PAU 2026

COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE PROBLEMAS COMPETENCIAIS
ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

Exemplo 3.

CONTEXTO

Os fogares con animais domésticos aumentaron considerablemente nos últimos 5 anos, sendo aproximadamente o 49% do total no ano 2024. Unha compañía de seguros líder no mercado quere poñerse ao día na normativa para que os cidadáns que teñan unha mascota contraten un seguro, para cubrir posibles incidencias, sobre todo en caso de cans potencialmente perigosos. Para iso fai unha campaña de publicidade onde se contrasta a posibilidade de que o cliente teña contratado tamén o seguro de fogar. Despois dun tempo, a compañía de seguros afirma que o 60% da poboación do estudo ten contratado un seguro de fogar, o 30% ten contratado un seguro de mascota e un seguro de fogar. Ademais, 3 de cada 5 persoas con seguro de mascota, ten contratado un seguro de fogar.

Responda estes cinco apartados:

1. Calcule a probabilidade de que a poboación teña un seguro de mascota.
2. Calcule a porcentaxe da poboación que teña algún destes dous seguros.
3. Elixida unha persoa ao azar, calcule a probabilidade de ter seguro de mascota e non ter seguro de fogar.
4. Son independentes os sucesos “ter seguro de mascota” e “ter seguro de fogar”?
5. Considérense os sucesos “ter seguro de mascota” e “ter mascota”, sen facer operacións, razoe se estes sucesos poden considerarse independentes”.

0 TABLA DE CONTINGENCIA

H: "seguro hogar"
$\overline{H}$: "sin seguro hogar"
M: "seguro mascota"
$\overline{M}$: "sin seguro mascota"

	H	$\overline{H}$	
M	30		
$\overline{M}$	30		
	60	40	100

(*)

	H	$\overline{H}$	
M	30	20	50
$\overline{M}$	30	20	50
	60	40	100

(*) DATO: $\frac{3}{5} = 0'6$ con seguro mascota, tiene hogar $\Rightarrow 0'6 = P(H/M) = \frac{\overset{=0'3}{P(H\cap M)}}{P(M)} \Rightarrow P(M) = 0'5$

INFO PREG CONDICIONADA

1) $P(M) = 0'5$ DIRECTO 2ª TABLA

2) $P(\text{"ALGÚN SEGURO"}) = P(H \cup M) = \underset{0'6}{P(H)} + \underset{0'5}{P(M)} - \underset{0'3}{P(H\cap M)} = 0'8 \Rightarrow$ UN 80% TIENE ALGÚN SEGURO

3) $P(M \cap \overline{H}) = 0'2$ DIRECTO TABLA

4) ¿H Y M INDEPENDIENTES? $\Leftrightarrow$ ¿$P(H\cap M) = P(H)\cdot P(M)$? $\Rightarrow$ SÍ, H Y M SON INDEP.

$0'3 = 0'6 \cdot 0'5$

5) SIN CÁLCULOS, ES LÓGICO.
NO SON INDEPENDIENTES. PARA TENER SEGURO DE MASCOTA, DEBES TENER MASCOTA. DE LO CONTRARIO, LA PROBABILIDAD ES 0.

PAU 2025
GRUPOS DE TRABALLO DE

COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

MATEMÁTICAS II

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

Exemplo 10.

CONTEXTO

As últimas rebaixas dos tipos de interese no segundo semestre de 2024 están a provocar que as familias se estean aforrando uns 200 euros ao mes do que viñan pagando ata o de agora nas facturas das súas hipotecas e préstamos. Un aforro que pode supoñer deixar de pagar máis de 2.000 euros ao ano. Con esta situación, as entidades bancarias están a ofrecer condicións moito máis atractivas aos clientes para captalos, xerando unha batalla entre entidades. Nunha delas vanse a presentar novos produtos para ofertar aos seus clientes: Préstamo 24 horas, Préstamo Auto e Préstamo Estuda.

Por política de empresa preténdese conceder un 45% de Préstamos 24 horas, 40% de Préstamos Auto e un 15% de Préstamos Estuda. Ademais, realízase un estudo sobre a falta de pagamentos nestes tres tipos de préstamos resultando sen pagar o 20% dos Préstamos 24 horas, o 30% dos Préstamos Auto e o 25% dos Préstamos Estuda:

Responda estes catro apartados: 10.1., 10.2., 10.3. e 10.4

10.1. Seleccionado un préstamo ao azar calcule a probabilidade de que non se pague.
10.2. Sabendo que non se pagou un préstamo, calcular a probabilidade de que sexa un Préstamo Auto.
10.3. Se se pagou o préstamo, calcular a probabilidade de que sexa un Préstamo Estuda.
10.4. Segundo os datos proporcionados polo enunciado, indica dous sucesos relacionados co enunciado que son incompatibles. Xustifica a resposta.

0

PRIMER PARRAFO ES CONTEXTO

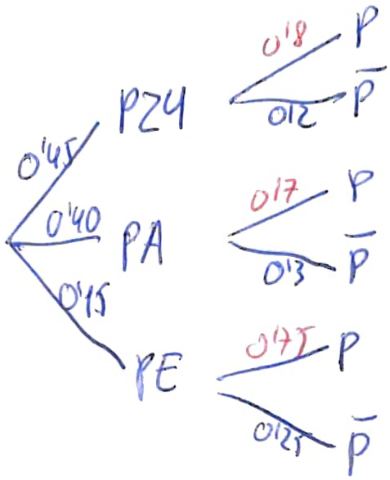
DIAGRAMA DE ÁRBOL

P24: "PRÉSTAMO 24h"

PA: "PRÉSTAMO AUTO"

PE: "PRÉSTAMO ESTUDIA"

P: "PAGA" $\overline{P}$: "NO PAGA"



PROB TOTALES

① $P(\overline{P}) = 0'45\cdot 0'2 + 0'4\cdot 0'3 + 0'15\cdot 0'25 = 0'2475$

② $P(PA/\overline{P}) = \dfrac{P(PA\cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \dfrac{0'4\cdot 0'3}{0'2475} = 0'4848$

③ $P(PE/P) = \dfrac{P(PE\cap P)}{P(P)} = \dfrac{0'15\cdot 0'75}{1-0'2475} = 0'1495$

④ DISTINTOS TIPOS DE PRÉSTAMO SON INCOMPATIBLES, POR EJEMPLO, "PRÉSTAMO 24h" Y "PRÉSTAMO ESTUDIA"

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

PAU 2026

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE PROBLEMAS COMPETENCIAIS
ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

Exemplo 1.

CONTEXTO

Os responsables municipais da poboación na que reside levaron a cabo o ano pasado un plan de renovación dos contedores de lixo, instalando novos contedores de recollida selectiva. A súa capacidade variará entre os 1.800 litros para os contedores de materia orgánica e os 2.900 litros para os contedores destinados á recollida de envases lixeiros, papel e cartón, vidro e fracción restante. Os contedores, ademais de contar con sensores intelixentes que medirán o seu volume para optimizar o tráfico de camións, integraranse no mobiliario urbano para reducir o impacto estético. Cando se iniciou o citado plan, tívose en conta que en ocasións son necesarias reparacións ou substitucións por diferentes motivos: desgaste polo uso, rotura por fenómenos meteorolóxicos adversos, actos vandálicos, etc.

Estableceuse que nun mes determinado a probabilidade de reparar ou substituír polo menos dous contedores de papel e cartón é 0,1; ademais, que a probabilidade de reparar ou substituír polo menos dous contedores de envases lixeiros, tendo reparados ou substituídos polo menos dous contedores de papel e cartón, é de 0,4. Sábese que a probabilidade de que nun mes determinado sexa necesario reparar como máximo un contedor de papel e cartón e como máximo un de envases lixeiros é de 0,72.

Responda estes tres apartados:

1. Calcule a probabilidade de que nun mes determinado sexa necesario reparar ou substituír máis dun contedor dos dous tipos considerados no parágrafo anterior.
2. Se se sabe que nun mes foi necesario reparar ou substituír menos de dous contedores de papel e cartón, cal é a probabilidade de que nese mesmo mes sexa necesario reparar ou substituír dous ou máis contedores de envases lixeiros?
3. Sen realizar operacións adicionais, indique se os acontecementos “reparar ou substituír polo menos dous contedores de papel e cartón” e “reparar ou substituír polo menos dous contedores de envases lixeiros” son ou non independentes. Parécelle razoable? Xustifique a resposta.

① PRIMERAS LÍNEAS SON SOLO CONTEXTO. EMPIEZA EN "ESTABLECESE"

→ TABLA DE CONTINGENCIA. NO CONFUNDIR CON BINOMIAL POR "POLO MENOS 2"

· IDENTIFICAR BIEN LOS SUCESOS Y EXPRESIONES "POLO MENOS 2" "COMO MÁXIMO 1" "MENOS DE 2" "2 O MÁS"...

TABLA DE CONTINGENCIA

SUCESOS:

P: "SUSTITUIR POR LO MENOS 2 CONT. PAPEL" (= "MÁS DE 1" = "2 O MÁS")

$\overline{P}$: "SUSTITUIR MENOS DE 2 CONT. PAPEL" (= "COMO MÁXIMO 1")

L: "SUSTITUIR POR LO MENOS 2 CONT LIGEROS"

$\overline{L}$: "SUSTITUIR MENOS DE 2 CONT LIGEROS"

O CALCULADA

	L	$\overline{L}$	
P	0'4·0'1 = 0'04	0'06	0'1
$\overline{P}$	0'18	DATO 0'72	0'9
	0'22	0'78	1

① $\boxed{P(P \cap L) = 0'04}$ DIRECTO TABLA

② $P(L/\overline{P}) = \dfrac{P(L \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \dfrac{0'18}{0'9} = 0'2$

DOS O MÁS LIGEROS PREGUNTA | MENOS DE 2 PAPEL INFO

③ ¿P Y L INDEPENDIENTES? $P(P \cap L) = 0'04$, $P(P) \cdot P(L) = 0'022$ ($P(P) = 0'1$, $P(L) = 0'22$) $\Rightarrow P(P \cap L) \neq P(P) \cdot P(L)$ NO SON INDEPENDIENTES

Pide la explicación sin cuentas. Simplemente buscad cualquier argumento lógico:

→ EXPLICACIÓN SIN CUENTAS Y JUSTIFICACIÓN:

LOS CONTENEDORES SUELEN ESTAR JUNTOS. CUANDO SE ESTROPEAN, SUELEN HACERLO A LA VEZ POR DIVERSAS POSIBLES CAUSAS (VANDALISMO, TEMPORALES...)

PAU 2026

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE PROBLEMAS COMPETENCIAIS

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

Exemplo 8.

CONTEXTO

A crise climática non vai parar, e a comunidade internacional rexeita o compromiso necesario para revertela. O período comprendido entre 2010 e 2019 foi a década máis cálida que se ten rexistrada, provocando incendios forestais, furacáns, secas, inundacións e outros grandes desastres naturais a todos os continentes. A nosa Comunidade Autónoma sofre numerosos incendios ao longo do ano. Queremos analizar diferentes propostas que nos axuden a combatelas e tentar minimizar o seu impacto no medio ambiente.

Para extinguir ou mitigar o lume emprégase auga transportada en avións anfibios, de distintos modelos. O avión anfibio tipo 2 (ALFA) ten unha capacidade de 2.000 litros de auga, e o modelo máis empregado é o Air Tractor AT-802FB. Tamén empregan avións anfibio tipo 1 (FOCA), tanto os Canadair CL-215T como os Bombardier 415, con capacidades de 5.000 e 6.000 litros, respectivamente.

Por datos recollidos de varios anos, pódese afirmar que os bombeiros/as conseguen apagar en menos de dous días o 80 % dos lumes que afectan a máis dunha hectárea. Nun mes no que se produciron 150 lumes de máis dunha hectárea en Galicia.

Responda estes catro apartados:

1. Calcule o valor esperado e a desviación típica do número de lumes de máis dunha hectárea que nese mes os/as bombeiros/as consigan apagar en menos de dous días.
2. Calcule a probabilidade de que nese mes os/as bombeiros/as consigan apagar entre 115 e 125 (ambos os dous incluídos) lumes de máis dunha hectárea en menos de dous días.
3. Considere os sucesos A=”Empregar avións tipo 2”, B=”Empregar avións tipo 1” e C=”Empregar avións tipo 1 e tipo 2”. Escriba a relación entre os sucesos A, B e C. Escriba o valor da probabilidade do suceso C en función da probabilidade dos sucesos A e B no caso de que A e B sexan independentes. Escriba o valor da probabilidade do suceso C en función da probabilidade dos sucesos A e B no caso de que A e B sexan incompatibles.
4. Proporcione unha interpretación do que quere dicir que os sucesos A e B do apartado anterior sexan incompatibles. Proporcione unha interpretación do que quere dicir que os sucesos A e B do apartado anterior sexan independentes.

Nota: Para resolver algúns dos apartados anteriores poden empregarse algúns dos seguintes valores relacionados coas táboas da normal estándar:

$P(|Z| < 0{,}5) = 0{,}383$; $P(Z<1{,}12) = 0{,}8686$; $P(Z<-1{,}02) = 0{,}1539$

○ - LEÍDO EL PROBLEMA, VEMOS QUE EXISTE UNA BINOMIAL CON APROX NORMAL

X: "nº de veces que los bomberos consiguen apagar en menos de dos días incendios >1ha"

$X \in B(150, 0'8)$

$\boxed{4}$

→ (1) EN DISTRIBUCIONES, MEDIA Y VALOR ESPERADO SON LO MISMO

APROXIMEMOS A UNA NORMAL; COMPROBACIÓN
$n \cdot p = 150 \cdot 0'8 = 120 > 5$ ✓
$n \cdot q = 150 \cdot 0'2 = 30 > 5$ ✓
APROX MUY BUENA.

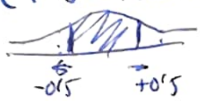
$X \in N(\overset{n \cdot p}{120}, \overset{\sqrt{npq}}{\sqrt{24} = 4'899})$

El valor esperado es 120 incendios grandes apagados.

La desviación típica $\sigma = 4'899$

DISTRIBUCIÓN NORMAL:

→ (2) $P(115 \leq X \leq 125) \underset{YATES}{=} P(114'5 < X' < 125'5) \underset{TIP}{=} P\left(\frac{114'5-120}{4'899} < Z < \frac{125'5-120}{4'899}\right) =$



$= P(-1'12 < Z < 1'12) = \underset{\text{DATO: } 0'8686}{P(Z<1'12)} - \underset{(1-P(Z<1'12))}{P(Z<-1'12)} = 2\underset{0'8686}{P(Z<1'12)} - 1 = 0'737\ldots$

→ (3) A: "USAR TIPO 2"
B: "USAR TIPO 1"
C: "USAR TIPO 1 Y TIPO 2"

$\Rightarrow C = A \cap B \Rightarrow$
SI A Y B INDEP: $P(C) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
SI A Y B INCOMP: $P(C) = P(A \cap B) = 0$

→ (4) A Y B INCOMPATIBLES: NUNCA SALEN A LA VEZ AMBOS TIPOS DE AVIONES

A Y B INDEPENDIENTES: UTILIZAR UN TIPO DE AVIÓN NO CONDICIONA O AFECTA AL HECHO DE UTILIZAR EL OTRO

Exemplo 2.

CONTEXTO

Nunha facultade dun campus galego, os estudantes para entrar nunha clase da materia Estatística Aplicada deben subir ata o segundo piso. Para subir poden empregar o ascensor ou unha escaleira, aínda que algúns deles, o 5%, deciden ir á cafetería. A clase de Estatística Aplicada é de 11:00 a 12:00, e ás 12:00 moitos deles (o 99% dos matriculados) teñen clase de Física.

A porcentaxe de estudantes que teñen pensado subir polo ascensor para ir a clase é o 50%, mentres que a porcentaxe que dos que empregan as escaleiras é o restante 45%. Sen embargo, algúns estudantes cando van cara o ascensor cambian de idea e deciden ir á cafetería, isto ocorre cunha probabilidade igual a 0,05. Dos que van cara a escaleira, o 15% cambian de idea e deciden non ir a clase para ir á cafetería. Aínda que son menos, o 1% dos estudantes que se dirixían á cafetería deciden finalmente ir a clase, para o que collen unhas escaleiras exteriores polas que tamén poden chegar ao segundo piso.

Responda estes catro apartados:

1. Calcule a probabilidade de que un estudante entre en clase da materia Estatística Aplicada.
2. Calcule a probabilidade de que un estudante dos matriculados na materia Estatística Aplicada atópese na cafetería na hora de clase.
3. Calcule a probabilidade de que un estudante que entre na clase decidira inicialmente ir á cafetería.
4. Razoe o motivo polo que non poden ser incompatibles os sucesos "ter clase de Física ás 12:00" e "ir á cafetería na hora da clase de Estatística Aplicada"?

0 - ORDENAMOS LOS DATOS EN ÁRBOL, IDENTIFICANDO BIEN LOS SUCESOS

DIAGRAMA DE ÁRBOL:

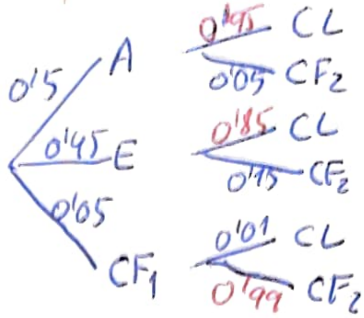
A: "PIENSA ASCENSOR"

E: "PIENSA ESCALERAS"

CF_1: "PIENSA CAFETERÍA"

CL: "FINALMENTE VA A CLASE"

CF_2: "FINALMENTE VA A CAFETERÍA"



PROBABILIDADES TOTALES

① $P(CL) = 0'5 \cdot 0'95 + 0'45 \cdot 0'85 + 0'05 \cdot 0'01 = 0'858$

COMPLEMENTARIO

② $P(CF_2) = 1 - P(CL) = 1 - 0'858 = 0'1420$

③ PROBABILIDAD A POSTERIORI / TEOREMA DE BAYES

$$P(CF_1/CL) = \frac{P(CF_1 \cap CL)}{P(CL)} = \frac{0'05 \cdot 0'01}{0'858} = 0'0005828$$

④ LECTURA Y RESPUESTA LÓGICA:

LA CLASE DE FÍSICA ES DESPUÉS DE LA DE ESTADÍSTICA, POR LO QUE ES POSIBLE Y COMPATIBLE QUE UN ESTUDIANTE VAYA A LA CAFETERÍA EN LA HORA DE ESTADÍSTICA Y DESPUÉS ASISTA A LA CLASE DE FÍSICA

Exemplo 4.

CONTEXTO

As cafeterías universitarias son espazos nos que, ademais de poder consumir alimentos e bebidas, en numerosas ocasións se empregan como puntos de encontro para outros eventos. Segundo os datos recollidos pola dirección da cafetería dunha facultade, o 65% dos seus clientes son estudantes, o 25% persoal da universidade e o 10% restante son persoas alleas á universidade. Co obxectivo de estudar se é necesario realizar modificacións na cafetería, os seus responsables analizaron datos sobre o tempo de espera ata que un cliente foi atendido e sobre a forma de realizar os pagamentos. Pode supoñerse que o tempo de espera ata que un cliente é atendido segue unha distribución aproximadamente normal, con media igual a 5 minutos e de tal modo que o 90% dos clientes son atendidos antes de 8 minutos. Polos datos recollidos, chegaron á conclusión de que o 30% dos estudantes efectúan os pagamentos en efectivo, sendo esta porcentaxe igual ao 70% para o persoal da universidade, mentres que o 80% dos pagamentos realizados por persoas alleas á universidade se fan en efectivo.

Responda estes tres apartados:

1. Cal é a probabilidade de que un cliente sexa atendido antes de 4 minutos?
2. Calcular a probabilidade de que un pagamento nesta cafetería non fose realizado en efectivo.
3. Se un pago se fixo en efectivo, que é máis probable, que fose realizado por estudantes ou por persoal da universidade?

Nota: Para resolver algúns dos apartados anteriores poden empregarse algúns dos seguintes valores relacionados coas táboas da normal estándar:

$P(Z<-1{,}28)=0{,}1$; $P(Z>1{,}64) = 0{,}05$; $P(Z<0{,}43)=0{,}6664$; $P(Z<1{,}41)=0{,}92$

(1) - DISTRIBUCIÓN NORMAL

X: "TIEMPO ESPERA HASTA SER ATENDIDO (min)"

$X \in N(5, \sigma)$

DESVIACIÓN TÍPICA DESCONOCIDA

→ ¿$P(X<4)$? NECESITO SABER σ

→ DATO: $\boxed{P(X<8)=0'9}$ (*) $\Rightarrow P(X<8) \underset{TIP}{=} P\left(Z< \frac{8-5}{\sigma}\right) = P\left(Z<\frac{3}{\sigma}\right) \overset{(*)}{=} 0'9$ (1)

→ USAMOS NOTA (EN VEZ DE TABLA): $P(Z<-1'28)=0'1 \underset{SIM}{\Rightarrow} P(Z>1'28)=0'1 \underset{CONTRARIO}{\Rightarrow} P(Z\leq 1'28)=0'9$ (2)

- Por (1) y (2) $\Rightarrow \frac{3}{\sigma} = 1'28 \Rightarrow \sigma = \frac{3}{1'28} = 2'34375$ → $\boxed{X \in N(5, 2'34375)}$

Respondemos $P(X<4) = P\left(Z< \frac{4-5}{2'34375}\right) = P(Z<-0'43) \underset{SIM}{=} P(Z>0'43) =$

$= 1 - P(Z\leq 0'43)$

$\overset{CONT}{=} 1 - 0'6664 =$

$= 0'3336$

Probabilidad de ser atendido antes de 4 minutos

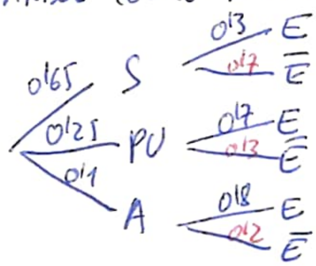
(2) CONSTRUÍMOS DIAGRAMA DE ÁRBOL CON LOS DEMÁS DATOS

S: "ESTUDIANTE"

PU: "PERSONAL UNIVERSIDAD"

A: "AJENAS"

E: "PAGO EFECTIVO"



→ $P(\bar{E}) = 0'65 \cdot 0'7 + 0'25 \cdot 0'3 + 0'1 \cdot 0'2 = 0'55$ PROBABILIDAD PAGO NO EFECTIVO

(3) CALCULAMOS $P(S/E)$ Y $P(PU/E)$ PARA COMPARAR.

$$P(S/E) = \frac{P(S \cap E)}{\underset{1-P(\bar{E})}{P(E)}} = \frac{0'65 \cdot 0'3}{0'45} = 0'43$$

$>$ ⇒ ES MÁS PROBABLE QUE SEA UN ESTUDIANTE

$$P(PU/E) = \frac{P(PU \cap E)}{P(E)} = \frac{0'25 \cdot 0'7}{0'45} = 0'39$$

Exemplo 9.

CONTEXTO

Unha persoa viaxa regularmente a Madrid utilizando tres tipos de medios de transporte distintos: tren, avión e coche particular. A probabilidade de que utilice cada un dos medios de transporte nunha viaxe depende unicamente do medio de transporte que utilizou na viaxe anterior. En matemáticas isto coñécese como cadea de Markov, que leva asociada unha matriz (denominada matriz de transición), cuxos elementos son probabilidades, de maneira que a suma de cada fila vale 1. A probabilidade de que o viaxeiro use cada medio de transporte vén dada pola seguinte matriz de transición onde o subíndice 0 indica o transporte da viaxe anterior e o subíndice 1 en transporte da viaxe actual.

$$\begin{array}{c} \\ T_0 \\ A_0 \\ C_0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T_1 & A_1 & C_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \end{array}$$

O 75% das veces que fai a viaxe en tren chega con atraso, se viaxa en avión atrásase unha de cada dez veces e se utiliza o seu coche particular chega con atraso na metade das ocasións. Esta persoa vai viaxar de novo e sabemos que a última vez desprazouse en avión.

A compañía ferroviaria proponse reformar a súa política de indemnizacións por atraso, xa que nalgunhas ocasións provocan o colapso da súa páxina web. Decidiu devolver o importe do billete aos viaxeiros que sufrisen o 5% de maiores atrasos. A compañía, mediante técnicas estatísticas, concluíu que o seu tempo de atraso é unha variable aleatoria normal de media 20 minutos e desviación típica 8 minutos e así o publicou na súa páxina web.

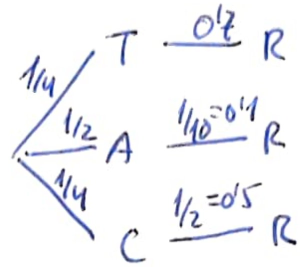
Responda estes catro apartados:

1. Cal é a probabilidade de que chegue a Madrid con atraso?
2. Se sabemos que chegou con atraso, Cal é a probabilidade de que utilizase o tren?
3. Tería o viaxeiro dereito á devolución do importe do seu billete se chegou a Madrid con 30 minutos de atraso? Xustifique a súa resposta.

0 - EN ESTE PROBLEMA HAY DOS TIPOS
- TRANSPORTE / MARKOV / RETRASO → DIAGRAMA ÁRBOL
- INDEMNIZACIÓN POR ATRASO → DISTRIBUCIÓN NORMAL

7

(1) - DATO: ÚLTIMA VEZ AVIÓN ⟹ INTERPRETAMOS LA MATRIZ



T: "TREN"
A: "AVIÓN"
C: "COCHE"
R: "RETRASO/ATRASO"

$$\rightarrow P(R) = \frac{1}{4}\cdot 0'7 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = 0'3625$$

(2) $$\rightarrow P(T/R) = \frac{P(T\cap R)}{P(R)} = \frac{1/4 \cdot 0'7}{0'3625} = 0'5172$$

(3) CAMBIO A INDEMNIZACIÓN POR ATRASO → DISTRIBUCIÓN NORMAL

X: "Tiempo de atraso (min)" $X \in N(20, 8)$

→ INDEMNIZAN AL 5% DE MAYORES ATRASOS: $P(X>K) = 0'05$

OPCIÓN 1: CALCULAR EL K:

$$P(X>K) = 0'05 \underset{TIP}{\Longrightarrow} P\left(Z > \frac{K-20}{8}\right) = 0'05 \underset{CONT.}{\Longrightarrow} P\left(Z < \frac{K-20}{8}\right) = 0'95 \quad \text{TABLA INVERSA}$$

$$\Rightarrow \frac{K-20}{8} = 1'645 \Rightarrow K = 8\cdot 1'645 + 20 = 33'16 \rightarrow \text{UMBRAL DE INDEMNIZACIÓN}$$

COMO LLEGÓ 30 min TARDE, $30 < 33'16 \Rightarrow$ NO TIENE DERECHO A INDEMNIZACIÓN

OPCIÓN 2: CALCULAR $P(X>30) \underset{TIP}{=} P\left(Z > \frac{30-20}{8}\right) = P(Z > 1'25) = 1 - \underbrace{P(Z<1'25)}_{0'8944} =$

$= 0'1056 > 0'05$

⇓

NO ENTRA EN EL 5% MAYOR

⇓

NO INDEMNIZACIÓN

Exemplo 7.

CONTEXTO

Unha consultaría técnica, líder en promover a paridade entre os seus enxeñeiros, afronta os seus plans de expansión tendo en conta o seu principio fundacional de que a porcentaxe de mulleres en todos os seus departamentos debe ser de polo menos o 40%.

Na actualidade o seu departamento de proxectos está integrado por 10 mulleres e 14 homes. Desexa contratar a un enxeñeiro ou enxeñeira dunha lista de candidatos na que hai 2 mulleres e 3 homes, que en diante denominaremos M_1, M_2, H_1, H_2 e H_3. Todos eles foron baremados con respecto aos méritos que presentan de forma que as probabilidades de que sexan contratados son as da seguinte táboa:

M_1	H_1	M_2	H_2	H_3
1/5	1/10	3/10	1/5	1/5

Definimos os seguintes sucesos:

C_1 = “A nova contratación é unha muller”.

C_2 = “A nova contratación é un home”.

Responda estes tres apartados:

1. Mantería a empresa o seu principio fundacional coa nova contratación?
2. Calcule a porcentaxe esperada de mulleres no departamento de proxectos unha vez feita a nova contratación.
3. O Goberno incentiva a contratación de mulleres enxeñeiras con rebaixas fiscais á empresa contratante se a porcentaxe de mulleres nos distintos departamentos da empresa é de polo menos o 45%. Sería posible acceder ás rebaixas fiscais se as probabilidades de contratación de cada un dos candidatos son as seguintes?:

M_1	H_1	M_2	H_2	H_3
x	y	x	y	y

Xustifique a súa resposta.

$\boxed{8}$

PREVIO:

0. → PRINCIPIO FUNDACIONAL → PROPORCIÓN MUJERES $\geq 40\%$ (0'4)

→ ACTUAL: 10 MUJ. / 14 HOMB / 24 TOTAL $\Rightarrow \frac{10}{24} = 0'4167 > 0'4$ (CUMPLE)

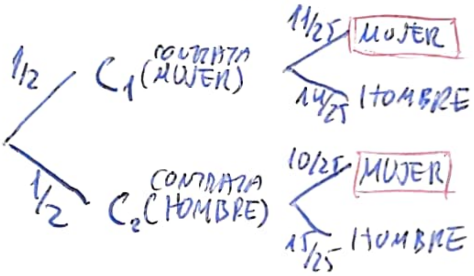
→ NUEVA CONTRATACIÓN
$$\begin{cases} C_1: \text{MUJER}: \frac{1}{5}+\frac{3}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=P(C_1) \rightarrow \frac{11}{25}=0'44 \geq 0'4 \checkmark \\ C_2: \text{HOMBRE}\ \frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=P(C_2) \rightarrow \frac{10}{25}=0'4 \geq 0'4 \checkmark \end{cases}$$

CON LA NUEVA CONTRATACIÓN CUMPLE EL PRINCIPIO SEA MUJER U HOMBRE

(1) SÍ, TANTO SI CONTRATA MUJER COMO SI CONTRATA HOMBRE, CUMPLE LA PROPORCIÓN MÍNIMA DEL 40%

(2) EN ESTOS EJERCICIOS, LA PROPORCIÓN ESPERADA COINCIDE CON LA PROBABILIDAD

DIAGRAMA ÁRBOL



$P(\text{"MUJER"}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{11}{25} + \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{25} = 0'42$

PORCENTAJE ESPERADO: 42% DE MUJERES

(3) SIN IMPORTAR LAS PROBABILIDADES DE CONTRATACIÓN DE HOMBRE Y MUJER, EL MÁXIMO ALCANZABLE ES $0'44 = 44\% < 45\%$, POR LO TANTO, NO SERÍA POSIBLE

Exemplo 6.

CONTEXTO

Na actualidade, existen varias empresas de cosméticos orientadas cara ao público xuvenil que elaboran cremas para a pel. Unha empresa quere comercializar unha nova crema para reducir os brotes de acne, para o que contratou os servizos dunha compañía de publicidade. Os publicistas propoñen lanzar unha primeira campaña empregando anuncios en prensa escrita e buzoneo. Unha vez finalizada esta primeira campaña, se a probabilidade de que a nova crema sexa coñecida entre o público xuvenil é menor que 0,6, pasarán a unha segunda campaña colocando carteis luminosos en lugares estratéxicos. Despois de analizar os datos da primeira campaña, chegaron ás seguintes conclusións: a probabilidade de que o público xuvenil coñeza a nova crema polos anuncios en prensa escrita é 0,3 e a probabilidade de que sexa coñecida por buzoneo é 0,4. Pode supoñerse que son independentes os sucesos "coñecer a nova crema por prensa escrita" e "coñecer a nova crema por buzoneo".

Responda estes tres apartados:

1. Lanzará a empresa a segunda campaña de publicidade?
2. Supoña que a empresa decidiu empregar carteis luminosos. Dos que coñecen a nova crema por buzoneo o 25% tamén a coñecen polos carteis luminosos, e entre os que coñecen a nova crema polos carteis luminosos, o 20% tamén a coñecen por buzoneo. Dos tres medios empregados (prensa escrita, buzoneo e carteis luminosos), cal foi o que tivo maior impacto para que a nova crema sexa coñecida?
3. Son incompatibles os sucesos "coñecer a nova crema por prensa escrita" e "coñecer a nova crema por buzoneo"?

( ) – E: "conoce por prensa escrita" $P(E)=0'3$

B: "conoce por buzoneo" $P(B)=0'4$

L: "conoce por carteles luminosos"

→ E y B indep $\Rightarrow P(E\cap B)=P(E)\cdot P(B)=0'12$

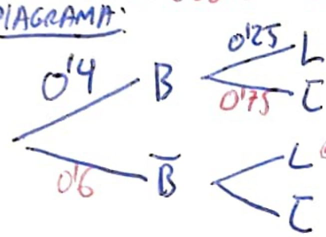
Si P(conocida por escrita o buzoneo) $< 0'6 \Rightarrow$ lanzar campaña L

(1) Calculamos

$$P(E\cup B)=P(E)+P(B)-P(E\cap B)=$$
$$=0'3+0'4-0'12=\boxed{0'58<0'6} \Rightarrow$$ Sí, lanzará la segunda campaña

(2) Los datos parecen invitar a diagrama de árbol o tabla de contingencia con los sucesos B y L. Probamos:

DIAGRAMA:



¡No podemos incluir el dato "entre los que conocen por luminosos, el 20% conoce por buzoneo"! (Sería un diagrama distinto empezando por L)

→ Escribimos ese dato:

$$P(B/L)=0'2 \Rightarrow \frac{P(B\cap L)}{P(L)}=0'2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0'4\cdot 0'25=0'2\,P(L) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(L)=\frac{0'1}{0'2}=0'5$$

→ Como $P(L)=0'5>0'3=P(E)$ y $P(L)=0'5>0'4=P(B)$ $\Rightarrow$ Carteles luminosos tuvo más impacto.

↕ igual

Alternativa: tabla

→ calculado 25% de $0'4=0'1$

	L	$\bar{L}$	
B	0'1	0'3	0'4
$\bar{B}$			0'6
			1

¡No podemos completar la tabla, escribimos, como antes, el dato que falta!

$$P(B/L)=0'2 \Rightarrow \frac{P(B\cap L)}{P(L)}=0'2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(L)=\frac{0'1}{0'2}=0'5$$

(3) ¿E y B incompatibles? : $P(E\cap B)=0'12\neq 0 \Rightarrow$ No son incompatibles.

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE PROBLEMAS COMPETENCIAIS
ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

Exemplo 5.

CONTEXTO

Nos últimos anos, hai unha tendencia que segue en aumento: empregar calzado deportivo non unicamente para realizar actividade física, senón como calzado de uso diario. Os motivos principais son a súa versatilidade e comodidade, xa que poden combinarse con case calquera vestimenta ao mesmo tempo que permiten realizar movementos naturais. Antón é un apaixonado deste tipo de calzado, do que ten 60 pares, gardando cada par na súa correspondente caixa. O 80% son zapatillas tradicionais e o 20% zapatillas de deseño. Entre as zapatillas de deseño, o 75% están en bo estado, pero só o 50% das zapatillas tradicionais están en bo estado. Un día que se ergueu co tempo xusto, para non chegar tarde ao traballo, colleu ao azar unha caixa e calzou as zapatillas desa caixa.

Responda estes tres apartados:

1. Cal é a probabilidade de que Antón vaia calzado con zapatillas tradicionais ou zapatillas en bo estado?
2. Ao saír do traballo, Antón decide ir ao cine con dous amigos. Antón non quere levar calzadas zapatillas que non estean en bo estado nin zapatillas tradicionais, cal sería a probabilidade de que non teña que pasar pola súa casa a cambiar as zapatillas?
3. Antón ten 8 pares de zapatillas tradicionais de cor branca. Sabendo que se se escolle ao azar unha caixa das súas zapatillas os sucesos “ser brancas” e “ser de deseño” son sucesos independentes, cantos pares de zapatillas brancas de deseño ten Antón?

① - TABLA DE CONTINGENCIA

T: "TRADICIONAIS"

$\overline{T}$: "DESEÑO" → ELECCIÓN DE ABREVIATURA. UNA VEZ QUE FIJAMOS T PARA TRADICIONAL, MEJOR USAR $\overline{T}$ PARA DESEÑO, SIN INTRODUCIR NUEVAS LETRAS.

B: "BO ESTADO"

$\overline{B}$: "MAL ESTADO"

50% de 80% = 40 75% de 20%

	T	$\overline{T}$	
B	40	15	55
$\overline{B}$	40	5	45
	80	20	100

ALTERNATIVA, Nº DE ZAPATILLAS

	T	$\overline{T}$	
B	24	9	33
$\overline{B}$	24	3	27
	48	12	60

① $P(T \cup B) = P(T) + P(B) - P(T \cap B) = 0'95$
$= 0'80 + 0'55 - 0'40 =$

② OJO, LEER BIEN. ¿CÓMO SÍ QUIERE SALIR DE CASA? EN BUEN ESTADO (B) Y DISEÑO ($\overline{T}$)

$P(B \cap \overline{T}) = 0'15$

③ INTRODUCIMOS SUCESO "COLOR BLANCO". COMO YA HEMOS USADO B, BUSCAR OTRA SOLUCIÓN; PODEMOS LLAMARLE W (WHITE) O BLANCA.

DATO: 8 PARES TRADICIONALES DE COLOR BLANCO. PREG ¿Nº ZAPAS BLANCAS Y DISEÑO?

NUEVA TABLA DE CONTINGENCIA

T: "TRADICIONAIS"

$\overline{T}$: "DESEÑO"

W: "BLANCAS"

$\overline{W}$: "NO BLANCAS"

	T	$\overline{T}$	
W	8	? x	
$\overline{W}$	40		
	48	12	60

80% de 60

(*) W y $\overline{T}$ INDEP ($\Rightarrow$ W y T INDEP)

→ DEF:

$$\left.\begin{array}{l} P(W/\overline{T}) = P(W) \\ P(W/T) = P(W) \end{array}\right\} \Rightarrow P(W/\overline{T}) = P(W/T)$$

(*)

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow P(W/T) = \frac{8}{48} \\ P(W/\overline{T}) = \frac{x}{12} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{8}{48} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 12}{48} = 2$$

DOS PARES DE ZAPAS BLANCAS Y DE DISEÑO

(ó $\frac{1}{6}$ de 12 = 2 $\frac{1}{6}$ de 60 = 10)

(*) → PARA INDEPENDENCIA, SOLEMOS USAR LA PROPIEDAD DE CÁLCULO $P(W \cap T) = P(W) \cdot P(T)$, PERO ¡NO OLVIDEMOS LA DEFINICIÓN!

→ ADEMÁS, PUEDE SER ÚTIL UTILIZAR QUE SI DOS SUCESOS SON INDEPENDIENTES TAMBIÉN LO SON SUS NEGACIONES

(HAY OTROS ENFOQUES CORRECTOS, COMO REGLA DE LAPLACE CON ECUACIONES...)

Exemplo 11.

CONTEXTO

Unha televisión privada que emite a nivel estatal puxo en marcha un concurso de televisión, para o que realizou unha campaña de publicidade previa coa finalidade de atopar participantes. Anotáronse máis de 4.000 persoas entre as que elixiron a 100 grupos de dous concursantes, tendo en conta que por motivos de lograr unha maior audiencia, seleccionaron diversos perfís de idades e representantes de tódalas comunidades autónomas. Son programas de curta duración para emitir xusto antes das noticias das 21:00.

Nunha primeira fase cada grupo de dous concursantes teñen que elixir unha de tres portas, sabendo que detrás dunha delas hai un premio en metálico de 1.000 euros. O primeiro concursante elixe unha porta, se está o premio gaña os 1.000 euros, pasa directamente á segunda fase e o segundo concursante xa non ten opcións de participar no concurso. De non elixir a porta co premio queda eliminado e o segundo concursante ten que seleccionar unha porta entre as dúas restantes. No caso de acertar coa porta co premio gaña os 1.000 euros e pasa á segunda fase. De non elixir dita porta, ningún concursante consegue o premio de 1.000 euros nin pasa á segunda fase.

No caso de que un concursante logre superar a primeira fase, na segunda repítese o proceso da primeira pero cun maior importe e coa posibilidade de cambiar a súa elección. De novo, o concursante ten que elixir unha porta entre tres, aínda que neste caso o importe do premio que está detrás dunha única porta é de 10.000 euros. Unha vez elixida a porta, o presentador, que coñece en que porta está o premio, amósalle ao concursante unha porta entre as dúas que non seleccionou e na que non está o premio, e ofrécelle ao concursante a posibilidade de cambiar de porta.

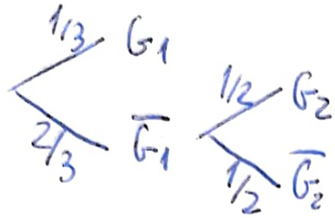
Nota: A segunda fase do concurso correspóndese co coñecido coma o problema de Monty Hall, baseado no concurso estadounidense *Let´s Make a Deal*.

Responda estes catro apartados:

2. Un concursante ao coñecer as regras do concurso e tendo en conta que se o primeiro en elixir acerta coa porta correcta o segundo concursante xa non tería opción de participar, pide elixir en primeiro lugar porque dese xeito cre que tería maior probabilidade de gañar. É certa a súa suposición ou é indiferente elixir en primeiro ou segundo lugar?
2. Tendo en conta só a primeira fase, os acontecementos "gaña o primeiro en elixir" e "gaña o segundo en elixir", son incompatibles?, son independentes?
3. A partir da resposta do apartado anterior, indique unha norma xeral que relacione sucesos independentes e incompatibles. Xustifique a resposta.
4. Sábese que a estratexia óptima para gañar o premio da segunda fase é aceptar a opción do presentador, é dicir, cambiar a elección da porta inicial pola porta que o presentador non amosa entre as dúas non elixidas. Demostre que ao cambiar a elección inicial a probabilidade de gañar o premio duplícase.

0 - PRIMERA FASE ES DIAGRAMA DE ÁRBOL CONVENCIONAL
SEGUNDA FASE → MONTY HALL ; SACAR CONCLUSIÓN TEÓRICA

1ª FASE DIAGRAMA ÁRBOL. G_1 "GANA 1º CONCURSANTE"
G_2: "GANA 2º CONCURSANTE"



(1) $P(G_1)=\frac{1}{3}$

$P(G_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ ⟹ G_1 Y G_2 EQUIPROBABLES

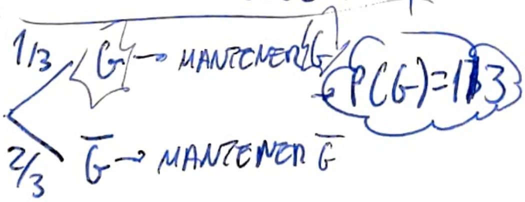
LA SUPOSICIÓN NO ES CIERTA, AMBOS CONCURSANTES TIENEN LAS MISMAS PROBABILIDADES

(2) G_1 Y G_2
- ¿INCOMPATIBLES? SÍ, NO PUEDEN OCURRIR A LA VEZ, ¡SON EXCLUYENTES ($P(G_1\cap G_2)=0$)
- ¿INDEPENDIENTES? $P(G_1\cap G_2)=0$, $P(G_1)\cdot P(G_2)=1/9$ ⟹ $0\neq\frac{1}{9}$ ⟹ DEPENDIENTES

(3) - SUCESOS INCOMPATIBLES DE PROBABILIDAD NO NULA NO PUEDEN SER INDEPENDIENTES
SI $P(A\cap B)=0 \Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$ (SI $P(A)$ Y $P(B)\neq 0$)

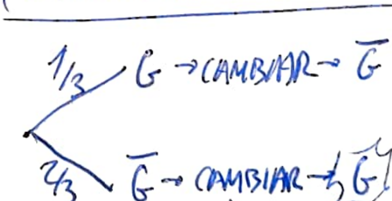
(4) **MONTY HALL 2ª FASE**

ESTRATEGIA: MANTENER ELECCIÓN



→ Por tanto, demostramos que cambiar puerta gana con probabilidad 2/3, doble de la probabilidad de ganar sin cambiar (1/3)

ESTRATEGIA: CAMBIAR ELECCIÓN



SI LA ELECCIÓN INICIAL ERA INCORRECTA, Y EL PRESENTADOR ELIMINA LA OTRA INCORRECTA, CAMBIAR GARANTIZA PREMIO

PAU 2025
GRUPOS DE TRABALLO DE

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

MATEMÁTICAS II

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

Exemplo 4.

CONTEXTO

Algunhas probas médicas resultan ser «positivas» ou «negativas». Se a proba fose infalible, «positiva» indicaría que a persoa examinada ten a enfermidade en cuestión; «negativa» indicaría que non a ten. Unha guionista está escribindo, para unha coñecida plataforma de *streaming*, unha historia que ten lugar nun país imaxinario. Explica no seu guión que, para detectar unha rara enfermidade que afecta a 1 de cada 10000 persoas, unha empresa farmacéutica logra desenvolver unha proba que resulta ser moi fiable, pois soamente 1 de cada 100 persoas libres da enfermidade obtén un resultado positivo, e soamente 2 de cada 100 persoas que padecen a enfermidade obteñen resultados negativos. Di tamén que os detalles que revelan o deseño da proba están protexidos por varios sistemas de seguridade, e que, o 9 de agosto de 2024, a clave que permite abrir o último deses sistemas é o número 219, que se calculou, especificamente para ese día, do seguinte xeito:

$$\text{clave} = \text{n.}^{\text{o}} \text{ de ríos cuxa lonxitude en metros comeza co díxito } 9,$$
$$\text{de entre os } 2000 \text{ máis longos do país} = 219.$$

Pouco antes de entregar o seu guión, xórdenlle dúbidas acerca da verosimilitude das súas cifras, conque decide compartilas cunha amiga matemática. Esta dille que lle responderá despois de ter calculado as seguintes probabilidades:

- $P_1 =$ a probabilidade de que unha persoa cunha proba positiva teña a enfermidade.
- $P_2 =$ a probabilidade de que unha persoa cunha proba negativa teña a enfermidade.
- $P_3 =$ a probabilidade de que 219 ríos ou máis teñan unha lonxitude en metros cuxo primeiro díxito sexa o 9. Con relación a este punto, a amiga matemática observa que, en moitos conxuntos de datos reais, os primeiros díxitos non se distribúen de xeito uniforme, senón que seguen a chamada *lei de Benford*, a cal afirma que a probabilidade de que un número comece co díxito d é $p = \log_{10}(1 + 1/d)$. Por elo, suporá que a probabilidade de que un río teña unha lonxitude en m cuxo primeiro díxito sexa o 9 é $p = 0.0458$.

Responda estes tres apartados: 4.1., 4.2. e 4.3.

4.1. Calcule P_1 e P_2. Entenda que os únicos resultados posibles da proba son «positivo» ou «negativo».
4.2. Calcule P_3.
4.3. En función dos valores de P_1, P_2 e P_3, dea ao menos un motivo polo cal a guionista debería modificar algunha das súas cifras. Non é necesario que diga cales deberían ser esas modificacións nin como deberían ser efectuadas.

0 - EJERCICIO MUY CRITICADO POR:

- REDACCIÓN CUESTIONABLE, DELIBERADAMENTE CONFUSA, MEZCLANDO DATOS INCÓMODOS, FÓRMULAS QUE NO SE USAN ~~Y~~ IDEAS DISTINTAS EN EL MISMO PÁRRAFO.
- SIN FACTOR SORPRESA, LEER BIEN, FIJARSE EN LAS PREGUNTAS, E IR RESPONDIENDO

(1) SUCESOS: E: "PERSONA ENFERMA" + : "PRUEBA POSITIVA"
$\bar{E}$: "PERSONA SANA" − : "PRUEBA NEGATIVA"

DATOS: $P_1 = P(E/+)$; $P_2 = P(E/-)$

TABLA DE CONTINGENCIA: QUEDAN CIFRAS MUY PEQUEÑAS, USAMOS DOS VERSIONES, UNA ·1000 000 POR COMODIDAD

VERSIÓN DIRECTA

	E	$\bar{E}$	
+	0'000098	0'009999 (*)	0'010097
−	0'000002	0'989901	0'989903
	0'0001 (1 de 10000)	0'9999	1

→ VERSIÓN ·1000.000

	E	$\bar{E}$	
+	98	9999	10097
−	2	989901	989903
	100	999900	1000 000

(*) 1 de cada 100 sanas son positivas

$$\rightarrow P_1 = P(E/+) = \frac{P(E \cap +)}{P(+)} = \frac{98}{10097} = 0'009706 \simeq 0'97\%$$

SOLO UN 1% DE LOS POSITIVOS ESTÁN ENFERMOS

$$\rightarrow P_2 = P(E/-) = \frac{P(E \cap -)}{P(-)} = \frac{2}{989903} = 0'00000202$$

→ CON P_3 CAMBIAMOS A BINOMIAL.

(2) P_3: X: "nº de ríos cuyo primer dígito empieza por 9"

$X \in B(2000, 0'0458)$ → BUSCAR BIEN LOS DATOS EN EL ENUNCIADO

→ ¿$P(X \geq 219)$? → APROXIMACIÓN BINOMIAL − NORMAL → COMPROBAR

$n \cdot p = 2000 \cdot 0'0458 = 91'6 \geq 5$ ✓

$n \cdot q = 2000 \cdot (1 - 0'0458) = 1908 > 5$ ✓

APROXIMACIÓN MUY BUENA

$X' \to N(91'6, 9'349)$ $\sqrt{npq}$

$$\rightarrow P(X \geq 219) \underset{\text{YATES}}{=} P(X' \geq 218'5) \underset{\text{TIP}}{\simeq} P\left(Z \geq \frac{218'5 - 91'6}{9'349}\right) = P(Z \geq 13'57) \simeq 0$$

ES UN VALOR EXTREMO, CASI IMPOSIBLE

→ INTERPRETACIÓN LÓGICA

(3) → EL VALOR DE 219 RÍOS HACE LA PROBABILIDAD CASI IMPOSIBLE, ES INVEROSÍMIL

→ EL TEST NO ESTÁ BIEN PLANTEADO, SOLO UN 1% DE LOS POSITIVOS TIENEN LA ENFERMEDAD