Orientativo, pueden aparecer ejercicios no indicados aquí.

Modelo 2º TRIMESTRE - 1º EXAMEN (Puntuación total: 10 puntos)

Ejercicio 1: Cálculo de Áreas (2,5 puntos)

- Dibujar y calcular el área de una o varias regiones planas delimitadas por:
  - Una o dos curvas (parábolas, `y=x e^x`, `y=1+ln x` a trozos, etc.) y el eje OX o rectas verticales/horizontales. Una curva y su recta normal o tangente en un punto, junto con los ejes u otras rectas (con puntos de corte, dibujo preciso, planteamiento integral y resolución). Se puede pedir estudio de la/s curva/s (cortes, vértice, concavidad) el dibujo. *(Este ejercicio debe tener la entidad suficiente para 2,5 puntos, pudiendo combinar dos apartados o una región más compleja).*

Ejercicio 2: Teorema Fundamental del CI (TFCI) y Aplicaciones Integral Definida (2,5 puntos)

- a) (0,5 - 0,75 puntos) Enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo Integral (y/o Regla de Barrow, y/o Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral).
- b) (0,75 - 1 punto) Aplicación del TFCI: Ejemplos: dada `F(x) = ∫[a,g(x)] f(t)dt` (posible uso de regla de la cadena):
  - Calcular `F'(x)` y/o `F''(x)`, o posibles extremos (resolviendo `F'(x)=0`) o puntos de inflexión de `F(x)`. Ecuación de la tangente o normal a `F(x)`.
  - Calcular `f(k)`sabiendo `F(x)=∫[0,x]f(t)dt = ExpresiónConocida`.
- c) (0,75 puntos) **Ejercicio de análisis que involucre una integral definida**: Ejemplos:
  - Hallar un polinomio `P(x)` dadas condiciones sobre sus valores y `∫P(x)dx`.
  - Calcular un parámetro `p` tal que el área de una región sea un valor dado.
  - Sabiendo `f''(x)` y más datos calcular `f`.
  - Hallar parámetros de una función $f(x)=ax^3+...$ usando una condición de integral definida `∫f(x)dx = k` con otras condiciones (máximo relativo, punto de inflexión).
  - Determinar un polinomio `P(x)` dadas condiciones sobre sus valores y el valor de `∫P(x)dx` u otros ejercicios con integral definida integrada.

Ejercicio 3: Matrices: Rango, Operaciones y Ecuaciones (3,75 puntos)

- a) (1,25 puntos) **Ecuación Matricial:** Resolución de una ecuación matricial que puede requerir despejar `X`, calcular inversas , y realizar operaciones matriciales. La `X` puede aparecer varias veces, necesitando sacar factor común. Ej: `AX - B^t = A^t X`.
- b) (1,25 puntos) **Ejercicio Genérico de Matrices:**
  - Operaciones con matrices, matrices dadas con elemento a_ij, tipos de matrices (simétrica, antisimétrica...), inversas.
  - Cálculo de `A` y `B` dadas `A+B` y `A-B` (o una relación similar) y luego calcular expresiones como A^2-B^2.
  - Cálculo de potencias de matrices (`A^n`) comprobando patrones (ej. $A^2=I$, $A^3=A$...) u otra regla de construcción.
- c) (1,25 puntos) **Estudio de Rango con Parámetro:**
  - Dada una matriz `A` (generalmente 3x3) con parámetros, calcular su rango según los valores del/los parámetro/s.

Ejercicio 4: Determinantes y Propiedades (1,25 puntos)

- a) (0,5 puntos) **Corto - Propiedades Básicas:** Sabiendo `det(A)` para una matriz A, calcular usando propiedades directas: `det(kA)`, $\det(A^{-1})$, `det(A^t)`, $\det(A^n)$.
  - *Ejemplo: Si* `det(M)=5`*, calcula* `det(2M)` *y* $\det(M^{-1}\cdot(M^t)^2)$.
- b) (0,75 puntos) **Largo - Combinaciones lineales:**
  - Sabiendo el valor de un determinante cuyas filas/columnas son genéricas (F1, F2, F3 o C1, C2, C3) o una matriz completa con letras (`a,b,c; p,q,r; x,y,z`), calcular el determinante de una nueva matriz cuyas filas/columnas son combinaciones lineales de las originales, elementos modificados, o permutaciones.
  - *Ejemplo: Sabiendo* `|C1 C2 C3| = k`*, calcula* `|C1+C3 C2-2C1 3C3|`*.*
  - *Ejemplo: Sea* `|a b c; d e f; g h i| = 4`*, calcula* `|2a 2b 2c; g h i; d-a e-b f-c|`*.*

Orientativo, pueden aparecer ejercicios no indicados aquí.

Ejercicio 1. PUNTUACIÓN: 1+1,5 = 2,5 puntos.

a) Calcula el área entre la gráfica de $f(x) = \begin{cases} x & si\ \ x \in [0,1) \\ 1 + \ln x & si\ \ x \in [1,e] \end{cases}$ y el eje en $(0,\ e)$.

b) Dibuja y calcula el área de la región del primer cuadrante limitada por la gráfica de la parábola $y = \dfrac{x^2}{2} + 1$, su recta normal en el punto de abscisa $x = 1$, y los ejes. (Nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad).

Ejercicio 2. PUNTUACIÓN: 0,75+0,75+1 = 2,5 puntos.

a) Enunciado e interpretación gráfica del Teorema del valor medio del cálculo integral.

b) Calcula la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2+x} \cos(t)\, dt$. Obtén los valores de $F(0)$ y $F'(0)$.

c) La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en $(0,0)$ y $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{5}{4}$. Calcula a, b, c, d.

Ejercicio 3. PUNTUACIÓN: 1,25+0,5+0,75+1,25 = 3,75 puntos

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a^2 & 1 & 0 \\ 1 & a^2 & a-1 \\ 2 & 2 & a-1 \end{pmatrix}$, calcula su rango según los valores de a.

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, ¿existe algún valor de a para el que la matriz sea simétrica? Razona la respuesta.

c) Dada la misma matriz, calcula a para que se verifique $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

d) Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica $BX - A = C^t$,

Ejercicio 4. PUNTUACIÓN: 0,5+0,75 = 1,25 puntos.

Sean C_1, C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3, con $det(M) = 7$.

a) Calcula el valor del determinantes $|\,4M^{-1} \cdot (M^t)^2\ |$

b) Calcula el valor del determinante que tiene por columnas $C_1 + 2C_3$, C_2, $2C_3 - C_1$.

Orientativo, pueden aparecer ejercicios no indicados aquí.

Ejercicio 1. PUNTUACIÓN: 2,5 puntos. Dibuja y calcula el área del recinto limitado por las parábolas $y = x^2 - 4x$; $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ (Nota: para el dibujo de las gráficas de las parábolas, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad).

Ejercicio 2. PUNTUACIÓN: 0,75+0,75+1 = 2,5 puntos.

a) Enunciados del Teorema Fundamental del Cálculo Integral y de la Regla de Barrow.

b) Sabiendo que $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = x^2(x+1)$, calcula $f(2)$.

c) Sea la función $f(x) = \sin x$, calcular $a > 0$ tal que el área encerrada por la gráfica de f, los ejes $x = 0$ e $y = 0$, y la recta $x = a$, sea $\frac{1}{2}$. Calcular la ecuación de la recta tangente e la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 3. PUNTUACIÓN: 1,25+1,25+1,25 = 3,75 puntos

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 1 & 0 & m^2 \end{pmatrix}$, calcula su rango según los valores de m.

b) Hallar, si existe, una matriz cuadrada 2×2, A, que cumpla que 1) coincide con su traspuesta; 2) verifica, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y 3) su determinante vale 9.

c) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica $X \cdot A + X - 2A = 0$

Ejercicio 4. PUNTUACIÓN: 0,5+0,75 = 1,25 puntos.
Tenemos una matriz M, 3×3, cuyas columnas son $C_1,\ C_2,\ C_3$ y $det(M) = 2$.

a) Calcular $|2M^t \cdot (M^{-1})^2|$

b) Se considera la matriz A cuyas columnas son (de izquierda a derecha): $-C_2,\ C_3 + C_2,\ 3C_1$, calcular razonadamente los determinantes de las matrices A y A^{-1} (en caso de que esta matriz inversa exista)

Orientativo, pueden aparecer ejercicios no indicados aquí.

Ejercicio 1. PUNTUACIÓN: 2,5 puntos. Considera la función definida por $f(x) = x^2 - x$. Calcula el área total de los recintos limitados por la gráfica de la función f y la recta normal a dicha gráfica en el punto de abscisa $x = 0$. (Nota: para el dibujo de la parábola, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice y la curvatura)

Ejercicio 2. PUNTUACIÓN: 0,75+0,75+1 = 2,5 puntos.

a) Enunciado e interpretación geométrica del Teorema del valar medio del cálculo integral.

b) Se define $F(x) = \displaystyle\int_0^{e^x+x-1} e^{-t^2}\,dt$. Calcula $F'(x)$ y $F'(0)$

c) Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que $P(0) = P(2) = 1$ y $\displaystyle\int_0^2 P(x) = \frac{1}{3}$

Ejercicio 3. PUNTUACIÓN: 1,25+1,25+1,25 = 3,75 puntos

a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Comprobar si la matriz $M = 2I + B^t$ tiene inversa, (I es la identidad de orden 3).
Justifica que existe la matriz X verificando $2X + C = A - X \cdot B^t$ y calcúlala.

b) Determina las matrices cuadradas de dimensión 2×2 de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ que satisfagan la identidad $M \cdot M^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a^2 & a & -a \\ 1 & a & a-2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, calcula su rango según los valores de a.

Ejercicio 4. PUNTUACIÓN: 0,5+0,75 = 1,25 puntos.

a) Sabiendo que M es una matriz cuadrada de orden 4 tal que $|A| = 4$, calcula razonadamente el valor del determinante $\left| 2M^{-1} \cdot \left(M^t\right)^2 \right|$

b) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, calcula $\begin{vmatrix} 1-z & -1-y & 3-x \\ 1+z & 1+y & 1+x \\ 2z & 2y & 2x \end{vmatrix}$

Orientativo, pueden aparecer ejercicios no indicados aquí.

Ejercicio 1. PUNTUACIÓN: 0,75+1+0,75=2,5 puntos.

Se considera la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + x$.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa curva en el origen.

b) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de la curva y la recta hallada.

c) Calcula el área de ese recinto.

Ejercicio 2. PUNTUACIÓN: 0,5+1+1 = 2,5 puntos.

a) Enunciado del Teorema fundamental del cálculo integral.

b) Sea $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ definida para $x \geq 1$. Halla sus extremos relativos.

c) Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determínense a, b y c de modo que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 0$, la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$ sea paralela a la recta $y - 4x = 0$, y el área comprendida por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 1$, sea igual a 1.

Ejercicio 3. PUNTUACIÓN: 1,25+1,25+1,25 = 3,75 puntos

Sean A y B dos matrices tales que $A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $A, B,\ A^2$ y A^n.

b) Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule X en $A^2X - (A+B)^T = 3I - 2X$.

c) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a^2 & 1 & 0 \\ 1 & a^2 & a-1 \\ 2 & 2 & a-1 \end{pmatrix}$, calcula su rango según los valores de a.

Ejercicio 4. PUNTUACIÓN: 0,5+0,75 = 1,25 puntos.

a) Sabiendo que M es una matriz cuadrada de orden 3 tal que $\det(M) = 5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes $\det\left(5 \cdot M^t\right)$ y $\det\left(5(M^{-1})^2\right)$

b) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 4$, calcula $\begin{vmatrix} x+2a & y+2b & z+2c \\ -3 & -9 & -15 \\ x & y & z \end{vmatrix}$ (cita propiedades)

Orientativo, pueden aparecer ejercicios no indicados aquí.

Modelo 2º TRIMESTRE - 2º EXAMEN / RECUPERACIÓN) (Puntuación total: 10 puntos)

Ejercicio 1: Cálculo de Áreas (1,5 puntos)

- Dibujar y calcular el área de una región delimitada por una o dos curvas y/o rectas. El planteamiento de la integral y la búsqueda de puntos de corte son clave. Puede requerir un breve estudio de las curvas para el dibujo. (Normalmente más conciso que en el 1º examen).

Ejercicio 2: Teorema Fundamental del Cálculo y Aplicaciones Integral Definida (2 puntos)

- a) (0,5 puntos) **Enunciado del TFCI** (y/o Regla de Barrow, y/o TVM Cálculo Integral).
- b) (0,75 puntos) **Aplicación del TFCI**: (igual que en 1º examen).
- c) (0,75 puntos) **Ejercicio de análisis que involucre una integral definida.**

Ejercicio 3: Matrices (Operaciones, Rango, Ecuaciones) (2,25 puntos)

- a) (1 - 1,25 puntos) **Ecuación Matricial / Propiedades:**
  - Resolver ecuación matricial donde `X` aparece varias veces (factor común, inversa).
- b) (1 - 1,25 puntos) **Ejercicio genérico de matrices:**
  - Potencias de una matriz o uso de propiedades y tipos de matrices (simétrica, antisimétrica, triangular, diagonal...), datos tipo sistema A+B, A-B....

Ejercicio 4: Determinantes (Propiedades) (1,25 puntos)

- a) (0,5 puntos) **Propiedades Básicas:** Sabiendo `det(A)` y/o `det(B)`, calcular usando propiedades: `det(kA)`, $\det(A^{-1})$,`det(A^t)`, $\det(A^n)$, `det(adj(A))`, `det(AB)`.
- b) (0,75 puntos) **Combinaciones Lineales:** Sabiendo el valor de un determinante con filas/columnas genéricas (F1,F2,F3 o C1,C2,C3) o una matriz completa con letras, calcular el determinante de una nueva matriz con filas/columnas transformadas.

Ejercicio 5: Sistemas de Ecuaciones Lineales (Discusión y Resolución) (3 puntos)

- Dado un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas y **un parámetro**:

  - a) (1,5 - 1,75 puntos) **Discutir** el sistema según los valores del/los parámetro/s (SCD, SCI, SI). Esto implicará el cálculo del determinante de la matriz de coeficientes, igualarlo a cero para encontrar los valores críticos del parámetro (puede requerir **factorización de polinomios** de grado 2 a 5 sencillo), y luego estudiar los rangos de A y A* para todos los casos. Suele haber **entre dos y cuatro casos distintos** a discutir.

  - b) (1,25 - 1,5 puntos) **Resolver** el sistema para valores específicos del parámetro que conduzcan a los diferentes tipos de compatibilidad (un caso SCD y un caso SCI es lo habitual).
    - Si es homogéneo, discutir cuándo tiene solo la solución trivial o infinitas soluciones, y resolver en este último caso.

Orientativo, pueden aparecer ejercicios no indicados aquí.

Ejercicio 1. PUNTUACIÓN: 1,5 puntos.

Dada la parábola $y = 4 - x^2$, representa y calcula el área de la región delimitada por la parábola y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$, entre el eje de ordenadas, y la recta $x = a$, donde a es la abscisa del punto de corte entre la tangente y el eje OX.

Ejercicio 2. PUNTUACIÓN: 0,5+0,75+0,75 = 2 puntos.

c) Enunciado del Teorema del valor medio del cálculo integral.

d) Dada la función $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, ¿tiene $F(x)$ puntos de inflexión? Justifica la respuesta.

e) Dadas la recta $y = mx$ y la curva $y = x^3$, calcula para que valores de x se cortan, y obtén el valor de m para que el área del recinto limitado por la recta y la curva sea 2.

Ejercicio 3. PUNTUACIÓN: 2 puntos.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^{15} y A^{20}.

b) Resuelve la ecuación $6X = B - 3AX$

Ejercicio 4. PUNTUACIÓN: 0,75+0,75 = 1,5 puntos.

a) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$, calcula el valor de $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$

b) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden tres tales que $|A| = -3^{-2}$ y $|B| = 3$. Calcula b1) $|A^{-1}|$ b2) $|3A \cdot B^t|$ b3) $|(B^{-1} \cdot A^{-1})^t|$

Ejercicio 5. PUNTUACIÓN: 1,5+1,5 = 3 puntos.

a) Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$:

a1) Sabiendo que $(AB - C)D = 2E$, plantea el sistema resultante de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (x, y, z) con un parámetro a.

a2) ¿Para algún valor del parámetro a existe solución única?

a3) Para $a = 0$, encuentra una solución del sistema con $z \neq 0$.

b) Dado el sistema $\left.\begin{array}{rcrcl} & & y & + & z = 1 \\ (k-1)x & + & y & + & z = k \\ x & + & (k-1)y & + & z = 0 \end{array}\right\}$

b1) Discute el sistema según los valores de k.

b2) Resuélvelo para $k = 0$ y $k = 1$.

Orientativo, pueden aparecer ejercicios no indicados aquí.

Ejercicio 1. PUNTUACIÓN: 1,5 puntos.

Sea R el recinto del plano limitado por las curvas $y = x(3 - x)$ y por $y = x^2$. Dibujar R y calcular su área.

Ejercicio 2. PUNTUACIÓN: 0,75+0,5+0,75 = 2 puntos.

c) Enunciado del Teorema fundamental del cálculo integral y de la Regla de Barrow.

d) Se define $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+e^t}\,dt$. Calcula $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}$.

e) Sea la función $f(x) = xe^{3x}$. Sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de f y el eje OX entre $x = 0$ y $x = p$ $(p > 0)$ vale $1/9$, calcular el valor de p.

Ejercicio 3. PUNTUACIÓN: 1+1 = 2 puntos.

a) Calcula $A - B$; A y B, sabiendo de las matrices cuadradas A y B que:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resolver la ecuación matricial $AX + 3B = B(A^t + 3I)$, donde A^t es la traspuesta de A e I la matriz identidad de orden 3.

Ejercicio 4. PUNTUACIÓN: 0,5+1 = 1,5 puntos.

Si F_1, F_2, F_3 y F_4 son las cuatro filas de una matriz cuadrada A cuyo determinante vale -2, calcular, de forma razonada:

a) El determinante de $\frac{A^2}{2}$. b) El determinante cuyas filas son $2F_2$, $-3F_1 + 4F_3$, $-F_4$ y $2F_3$.

Ejercicio 5. PUNTUACIÓN: 1,5+1,5 = 3 puntos.

a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a1) Determinar los valores del parámetro a para que la matriz M tenga inversa.

a2) Hallar la inversa de M para $a = 2$.

a3) Resolver el sistema homogéneo $MX = 0$ para $a = 1$.

b) Dado el sistema
$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} (a-1)x & + & 2y & + & (a-1)z & = & 1+a \\ & & (a+1)y & - & (a+1)z & = & 2 \\ x & + & y & + & az & = & a \end{array}\right\}$$

b1) Discute el sistema según los valores de a.

b2) Resuélvelo para $a = 0$.

Orientativo, pueden aparecer ejercicios no indicados aquí.

Ejercicio 1. PUNTUACIÓN: 1,5 puntos.
Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Calcula y representa gráficamente el área de la región acotada que está limitada por el eje de ordenadas, por la gráfica de f y por la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$. (Nota: para el estudio de la parábola calcular puntos de corte con los ejes, vértice y curvatura).

Ejercicio 2. PUNTUACIÓN: 0,5+0,75+0,75 = 2 puntos.

c) Enunciado del Teorema fundamental del cálculo integral.

d) Sea la función $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\, dt$. Calcula $F'(x)$, $F''(x)$, y di si tiene algún punto de inflexión.

e) Obtén algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x)/x\, dx = 3/2$ (utilice el método de integración por partes para la integral).

Ejercicio 3. PUNTUACIÓN: 1+1,25 = 2,25 puntos.
a) Despeje la matriz X de la ecuación $XA = A + XB$, si A y B son matrices cuadradas tales que $A - B$ es invertible. Luego, calcule X si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \left(A^2 - A - I\right)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b1) Calcule A si $(AB)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
b2) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x, y y z sabiendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad.

Ejercicio 4. PUNTUACIÓN: 0,5+0,75 = 1,25 puntos.

Si F_1, F_2, F_3 y F_4 son las cuatro filas de una matriz cuadrada A cuyo determinante vale -2, calcular, de forma razonada:
a) El determinante de $\dfrac{A^2 \cdot (A^t)^{-1}}{2}$.
b) El determinante cuyas filas son $2F_2$, $-3F_1 + 4F_3$, $-F_4$ y $2F_3$.

Ejercicio 5. PUNTUACIÓN: 1+ (0,75*2+0,5) = 3 puntos.

Discute según los valores de a $\left.\begin{array}{ccccccc} (a+1)x & + & y & + & 2z & = & -2 \\ 2x & + & y & + & (a+1)z & = & 3 \\ x & + & (a+1)y & + & 2z & = & -2 \end{array}\right\}$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro a.
b) Resuélvelo, si es posible, para $a = 0$, para $a = -1$ y para $a = 1$.

Orientativo, pueden aparecer ejercicios no indicados aquí.

Ejercicio 1. PUNTUACIÓN: 1,5 puntos.

Dibuja y calcula el área de la región del primer cuadrante limitada por la gráfica de la parábola $y = \dfrac{x^2}{2} + 1$, su recta normal en el punto de abscisa $x = 1$, y los ejes. (Nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad).

Ejercicio 2. PUNTUACIÓN: 0,5+0,75+0,75 = 2 puntos.

c) Enunciado del Teorema fundamental del cálculo integral.

d) Calcula la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2+x} \cos(t)\,dt$. Obtén los valores de $F(0)$ y $F'(0)$.

e) Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que $P(0) = P(2) = 1$ y $\displaystyle\int_0^2 P(x) = \frac{1}{3}$

Ejercicio 3. PUNTUACIÓN: 1+1,25 = 2,25 puntos.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ dé respuesta a los apartados siguientes.

a) Calcule los valores de x e y que hacen que A conmute con todas las matrices antisimétricas X de orden 2, es decir, que satisfagan la igualdad $AX = XA$ para toda matriz antisimétrica X de orden 2.

b) Si se da que $x = -1$ e $y = 1$, calcule la matriz M que cumpla la igualdad $2M = A^{-1} - AM$.

Ejercicio 4. PUNTUACIÓN: 0,5+0,75 = 1,25 puntos.

a) Dada una matriz cuadrada M de orden 3, con $det(M) = -2$, calcula el valor de los determinantes $|M^3|$ y $|3M^t \cdot M^{-1}|$

b) Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$, vectores columna. Si $det(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{d)} = -1$
Calcula razonadamente el determinante de $det(\vec{d} + 3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d})$

Ejercicio 5. PUNTUACIÓN: 1+ (0,75*2+0,5) = 3 puntos.

Dado el sistema $\left.\begin{array}{ccccccc} (m+1)x & & & + & z & = & 1 \\ (m+1)x & + & y & + & z & = & m+1 \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m \end{array}\right\}$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro m.

b) Resuélvelo, si es posible, para $m = 0$, para $m = -1$ y para $m = 2$.

Orientativo, pueden aparecer ejercicios no indicados aquí.

Checklist de Repaso Rápido: Análisis con Integrales y Álgebra Lineal (2º Trimestre)

BLOQUE 1: CÁLCULO INTEGRAL Y APLICACIONES

- **[ ] Teoremas Fundamentales del Cálculo:**
  - [ ] Enunciado del **Teorema Fundamental del Cálculo Integral (TFCI)**.
  - [ ] Enunciado de la **Regla de Barrow**.
  - [ ] Enunciado del **Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral (TVMCI)**.
- **[ ] Aplicación del TFCI (Función Integral `F(x) = ∫[a,g(x)] f(t)dt`):**
  - [ ] Calcular `F'(x)` (usando TFCI y Regla de la Cadena).
  - [ ] Calcular `F''(x)`.
  - [ ] Hallar posibles extremos relativos de `F(x)` (resolviendo `F'(x)=0`).
  - [ ] Hallar posibles puntos de inflexión de `F(x)` (estudiando `F''(x)`).
  - [ ] Calcular la ecuación de la recta tangente o normal a `F(x)` en un punto.
  - [ ] Dado `F(x)=∫[0,x]f(t)dt = ExpresiónConocida`, calcular `f(k)`.
- **[ ] Aplicaciones de la Integral Definida:**
  - [ ] Hallar un polinomio `P(x)` dadas condiciones sobre sus valores y el valor de `∫P(x)dx`.
  - [ ] Calcular un parámetro `p` para que un área `∫f(x)dx` (o un área entre curvas) sea un valor `K` dado.
  - [ ] Sabiendo `f''(x)` (o `f'(x)`) y más datos (puntos por los que pasa `f'` o `f`), calcular `f(x)` (implica integrar una o dos veces y hallar constantes).
- **[ ] Cálculo de Áreas de Recintos Planos:**
  - [ ] Área entre una curva y el eje OX (identificar intervalos donde `f(x)>0` y `f(x)<0`).
  - [ ] Área entre dos curvas `f(x)` y `g(x)` (`∫|f(x)-g(x)|dx` o `∫(superior-inferior)dx`).
  - [ ] Área limitada por una curva y su recta tangente/normal en un punto.
  - [ ] **Imprescindible:**
    - [ ] Calcular puntos de corte entre curvas y/o con los ejes.
    - [ ] Realizar un esbozo de la región.
    - [ ] Plantear correctamente la integral o suma/resta de integrales.
  - [ ] Funciones a trozos: integrar cada trozo en su intervalo.
  - [ ] Breve estudio de las curvas si se pide para el dibujo (cortes, vértice, concavidad).

BLOQUE 2: MATRICES

- **[ ] Operaciones con Matrices:**
  - [ ] Suma, resta, producto por escalar, producto de matrices.
  - [ ] Matriz traspuesta (`A^t`).
- **[ ] Tipos de Matrices y Propiedades:**
  - [ ] Matriz identidad (`I`).
  - [ ] Matriz nula.
  - [ ] Matriz simétrica (`A=A^t`), antisimétrica (`A=-A^t`).
  - [ ] Matriz diagonal, triangular.
  - [ ] Matriz definida por una regla para sus elementos `a_ij`.
- **[ ] Matriz Inversa (`A⁻¹`):**
  - [ ] Condición de existencia (`det(A) ≠ 0`).
  - [ ] Cálculo por adjuntos: `A⁻¹ = (1/det(A)) · (adj(A))^t`.
  - [ ] Uso de definición .`A⁻¹·A=I`
- **[ ] Rango de una Matriz:**
  - [ ] Cálculo por determinantes (orden del mayor menor no nulo).
  - [ ] Cálculo por el método de Gauss.
  - [ ] **Estudio del rango de una matriz con parámetros.**

Orientativo, pueden aparecer ejercicios no indicados aquí.

- **[ ] Ecuaciones Matriciales:**
  - [ ] Despejar `X` en ecuaciones tipo: `AX=B`, `XA=B`, `AXB=C`.
  - [ ] Ecuaciones donde `X` aparece varias veces, requiriendo sacar factor común:
    - Ej: $AX + BX = C \Rightarrow (A+B)X = C \Rightarrow X = (A+B)^{-1}C$.
    - Ej: $AX - X = B \Rightarrow (A-I)X = B \Rightarrow X=(A-I)^{-1}B$
    - Ej: $XA - XB = C \Rightarrow X(A-B) = C \Rightarrow X = C(A-B)^{-1}$
    - …
  - Resolver calculando la inversa necesaria.
- **[ ] Potencias de Matrices (`A^n`):**
  - [ ] Cálculo directo para potencias bajas (A^2, A^3).
  - [ ] Buscar patrones para potencias altas (matrices cíclicas `A^k=I`, `A^k=A`; `A^k=0`; matrices diagonales).

BLOQUE 3: DETERMINANTES

- **[ ] Cálculo de Determinantes:**
  - [ ] Orden 2.
  - [ ] Orden 3 (Regla de Sarrus).
- **[ ] Propiedades de los Determinantes:**
  - [ ] `det(A^t) = det(A)`.
  - [ ] `det(AB) = det(A)det(B)`.
  - [ ] `det(kA) = k^n det(A)` (siendo `n` el orden de A).
  - [ ] $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.
  - [ ] Si una fila/columna es de ceros, `det=0`.
  - [ ] Si dos filas/columnas son iguales o proporcionales, `det=0`.
  - [ ] Si una fila/columna es combinación lineal de otras, `det=0`.
  - [ ] Efecto de las operaciones elementales en el determinante.
- **[ ] Aplicación de Propiedades:**
  - [ ] Sabiendo `det(A)`, calcular `det` de matrices relacionadas (`kA`, A^{-1}, `A^t`, A^n, `adj(A)`).
  - [ ] Sabiendo `det(C1,C2,C3)` (o `det(F1,F2,F3)` o una matriz con letras), calcular el `det` de una matriz con columnas/filas transformadas (combinaciones lineales, permutaciones, multiplicadas por escalar).

BLOQUE 4: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (para 2º Examen/Recuperación)

- **[ ] Expresión Matricial de un Sistema (`AX=B`).**
- **[ ] Discusión de Sistemas con Parámetros (Teorema de Rouché-Fröbenius):**
  - [ ] Calcular `rg(A)` y `rg(A*)` en función del/los parámetro/s.
    - Igualar `det(A)=0` para hallar valores críticos del parámetro.
    - Analizar rangos para estos valores críticos y para los demás y **orlar**
    - Puede requerir **factorización de polinomios** (de grado 2, 3 o más si es sencillo) para los valores críticos.
  - [ ] Clasificar el sistema:
    - Compatible Determinado (SCD): `rg(A) = rg(A*) = nº incógnitas`.
    - Compatible Indeterminado (SCI): `rg(A) = rg(A*) < nº incógnitas`.
    - Incompatible (SI): `rg(A) ≠ rg(A*)`.
- **[ ] Resolución de Sistemas Compatibles:**
  - [ ] Método de Gauss.
  - [ ] Regla de Cramer (si es SCD y `det(A)≠0`).
  - [ ] Expresar la solución en función de parámetros si es SCI.
- **[ ] Sistemas Homogéneos (`AX=0`):**
  - [ ] Siempre son compatibles.
  - [ ] Solución trivial (`x=y=z=0`) si `det(A)≠0` (SCD).
  - [ ] Infinitas soluciones si `det(A)=0` (SCI).

Orientativo, pueden aparecer ejercicios no indicados aquí.

Guía Rápida de Casuísticas de Ejercicios – Integral definida y Álgebra Lineal (2º Trimestre)

1. CÁLCULO DE ÁREAS: ¿Qué me pueden pedir?

- **"Calcula área del recinto limitado por la gráfica de `f(x)` y el eje OX entre `x=a` y `x=b`."**
  - Hallar raíces de `f(x)` en `[a,b]`. Integrar por tramos si `f(x)` cambia de signo.
- **"Calcula área de región delimitada por de `f(x)` e `y=g(x)` (y/o rectas `x=a`, `x=b`)."**
  - Hallar puntos de corte `f(x)=g(x)`. Integrar ∫|`f-g`|`dx` entre los cortes.
- **"Dibuja la región y calcula su área..."** (Acompañado de las funciones delimitantes, que pueden incluir tangentes/normales).
  - **Siempre:** Esbozar la gráfica, identificar límites de integración, plantear la integral.

2. TEOREMA FUNDAMENTAL CÁLCULO (TFCI) APLICACIONES: ¿Qué me pueden pedir?

- **"Enuncia el Teorema..."** (TFCI, Barrow, TVMCI).
- **Dada `F(x) = ∫[g(x),h(x)] f(t)dt`:**
  - **"Calcula `F′(x) o F′′(x)`"** (TFCI + Regla Cadena),
  - **"Halla los posibles extremos/puntos de inflexión de `F(x)`."**
  - **"Halla la ecuación de la tangente a `F(x)` en `x=k`."** (Necesitas `F(k)` y `F'(k)`).
- **"Sabiendo `F(x)=∫[0,x]f(t)dt = Dato(x)`, calcula `f(k)`."** (Derivar dato).
- **"Halla el polinomio `P(x)` de grado `n` si `P(a)=v1`, `P(b)=v2` y `∫[c,d]P(x)dx=v3`."** (Sistema de ecuaciones).
- **"Calcula el parámetro `p` para que el área `∫[a,p]f(x)dx = K`."** (Resolver integral, igualar a K, despejar `p`).
- **"Dada `f''(x)` (o `f'(x)`) y más condiciones halla `f(x)`."** (Integrar una o dos veces).

3. MATRICES: ¿Qué me pueden pedir?

- **"Dada la matriz `A` (con parámetros): Calcula su rango según los valores del parámetro."** (Usar determinantes o Gauss).
- **"Para qué valores del parámetro `A` tiene inversa?"** (Cuando `det(A)≠0`).
- **"Calcula A^{-1} según parámetro (o para una matriz dada), usa $A^{-1}\cdot A=I$"** (Por adjuntos).
- **ECUACIONES MATRICIALES:**
  - **"Resuelve `AX=B`"** (Si `A` invertible, $X=A^{-1}B$). Análogamente `XA=B` o `AXB=C`.
  - **"Resuelve `AX + BX = C`"** o **`AX - X = B`"** o **`XA - XB = C`"** (Sacar `X` factor común por el lado correcto, luego multiplicar por la inversa del paréntesis si existe).
  - **"Comprueba si `A` es simétrica/antisimétrica/etc."**
  - **POTENCIAS: "Halla `A^n`"** (Buscar patrones para $A^2, A^3, ...$).
  - **"Dadas `A+B=M1` y `A-B=M2`, calcula `A`, `B`, o A^2-B^2."** (Resolver sistema matricial).
  - **"Dada `A` (matriz 3x3 definida por `a_ij=regla`), calcula `A`, su inversa, etc."**

4. DETERMINANTES: ¿Qué me pueden pedir?

- **"Sabiendo `det(A)=k`, calcula $\det(2A^3\cdot A^{-1})$, `det(A^t)`."** (Aplicar propiedades).
- **"Sabiendo `det(C1,C2,C3)=k` (o `det(F1,F2,F3)=k`), calcula `det(mC1+nC2, pC3, qC2)`."** (Aplicar propiedades de linealidad, permutación, etc.).
- **"Dada una matriz con letras (ej. `|a b c; d e f; g h i|=k`), calcula un determinante con elementos transformados."**

5. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: ¿Qué me pueden pedir?

- **"Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro `m`:"**
  - Calcular `det(A)`. Igualar a 0 para hallar valores críticos de `m`.
  - **Caso `det(A)≠0`:** `rg(A)=rg(A*)=3` (nº incóg.) → SCD.
  - **Caso `det(A)=0` (para cada valor crítico de `m`):** Sustituir `m`. Calcular `rg(A)` y `rg(A*)` (usando menores o Gauss). Comparar para ver si es SCI o SI. **Orlar**.
  - Puede requerir **factorizar** el polinomio `det(A)=0`.
- **"Resuelve el sistema para `m=k` (o para los casos de SCI, homogéneo, etc.)."**
  - Si SCD: Cramer o Gauss.
  - Si SCI: Gauss, expresar soluciones en función de parámetro/s libre/s.