + 1/x)).
  - [0,25 p] Calcula el límite final (-1) / (-1 - 1) = 1/2.

Puntuación Ejercicio 4: ___ / 3

Soluciones Esquemáticas

Ejercicio 1: Derivadas

a) `f1(x) = ln( sqrt( (x^2 - 1) / (x^2 + 1) ) )` * Simplificar: `f1(x) = (1/2) * [ ln(x^2 - 1) - ln(x^2 + 1) ]` * Derivar: `f1'(x) = (1/2) * [ (2x)/(x^2 - 1) - (2x)/(x^2 + 1) ]`

* Combinar: `f1'(x) = x * [ (x^2 + 1 - (x^2 - 1)) / ((x^2 - 1)(x^2 + 1)) ]` * Simplificar: `f1'(x) = x * [ 2 / (x^4 - 1) ]` * **Solución: `f1'(x) = 2x / (x^4 - 1)`**
b) `f2(x) = 4^(cos(1/x^2)) + sin^3(x)` * Derivada término 1 (exponencial + cadena): `(4^(cos(1/x^2)))' = 4^(cos(1/x^2)) * ln(4) * (cos(1/x^2))'` * Derivada interna: `(cos(1/x^2))' = -sin(1/x^2) * (-2/x^3) = (2/x^3) * sin(1/x^2)` * Derivada término 2 (potencia + cadena): `(sin^3(x))' = 3 * sin^2(x) * cos(x)` * Combinar: `f2'(x) = 4^(cos(1/x^2)) * ln(4) * (2/x^3) * sin(1/x^2) + 3 * sin^2(x) * cos(x)` * **Solución: `f2'(x) = (2 * ln 4 / x^3) * 4^(cos(1/x^2)) * sin(1/x^2) + 3 * sin^2(x) * cos(x)`** (o con `ln 4 = 2 ln 2`)
c) `f3(x) = e^(x^3) / sqrt(x)` * Regla del cociente: `f3'(x) = [ (e^(x^3))' * sqrt(x) - e^(x^3) * (sqrt(x))' ] / (sqrt(x))^2` * Derivadas: `(e^(x^3))' = e^(x^3) * 3x^2`; `(sqrt(x))' = 1 / (2*sqrt(x))` * Sustituir: `f3'(x) = [ (e^(x^3) * 3x^2 * sqrt(x)) - (e^(x^3) * (1 / (2*sqrt(x)))) ] / x` * Simplificar (denominador común): `f3'(x) = [ (e^(x^3) * 6x^3 - e^(x^3)) / (2*sqrt(x)) ] / x` * **Solución: `f3'(x) = e^(x^3) * (6x^3 - 1) / (2x * sqrt(x))`**
d) `f4(x) = 2x * arctan( (x+2) / x )` * Regla del producto: `f4'(x) = (2x)' * arctan(...) + 2x * (arctan(...))'` * Derivadas: `(2x)' = 2`; `w = (x+2)/x = 1 + 2/x` => `w' = -2/x^2` * Derivada arctan: `(arctan(w))' = w' / (1 + w^2) = (-2/x^2) / (1 + ((x+2)/x)^2)` * Simplificar derivada arctan: `= (-2/x^2) / ((x^2 + (x+2)^2)/x^2) = -2 / (2x^2 + 4x + 4) = -1 / (x^2 + 2x + 2)` * Sustituir: `f4'(x) = 2 * arctan((x+2)/x) + 2x * (-1 / (x^2 + 2x + 2))` * **Solución: `f4'(x) = 2 * arctan((x+2)/x) - 2x / (x^2 + 2x + 2)`**

Ejercicio 2: Continuidad y Derivabilidad

- Continuidad en x=1: `lim(x->1-) (ax^2 + bx + 1) = lim(x->1+) (2bx - 2)`
    - `a + b + 1 = 2b - 2` => `a - b = -3` (Ec. 1)
- Derivadas: `f'(x) = 2ax + b` (si x < 1), `f'(x) = 2b` (si x > 1)
- Derivabilidad en x=1: `lim(x->1-) (2ax + b) = lim(x->1+) (2b)`
    - `2a + b = 2b` => `2a - b = 0` (Ec. 2)
- Resolver sistema: (Ec. 2) - (Ec. 1) => `a = 3`. Sustituyendo en Ec. 1 => `3 - b = -3` => `b = 6`.
- **Solución: `a = 3`, `b = 6`**

Ejercicio 3: Recta Tangente (`f(x) = x^2 - x - 2`, `f'(x) = 2x - 1`)
a) Tangente en x = 1: * Punto: `x0 = 1`, `y0 = f(1) = 1 - 1 - 2 = -2` => P(1, -2). * Pendiente: `m = f'(1) = 2(1) - 1 = 1`. * Ecuación: `y - (-2) = 1 * (x - 1)` => `y + 2 = x - 1` * **Solución: `y = x - 3`**
b) Punto con tangente paralela a `r: 3x + y + 7 = 0` (`y = -3x - 7`): * Pendiente de r: `mr = -3`. * Buscar x tal que `f'(x) = mr`: `2x - 1 = -3` => `2x = -2` => `x = -1`. * Coordenada y: `y = f(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0`. * **Solución: Punto (-1, 0)**
c) Ecuación de la tangente en (-1, 0): * Punto: (-1, 0). Pendiente: `m = -3`. * Ecuación: `y - 0 = -3 * (x - (-1))` => `y = -3(x + 1)` * **Solución: `y = -3x - 3`**

Ejercicio 4: Límites
a) `lim (x -> 0) (1 - cos x) / (2x^2)` (Forma 0/0) * L'Hôpital: `lim (x -> 0) sin(x) / (4x)` (Forma 0/0) * L'Hôpital: `lim (x -> 0) cos(x) / 4` * Evaluar: `cos(0) / 4 = 1 / 4` * **Solución: `1/4`**
b) `lim (x -> -1) ( (x^2 + 1) / x^2 )^( x^3 / (x-1) )` * Límite base: `((-1)^2 + 1) / (-1)^2 = 2 / 1 = 2`. * Límite exponente: `(-1)^3 / (-1 - 1) = -1 / -2 = 1/2`. * Evaluar: `2^(1/2)` * **Solución: `sqrt(2)`**
c) `lim (x -> +inf) ( (x^2 - 2) / x^2 )^( (x^3 - 1) / x )` (Forma 1^inf) * Usar `e^(lim g*(f-1))`. * Exponente: `lim (x -> +inf) [ (x^3 - 1) / x ] * [ (x^2 - 2)/x^2 - 1 ]` * `= lim (x -> +inf) [ (x^3 - 1) / x ] * [ -2 / x^2 ]` * `= lim (x -> +inf) -2(x^3 - 1) / x^3 = -2`. * **Solución: `e^(-2)`** (o `1/e^2`)
d) `lim (x -> -inf) ( sqrt(x^2 + 3) - sqrt(x^2 + x) )` (Forma inf - inf) * Multiplicar por conjugado: `lim (x -> -inf) [ (x^2 + 3) - (x^2 + x) ] / [ sqrt(x^2 + 3) + sqrt(x^2 + x) ]` * `= lim (x -> -inf) (3 - x) / [ sqrt(x^2 + 3) + sqrt(x^2 + x) ]` * Dividir por `|x| = -x`: `lim (x -> -inf) [ (3-x)/(-x) ] / [ (sqrt(x^2+3)+sqrt(x^2+x))/(-x) ]` * `= lim (x -> -inf) (1 - 3/x) / [ sqrt(1 + 3/x^2) + sqrt(1 + 1/x) ]` * Evaluar: `(1 - 0) / ( sqrt(1 + 0) + sqrt(1 + 0) ) = 1 / (1 + 1)` * **Solución: `1/2`**