

MATEMÁTICAS I

IES Sofía Casanova

3º TRIMESTRE

Alberto José Fuentes García

TEMA 7b - APUNTES: LÍMITES Y DERIVADAS.

Límites, derivadas y aplicaciones.

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

3. Límites y continuidad

3.1. Introducción histórica. Infinito inalcanzable, infinito incomprensible.

El ser humano ha evolucionado adaptado al mundo físico que lo rodea en una determinada escala: tres dimensiones espaciales (en escala cm-m-km) y una temporal. Comprender aquello que excede estas dimensiones y escalas nos resulta confuso y misterioso, y eso es lo que ocurre y ocurrió con el infinito. Pero, gracias a las matemáticas, hoy manejamos con naturalidad y eficiencia este concepto antes enigmático y temido. Veamos como fue el proceso hasta nuestros días:



3.1.1. Antigüedad: infinito potencial vs infinito actual.

En la Antigua Grecia encontramos las primeras referencias al infinito con las **paradojas de Zenón**, como la de Aquiles y la tortuga, en las que las divisiones infinitas generan retos lógicos.



GENERADO CON NANO BANANA.
ALBERTO FUENTES (2023)

Aristóteles distinguió entre el **infinito potencial** (algo que crece indefinidamente, pero que no se alcanza) y el **infinito actual** (una entidad infinita, no la idea de acercarse a ella). Consideraba que ese infinito actual no existía en el mundo físico, no era natural, solo una idea en nuestro pensamiento. El método exhaustivo (**Arquímedes** y **Eudoxo**) para aproximar el área de un círculo con polígonos, también tiene relación con la idea de infinito potencial.



3.1.2. Edad media y renacimiento: enfoque teológico.

En el mundo islámico, la idea de infinito actual permanece en el terreno de la filosofía y la teología. En Europa, dentro de la corriente **escolástica**, **Santo Tomás de Aquino** (s. XIII) reinterpretó a Aristóteles desde la teología, conciliando sus ideas con el cristianismo: consideraba que ese **infinito actual** que se negaba **era**, precisamente, **Dios**, ser perfecto e ilimitado, creador de la naturaleza y superior y padre de los infinitos potenciales que hay en ella. La idea de un infinito actual no divino, generaba un gran rechazo: solo Dios podría tener esa grandeza de entidad superior.

El estudio de la astronomía por parte de **Copérnico**, **Bruno**, **Galileo** invitaron a reflexionar sobre la infinitud del universo. **Pascal**, entre otros, lo veía sobrecogedor, aterrador y desbordante para la mente humana.

3.1.3. Infinitesimales y primeros debates: siglos XVII y XVIII.

En 1656, Wallis usa por primera vez el símbolo ∞ y, en 1694, Bernoulli crea la curva lemniscata con su forma. **Newton** y **Leibniz** sentaron las bases del cálculo diferencial e integral a través de **infinitesimales** (magnitudes infinitamente pequeñas) que, si bien supusieron un enorme avance técnico, carecían de la solidez y el rigor que requieren las matemáticas y fueron cuestionados por ello.

3.1.4. La definición de límite de Cauchy: siglo XIX

Esos primeros debates se resuelven gracias a la definición de sucesión convergente, y de límite de una función que veremos más adelante: se la debemos al matemático francés **Cauchy** (s. XIX), aunque también fueron relevantes las aportaciones previas de **Bolzano** y posteriores de **Weierstrass**. Esta definición permitió manejar matemáticamente el infinito (potencial, no actual), y avanzar y desarrollar el cálculo diferencial e integral sin dudas sobre su rigor.

3.1.5. Teoría de conjuntos: Cantor y filosofía matemática.

A finales del siglo XIX, **Georg Cantor** revoluciona las matemáticas con un nuevo enfoque que permitía generalizar ideas y potenciar el rigor del lenguaje matemáticos: la **teoría de conjuntos**.

Con ella, aparecen nuevos puntos de vista sobre el infinito al tratar de cuantificar el tamaño de los conjuntos (**cardinal**) con un número no limitado de elementos. Surge así la idea de que **existen distintos tipos (tamaños) de infinito**: el infinito numerable ($\aleph_0$) propio de los números naturales, enteros y racionales, y el infinito no numerable ($\aleph_1$) de los números reales.

NOTA: $\aleph$ es la letra hebrea aleph, usada para identificar los distintos tipos de infinito.

3.1.6. El infinito como protagonista de las grandes crisis de las matemáticas

Cuando un descubrimiento obliga a replantear los fundamentos conocidos de las matemáticas, surge una gran crisis. Se identifican dos grandes crisis en la historia:

La **primera** fue el **descubrimiento de los irracionales** por parte de los **Pitagóricos** en el Grecia. La diagonal de un cuadrado de lado uno, $\sqrt{2}$, o de un pentágono regular,

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (la razón áurea), son números irracionales que no se pueden escribir como}$$

fracción, o, en términos griegos, como proporción. Eso rompía con todo lo que ellos había asumido de forma casi religiosa; cambió su concepción del mundo. Como acabamos de ver, los irracionales determinan un tipo distinto de infinito que los racionales ($\mathbb{N}_1$ y $\mathbb{N}_0$), por eso el infinito estaba detrás de esta crisis. Sin los irracionales, una recta no se llena completamente, aunque no se pueda percibir (no es densa).

Sin llegar a ser considerada gran crisis, **los infinitésimos de Newton y Leibniz** fueron un **problema** para el rigor de las matemáticas que se **zanjó con la definición de límite de Cauchy**.

La **segunda gran crisis** surgió a partir de la **teoría de conjuntos** de Cantor con la aparición de **paradojas lógicas**. Si consideramos un conjunto como una colección de objetos cualesquiera, y utilizamos objetos infinitos (infinito actual), aparecían conjuntos imposibles (*"el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos, ¿se contiene a sí mismo?"*, **paradoja de Russell**). Al replantear todas las matemáticas conocidas desde la perspectiva de los conjuntos, hubo que resolver estos problemas. La solución consistió en limitar las reglas de construcción de conjuntos válidos para trabajar matemáticamente con ellos (axiomática).

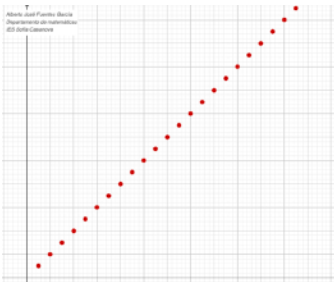


[ZOOM "INFINITO" DEL
CONJUNTO DE
MANDELBROT VISTO
EN FRACTALES](#)

3.2. Límites de sucesiones. Límite cuando $n \rightarrow +\infty$.

Igual que ocurrió en su desarrollo histórico, antes de aproximarnos a los límites de funciones, los razonaremos sobre sucesiones. **¿Cómo se comportan los términos de una sucesión cuando avanzamos indefinidamente?** ¿Se estabilizan en torno a un valor, oscilan, o toman valores cada vez mayores o menores? Veamos algunos ejemplos:

$$a_n = n = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

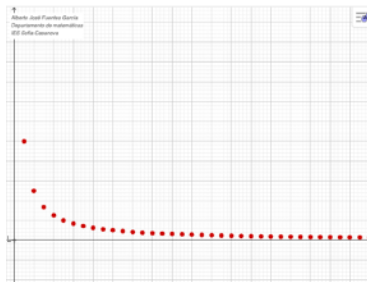


SUCESIÓN DIVERGENTE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

(SE VE COMO CRECE INDEFINIDAMENTE)

$$b_n = \frac{10}{n} = \{10, 5, 2.5, 1.25, \dots\}$$

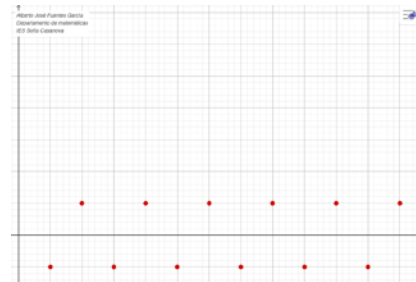


SUCESIÓN CONVERGENTE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$$

(SE ESTABILIZA EN 0, ACERCÁNDOSE CADA VEZ MÁS)

$$c_n = (-1)^n = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$$



SUCESIÓN DIVERGENTE

$$\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$$

(-1 Y 1 ALTERNATIVAMENTE, NO SE ALEJA A ∞ NI SE ESTABILIZA)

Para calcular límites es importante entender que:

∞ NO ES UN NÚMERO, ES LA IDEA DE CRECER INDEFINIDAMENTE!

No cumple las propiedades de los números, no se opera como los números, solo podemos usar lo que sabemos que es correcto. Cuando compite ∞ contra ∞ hablaremos de **indeterminaciones**, situaciones similares que pueden tener distintos resultados dependiendo de cada ejercicio concreto.

Vamos a ver como calcular desde límites cuando $n \rightarrow \infty$ desde ejemplos básicos:

3.3. Cálculo de límites cuando $n \rightarrow +\infty$

Límites polinómicos: Se resuelven sacando factor común a $n^{\text{mayor grado}}$.

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (n - 6) = +\infty - 6 = ?$$

$$\text{Solución: } \lim_{n \rightarrow \infty} (n - 6) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \frac{6}{n}) = +\infty(1 - 0) = +\infty \text{ (se impone } n)$$

En general: $\pm \infty \pm k = \pm \infty$ (sumar o restar cantidades fijas no afecta a ∞)

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2 + 2n + 1) = -\infty^2 + 2\infty + 1 = ? \text{ **INDETERMINACIÓN } \infty - \infty**$$

$$\text{Solución: } \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2 + 2n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(-1 + 2/n + 1/n^2) = \infty(-1 + 0 - 0) = -\infty$$

(se impone $-n^2$)

ASUMIREMOS QUE EN EXPRESIONES POLINÓMICAS, SE IMPONE EL DE MAYOR GRADO, NO ES NECESARIO HACER ESE CÁLCULO EN EL FUTURO

Límites racionales caso $\frac{a}{\infty}$, $a \neq 0$: (el resultado es cero)

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{-n^2 + 2n} = \frac{4}{-\infty} = 0$$

Límites racionales, indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$: (dividir numerador y denominador por $n^{\text{mayor grado}}$):

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty. \text{ (gr num < gr den)}$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0 \text{ (grado num. < grado den.)}$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + n - 1}{4n^2 - 3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2} - \frac{3}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + 0 + 0}{4 - 0} = \frac{1}{2} \text{ (grados =)}$$

SE IMPONE EL DE MAYOR GRADO. SI TIENEN MISMO GRADO, QUEDAN SUS COEFICIENTES. EL SISTEMA DE DIVIDIR POR LO DE MAYOR MAGNITUD ES APLICABLE A OTRAS SITUACIONES.

Resta de raíces $\sqrt{\infty} - \sqrt{\infty}$ (multiplicar y dividir por el conjugado)

$$\begin{aligned}
 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 - n}) &= (\infty - \infty) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 - n})(\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - n})}{\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - n}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - 1) - (n^2 - n)}{\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 1}{\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - n}} = \frac{\infty}{\infty} =
 \end{aligned}$$

(caso anterior: dividir numerador y denominador por $n^{\text{mayor grado}}$, en este caso grado 1)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{n}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

Resta de fracciones $\infty - \infty$ (convertir en una sola fracción operando)

$$\begin{aligned}
 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2+1}{n-2} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2(n-2) - (n^2+1)(n-1)}{(n-1)(n-2)} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^3 - 2n^2 - n^3 + n^2 - n + 1}{n^2 - 3n + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-n^2 - n + 1}{n^2 - 3n + 2} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = -1
 \end{aligned}$$

Casos $0 \cdot \infty$: (convertir en fracción con caso $\frac{\infty}{\infty}$)

$$\cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+7) \cdot \sqrt{\frac{1}{4n^2+3}} = (0 \cdot +\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(n+7)^2}{4n^2+3}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^2}{4n^2}} = \frac{1}{2}$$

Caso 1^∞ - Número e: (aplicar procedimiento, más adelante veremos fórmula)

NOTA: El número e es uno de los números irracionales que se han ganado tener una letra reservada, como π o ϕ , por aparecer en numerosas situaciones de diversa naturaleza. Relacionado con los logaritmos (Nieper ≈ 1600), lo estudia Bernoulli (1683) en problemas de interés compuesto y Euler le da nombre y profundiza con detalle en él (a partir de 1736):

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Procedimiento para convertir en e (solo si es necesario cada paso):

- sumar y restar 1
- invertir fracción
- cambiar exponente

$$\begin{aligned} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-5}\right)^{\frac{n^2}{n-1}} &= (1^{+\infty}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n+1}{3n-5} - 1\right)^{\frac{n^2}{n-1}} = (+1-1)= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\cancel{3n}+1-\cancel{3n}+5}{3n-5}\right)^{\frac{n^2}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{3n-5}\right)^{\frac{n^2}{n-1}} = (\text{invertir})= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n-5}{6}}\right)^{\frac{n^2}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n-5}{6}}\right)^{\frac{3n-5}{6} \cdot \frac{6}{3n-5} \cdot \frac{n^2}{n-1}} = (\text{arreglar exponente}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3n-5}{6}}\right)^{\frac{3n-5}{6}}\right]^{\frac{6}{3n-5} \cdot \frac{n^2}{n-1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2}{3n^2-8n+5}} = e^2 \end{aligned}$$

NO SON INDETERMINACIONES:

$$\cdot (+\infty)^{+\infty} = +\infty$$

$$\cdot (+\infty)^{(-\infty)} = \frac{1}{(+\infty)^{(+\infty)}} = 0$$

$$\cdot a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ \text{num.} \cdot e & \text{si } a = 1 \text{ (ind.)} \\ 0 & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\cdot 0^{+\infty} = 0$$

$$\cdot 0^{-\infty} = \frac{1}{0^{+\infty}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

NOTA: 0^+ representa acercamiento a cero por los positivos, 0^- por los negativos.

La división por cero no existe, no es una expresión válida, en límites, si vemos $\dots/0$, quiere decir que el denominador se acerca a 0 en el infinito, no que dividamos por cero.

3.4. Definición de límite de una sucesión convergente

NOTA: La **definición precisa de límite**, suele ser la primera aproximación en los estudios a un lenguaje matemático más avanzado y, aunque su primera lectura pueda intimidar (como ocurre con cualquier idioma aún desconocido), conviene intentar comprenderla. ¡Ánimo!:

Lenguaje matemático

Traducción literal a lenguaje natural

Interpretación: significado

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \Leftrightarrow: \forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} / n > k \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

... "tal que" ...

El límite de a_n , cuando n tiende a $+\infty$ es el número L

"si y solo si"
= "equivale a decir"
= "es lo mismo que"

Para cualquier distancia **epsilon** que cojamos, por pequeña que sea...

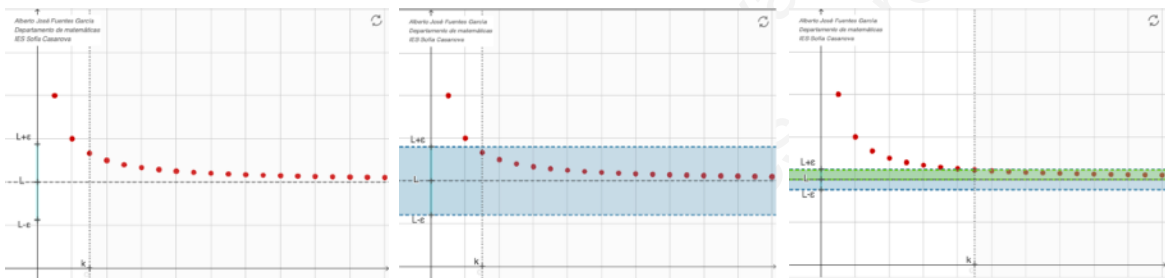
...siempre va a existir una posición k en la sucesión...

... a partir de la cual...

...los valores que toma la sucesión estarán a menor distancia de L que ese epsilon

A medida que avanza la sucesión, toma valores cada vez más próximos a L , los valores se van "apretando" en torno a L (tanto como se quiera)

SUCESIÓN CONVERGENTE: TIENEN LÍMITE FINITO (SE ACERCA A UN VALOR FIJO)



Vemos que la sucesión $a_n = \frac{1}{n} + 1$ se acerca cada vez más a 1.

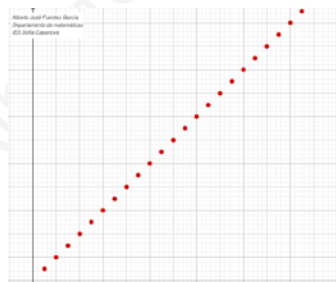
Para $\varepsilon = 0,4$ (franja azul), los dos primeros valores quedan fuera, pero a partir de la posición $k = 3$, todos están a menor distancia de 1

Para $\varepsilon = 0,12$, a partir de la posición $k = 9$ todos los valores quedan dentro. Y se puede demostrar que será así para cualquier distancia. La sucesión tiene límite, y es 1.

SUCESIONES DIVERGENTES: NO TIENEN LÍMITE FINITO



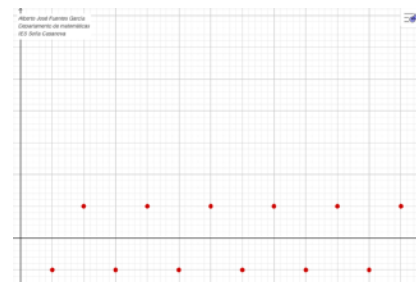
[INTERACTIVO: LÍMITE SUCESIÓN](#)



SUCESIÓN DIVERGENTE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

(SE VE COMO CRECE INDEFINIDAMENTE)



SUCESIÓN DIVERGENTE

$$\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$$

(-1 Y 1 ALTERNATIVAMENTE, NO SE ALEJA A ∞ NI SE ESTABILIZA)

No hay ninguna posición k a partir de la cual los valores de la sucesión se vayan apretando en torno a un límite finito.

3.5. Definición de límite de una función en un punto

Lo visto para sucesiones cuando $n \rightarrow \infty$ se puede aplicar a funciones cuando $x \rightarrow \infty$.

Pero con funciones, x tiene más libertad que n . Puede acercarse también a $-\infty$ o a un punto cualquiera a .

Un límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ describe el comportamiento de la función f cuando x se aproxima (o tiende) a a .

Lenguaje
matemático

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Traducción
literal a
lenguaje
natural

El límite de f , cuando
 x tiende a c es el
número L

"si y solo
si"
= "equivale
a decir"
= "es lo
mismo
que"

Para
cualquier
distancia
epsilon
que
cojamos,
por
pequeña
que sea...

...siempre
va a existir
una
distancia
delta
suficiente
mente
pequeña...

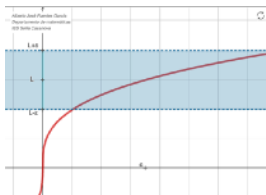
...si consideramos
valores de x próximos a
 c ...
(a distancia menor que
esa delta
suficientemente
pequeño)

...los valores que toma
la función para esos x
también son próximos
al valor del límite, L
(Distancia menor que el
épsilon elegido tan
pequeño como se
quiso)

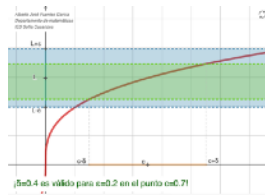
Interpretación:
significado

Si x se acerca infinitamente a c , los valores que toma la función $f(x)$ se acercan infinitamente al valor del límite L

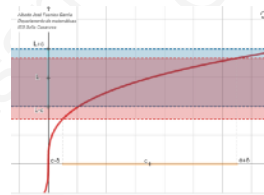
CASO: SÍ EXISTE LÍMITE



Para cualquier distancia **epsilon** que cojamos, por pequeña que sea... (aparece un intervalo en el eje Y centrado en el valor del límite, **franja azul**)

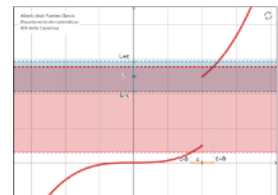


...podremos encontrar un **delta** suficientemente pequeño de manera que los valores que toma la función en el intervalo del eje X que define $(x - \delta, x + \delta)$ encajen dentro de la **franja azul**



En este caso, el **delta** no es suficientemente pequeño, y la imagen del intervalo en x no cabe dentro del **intervalo definido** por el **épsilon** en el eje y . Pero si existe límite, haciendo más pequeño el **delta**, podremos encajarlo.

CASO NO EXISTE LÍMITE



Para esta otra función, vemos que al acercarnos al punto donde hay un salto, **es imposible elegir un delta** que haga que encajen los valores en la **franja azul**.

Por pequeño que sea delta, el salto provoca que los el rango de valores en el eje Y sea demasiado amplio

Interpretación
gráfica



[GEOGEBRA
INTERACTIVO](#)



[VÍDEO EXPLICATIVO](#)

Volveremos al cálculo de límites después de haber aprendido a derivar, pues la derivada permite aplicar la Regla de L'Hopital que hace mucho más sencillo obtenerlos. (*)

3.6. Continuidad

NOTA: En la ESO llamamos función continua a la que se dibuja de un solo trazo. Ahora utilizamos una definición algo más rigurosa:

Definición: continuidad en un punto

$$f \text{ es continua en un punto } x = x_0 \iff \begin{cases} (1) \exists f(x_0) \\ (2) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ (3) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

NOTA: De forma resumida a veces se escriben, por comodidad, las tres condiciones juntas, como $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Esta definición entra como teoría en 2º de Bachillerato.

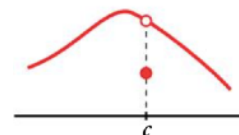
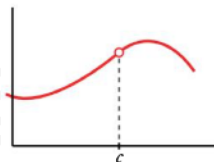
Tipos de discontinuidad⁶:

Discontinuidad evitable:

Se produce cuando existe el límite de la función en el punto, pero la función no está definida en ese punto¹ o toma un valor que no coincide con el límite.

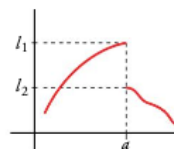
Se evita redefiniendo la función en el punto para que coincida con el límite.

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ pero } (1) \nexists f(x_0) \quad \text{ó} \quad (2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

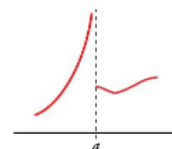


Discontinuidad inevitable:

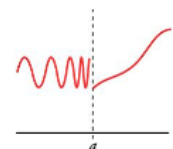
- **de salto finito:** los límites laterales en el punto existen pero su valor no coincide.



$$l_1 = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l_2$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



Non existe $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

- **de salto infinito:** al menos uno de los límites laterales es infinito.

- **no existe algún límite lateral.**

⁶ NOTA: en nivel universitario, con más rigor, se suele hablar de continuidad solo en el dominio, por lo que no se habla de discontinuidad si no está definida la función en el punto.

Definición: continuidad en un intervalo

Se dice que una función f es continua en un intervalo de $\mathbb{R}$ si es continua en cada punto de ese intervalo.

Ejemplo: ejercicio de estudio de continuidad con parámetro

Calcula el valor de n para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1 & \text{si } x \leq 4 \\ 2x + n & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

f es una función a trozos donde: $f_1(x) = x^2 - 5x + 1$ y $f_2(x) = 2x + n$

• Si $x \neq 4$:

- Si $x < 4$, f es continua ($f_1(x)$ función cuadrática)
- Si $x > 4$, f es continua ($f_2(x)$ función lineal)

Entonces f continua en $\mathbb{R} - \{4\}$ **(1)**

• Si $x = 4$:

$$f \text{ continua en } x = 4 \iff \exists \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$$

- Calculamos el valor de la función en 4 y los límites laterales e igualamos:

$$\left. \begin{array}{l} \cdot f(4) = f_1(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 1 = 16 - 20 + 1 = -3 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 - 5x + 1 = -3 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 2x + n = 8 + n \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} -3 = 8 + n \\ n = -11 \end{array}$$

Entonces si $n = -11$, f es continua en $x = 4$ **(2)**

- Si combinamos las conclusiones **(1)** y **(2)**:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right\} \implies \text{si } n = -11 \text{ } f \text{ es continua en todo } \mathbb{R}$$

4. Derivadas

4.1. Función derivable. Derivada en un punto.

NOTA: Ya hemos visto el significado de derivada al hablar de la TVM. Si la TVM representa el cambio promedio de una función en un intervalo, la derivada representa el cambio instantáneo (el intervalo se hace infinitamente pequeño). Este epígrafe entra como teoría en 2º de Bachillerato

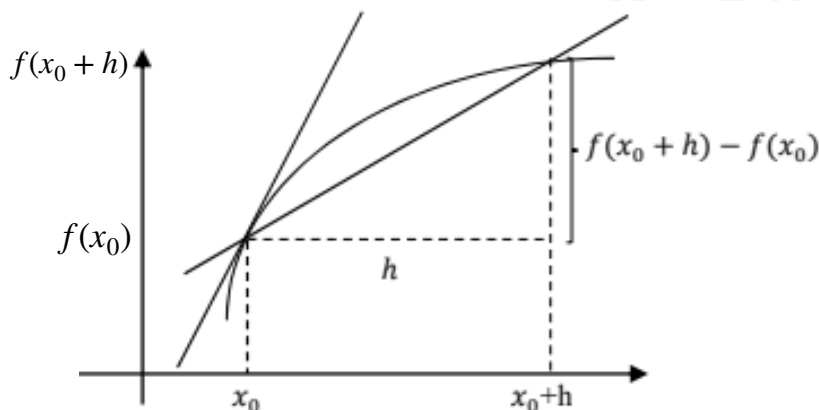
Definición: derivada de una función en un punto

$$f \text{ es derivable en un punto } x = x_0 \iff \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

El valor finito de ese límite se representa como $f'(x_0)$ y se llama **derivada** de f en x_0

NOTA: f es derivable en un intervalo (a, b) si lo es en cada punto de (a, b) .

Interpretación gráfica: derivada como límite de las secantes.



[INTERACTIVO: TVM Y DERIVADA](#)



[VÍDEO EXPLICATIVO: TVM Y DERIVADA](#)

La secante que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ tiene como

pendiente $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (TVM en el intervalo $(x_0, x_0 + h)$).

Cuando reducimos el tamaño del intervalo ($h \rightarrow 0$), esa secante se va aproximando a la tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$, hasta, llevado al límite, convertirse en dicha tangente.

Por lo tanto, la derivada de la función en el punto x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$. Por tanto:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \text{pte. de la recta tangente en el punto } (x_0, f(x_0))$$

4.2. Propiedades de la derivada y reglas de cálculo.

Linealidad de la derivada

La derivada es un operador lineal, “funciona bien” con sumas y restas:

- La derivada de una suma/resta es la suma/resta de las derivadas.
- La derivada de un coeficiente por una función es el coeficiente por la derivada de la función.

$$(m \cdot f + n \cdot g)' = m \cdot f' + n \cdot g'$$

Derivada del producto

La derivada del producto es la derivada del primero por el segundo sin derivar, más la derivada del segundo por el primero sin derivar.

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Derivada del cociente

La derivada del cociente es la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos la derivada del denominador por el numerador sin derivar, partido del denominador al cuadrado.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Regla de la cadena

La derivada de f compuesto con g (f está dentro de g) es la derivada de g (con f dentro) por la derivada de f (derivada de lo que g tiene dentro). Se deriva primero la función más externa, la última en aplicar, y se va multiplicando por las derivadas de lo que hay dentro.

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Ejemplo:

$$f(x) = \sin(x) \quad g(x) = x^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin^2 x$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = (2 \sin x) \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cos x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin x^2$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = (\cos x^2) \cdot (x^2)' = 2x \cdot \cos x^2$$

4.3. Repaso de la composición de funciones para la regla de la cadena

f compuesto con g (se aplica primero f, después g) $g \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$
 $x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(f(x))$

Ejemplo: $f(x) = \sin(x)$ $g(x) = x^2$

· *f compuesto con g: (se aplica primero f, después g)*

$$g \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{\sin} \mathbb{R} \xrightarrow{[]^2} \mathbb{R} \quad \text{entonces } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin^2 x$$

$$x \longrightarrow \sin x \longrightarrow \sin^2 x$$

· *g compuesto con f: (se aplica primero g, después f)*

$$f \circ g : \mathbb{R} \xrightarrow{[]^2} \mathbb{R} \xrightarrow{\sin} \mathbb{R} \quad \text{entonces } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(x^2)$$

$$x \longrightarrow x^2 \longrightarrow \sin(x^2)$$

Ejemplo: $f(x) = \ln x$ $g(x) = e^x$

· *f compuesto con g (se aplica primero f, después g)*

$$g \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{\ln} \mathbb{R} \xrightarrow{e[]^1} \mathbb{R} \quad \text{entonces } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$$

$$x \longrightarrow \ln x \longrightarrow e^{\ln x} = x$$

· *g compuesto con f (se aplica primero g, después f)*

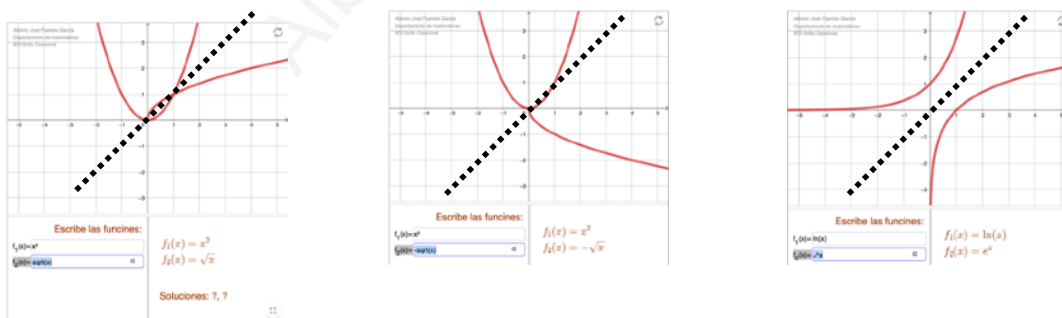
$$f \circ g : \mathbb{R} \xrightarrow{e[]^1} \mathbb{R} \xrightarrow{\ln} \mathbb{R} \quad \text{entonces } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = x$$

$$x \longrightarrow e^x \longrightarrow \ln e^x = x$$

¡SON FUNCIONES INVERSAS!

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

GRÁFICA DE FUNCIONES INVERSAS: Presentan simetría respecto $y = x$



TIENEN QUE SER INYECTIVAS, SI NO, SEPARARLAS

4.4. Cálculo de derivadas por definición. Construcción de la tabla.

Vimos que derivar consiste en calcular un límite. Podemos aplicárselo a las funciones elementales:

1. Derivada de una constante $f(x) = c$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

2. Derivada de la función identidad $f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

3. Derivada de $f(x) = x^n$ (para n entero positivo)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \text{usamos el desarrollo de un binomio} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x^n}{h} = (\text{factor común } h) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \right) = nx^{n-1} \end{aligned}$$

De esta forma, encontramos reglas generales para las funciones elementales que nos ahorran el trabajo de tener que hacer un límite cada vez que derivamos. Aparece así la tabla de derivadas.

4.5. Tabla de derivadas. Primeras derivadas.

(Aparecen marcadas con * las más recurrentes)

Reglas de Potencia y Raíces

$$f(x) = k$$

$$f'(x) = 0$$

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = n x^{n-1} \quad *$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad *$$

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Funciones Exponenciales y Logarítmicas

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x \quad *$$

$$f(x) = a^x$$

$$f'(x) = a^x \ln a$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad *$$

$$f(x) = \log_a x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Funciones Trigonómicas

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x \quad *$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x \quad *$$

$$f(x) = \tan x$$

$$f'(x) = * \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Funciones Trigonómicas Inversas

$$f(x) = \arcsin x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad *$$

$$f(x) = \arccos x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctan x$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad *$$

Ejemplos iniciación:

Elementales y aplicando linealidad:

$$1. f(x) = x^3 \implies f'(x) = 3x^2$$

$$2. f(x) = 5x^4 \implies f'(x) = 20x^3$$

$$3. f(x) = x^5 - 2x^3 + 7x - 4 \implies f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 7$$

$$4. f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \implies f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$5. f(x) = 2x^{-3} \implies f'(x) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$

Con regla del producto, del cociente:

$$6. f(x) = x^2 \cdot e^x \implies f'(x) = (2x \cdot e^x) + (x^2 \cdot e^x) = e^x(2x + x^2)$$

$$7. g(x) = \frac{x}{x+1} \implies g'(x) = \frac{(1)(x+1) - (x)(1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Con regla de la cadena:

$$8. h(x) = (x^2 + 1)^3 \implies h'(x) = 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2 + 1)^2$$

Ejemplos completos:

a) Unas exigen simplificación tras derivar:

$$f(x) = \arctan \frac{1+x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{x}\right)^2} \cdot \frac{x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{\frac{x^2 + (1+x)^2}{x^2}} \cdot \frac{x - 1 - x}{x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{x^2 + 1 + 2x + x^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{2x^2 + 2x + 1}$$

b) Otras dominar la regla de la cadena y la tabla:

$$f(x) = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)} \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \cdot \left(\frac{-2}{x^3}\right) = \frac{2 \tan\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^3}$$

c) Usar estrategias habituales como sacar factor común en exponenciales:

$$f(x) = \frac{4e^x}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{4e^x \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 4e^x}{(\sqrt{x})^2} = \frac{4e^x \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 4e^x}{x} = \frac{4e^x \left(\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} = \frac{2e^x(2x - 1)}{x\sqrt{x}}$$

d) Resolver simplificando o aplicando propiedades de los logaritmos:

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}}} \cdot \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(x^2 + x - x^2)}{2\frac{x^2}{x^2 + 1}(x^2 + 1)^2} = \frac{x}{x^2(x^2 + 1)} =$$

$$= \frac{1}{x(x^2 + 1)}$$

4.6. Derivada potencial-exponencial.

Cuando tenemos x en la base y en el exponente de una función, ¿usamos la derivada de una potencia $y = x^n$ o usamos una exponencial $y = a^x$

Para solucionarlo, existe un procedimiento, y una fórmula asociada:

El **procedimiento** permite llegar a la fórmula. **Tomamos logaritmos y derivamos:**

$$\begin{aligned}
 y = (f(x)^{g(x)})' &\Rightarrow \ln y = \ln f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x) \cdot \ln f(x) \Rightarrow \text{derivamos} && \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{y'}{y} = g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) && \Rightarrow \\
 &\Rightarrow y' = g'(x) \cdot \ln f(x) \cdot y + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \cdot y && \Rightarrow \\
 \text{sustituyendo } y = (f(x)^{g(x)}) &\Rightarrow y' = g'(x) \cdot \ln f(x) \cdot f(x)^{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \cdot f(x)^{g(x)} && \Rightarrow \\
 \text{reordenando y simplificando} &\Rightarrow (f(x)^{g(x)})' = g(x) \cdot f(x)^{g(x)-1} \cdot f'(x) + f(x)^{g(x)} \cdot \ln f(x) \cdot g'(x)
 \end{aligned}$$

Así nos queda una fórmula que, como vemos, combina **potencial** y **exponencial**:

$$(f(x)^{g(x)})' = \underbrace{g(x) \cdot f(x)^{g(x)-1} \cdot f'(x)}_{\text{Potencial}} + \underbrace{f(x)^{g(x)} \cdot \ln f(x) \cdot g'(x)}_{\text{Exponencial}}$$

Veamos como aplicarlo.

Ejemplos:

Fórmula: $f(x) = x^{\sin x} \implies f'(x) = \sin x \cdot x^{\sin x - 1} \cdot 1 + x^{\sin x} \cdot \ln x \cdot \cos x =$
 $= x^{\sin x - 1} \sin x + x^{\sin x} \cos x \cdot \ln x$

Procedimiento:

$$\begin{aligned} f(x) = x^{\sin x} &\implies \ln f(x) = \ln x^{\sin x} \implies \ln f(x) = \sin x \cdot \ln x &\implies \\ \implies (\ln f(x))' &= (\sin x \cdot \ln x)' &\implies \\ \implies \frac{f'(x)}{f(x)} &= \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} &\implies \\ \implies f'(x) &= f(x) \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) &\implies \\ \implies f'(x) &= x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) &\implies \\ \implies f'(x) &= x^{\sin x - 1} \sin x + x^{\sin x} \cos x \cdot \ln x \end{aligned}$$

Fórmula:

$$f(x) = x^{x+1} \implies f'(x) = (x+1) \cdot x^x + x^{x+1} \ln x = x^x \cdot (x+1 + x \ln x)$$

Procedimiento:

$$\begin{aligned} f(x) = x^{x+1} &\implies \ln f(x) = \ln x^{x+1} \implies \ln f(x) = (x+1) \cdot \ln x &\implies \\ \implies (\ln f(x))' &= ((x+1) \cdot \ln x)' &\implies \\ \implies \frac{f'(x)}{f(x)} &= \ln x + \frac{x+1}{x} &\implies \\ \implies f'(x) &= f(x) \cdot \left(\ln x + \frac{x+1}{x} \right) &\implies \\ \implies f'(x) &= x^{x+1} \left(\ln x + \frac{x+1}{x} \right) &\implies \\ \implies f'(x) &= x^x \cdot (x+1 + x \ln x) \end{aligned}$$

5. Aplicaciones de la derivada

5.1. Regla de L'Hopital para límites $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ o $\left(\frac{0}{0}\right)$. Cálculo de límites.

Sean f y g funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ y derivables en (a, b) .

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, podemos **derivar numerador y denominador para**

encontrar un límite equivalente (si existe):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

NOTA: Ojo, es común confundirse y aplicar la regla del cociente. Se trata de derivar por separado el numerador y el denominador.

Ejemplos:

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = \left(\frac{e^0 - 1}{0 - 0} = \frac{0}{0}\right) = L'Hopital = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2x - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = L'Hopital = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Propiedades del límite como operador.

Supongamos que existen los límites: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$:

$$\text{Linealidad: } \begin{cases} \text{sumas: } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M \\ \text{constantes: } \lim_{x \rightarrow a} (c f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot L \end{cases}$$

RECUERDA: la linealidad separa sumas y saca constantes

$$\text{Límite del cociente: } \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M} \quad (\text{si } M \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M)$$

Guía de cálculo de límites de funciones

(*) Visto L'Hopital, podemos completar el estudio del cálculo de límites;

$x \rightarrow +\infty \Rightarrow$ **IGUAL QUE EN SUCESIONES + REGLA DE L'HOPITAL (ver después)**

Ejemplos: (repaso de cociente de polinomios, ver más tipos en L'Hopital)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2} \quad (= \text{grado, cociente de coeficientes de mayor grado})$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^3 - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{4x^3} = 0 \quad \text{grado num.} < \text{grado den.} \Rightarrow 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x - 1}{4x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{4x^2} = +\infty \quad \text{grado num.} > \text{grado den.} \Rightarrow \text{+-infinito}$$

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow$ **si cuesta verlo, CAMBIAMOS LAS x POR -x Y SE CONVIERTE EN $x \rightarrow +\infty$**

Ejemplos:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$x \rightarrow a \Rightarrow$ **SUSTITUIMOS x POR a Y OBTENEMOS RESULTADO SALVO INDETERMINACIÓN:**

Ejemplos:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x^2}{x^4 + x^3} = \frac{\ln 1 - 1^2}{1^4 + 1^3} = \frac{-1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad (\text{nos acercamos a cero por los positivos } (1'001 - 1 > 0))$$

INDETERMINACIONES:

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

$$\text{I. } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0} \implies \text{L'HOPITAL : } \lim_{x \rightarrow} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ (derivar num. y den.)}$$

(u otros recursos vistos como comparar infinitos / dividir polinomios / simplificar expresiones)

Ejemplos:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = \left(\frac{e^0 - 1}{0 - 0} = \frac{0}{0} \right) = L'Hopital = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2x - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

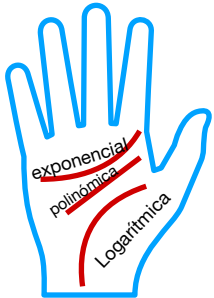
II. $\infty - \infty \Rightarrow$ OPERAR Y SIMPLIFICAR O COMPARACIÓN DE INFINITOS**COMPARACIÓN DE INFINITOS:**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad (\text{"manda" el de mayor grado})$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^5 - 2^x) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2^x = -\infty \quad (\text{"puede más" la exponencial})$$

ALGUNOS MÉTODOS: operar fracciones algebraicas

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x-2} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2(x-2) - (x^2+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = -1 \end{aligned}$$



TRUCO PARA
RECORDAR:
EXP > POL > LOG

ALGUNOS MÉTODOS: multiplicar y dividir por conjugado

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x}) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x}) \cdot (\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x}) \cdot (\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 2) - (x^2 + x)}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 - x}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x}} = \frac{-1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

III. $0 \cdot \infty \Rightarrow$ OPERAR Y CONVERTIR EN $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0}$

Ejemplos:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{1}{x} = (0 \cdot +\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = L'Hopital = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+7) \cdot \sqrt{\frac{1}{4x^2+3}} = (0 \cdot +\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(x+7)^2}{4x^2+3}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{4x^2}} = \frac{1}{2}$$

IV. $0^0, \infty^0$ - Propiedades logaritmo + exponencial + L'Hopital (más en 2º BACH)

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = (\infty^0) \xrightarrow{\text{tomamos } \ln} \ln L = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Por tanto, $\ln L = 0 \Rightarrow L = 1$ (último límite por L'Hopital o comparación de infinitos)

V. 1^∞ - Número e:

Opción 1: procedimiento +1-1, invertir, cambiar exponente para usar

$$\begin{aligned} e &= \lim_{f(x) \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)} \right)^{f(x)} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}} &= (1^{+\infty}) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{2x+1}{x+2} - 1 \right)^{\frac{1}{x-1}} = (+1-1)= \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{2x+1-x-2}{x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{x-1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}} = (\text{invertir})= \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \right)^{\frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{1}{x-1}} = (\text{arreglar exponente})= \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \right)^{\frac{x+2}{x-1}} \right]^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Opción 2: fórmula (propiedades logaritmo + exponencial):

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^{h(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} h(x) \cdot \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right)} \quad (\text{salen mismas cuentas casi})$$

5.2. Estudio de continuidad y derivabilidad

EJEMPLO: Obtén los valores de a y b para que f sea continua y derivable en todos los números reales:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



[FUNCIONES A TROZOS](#)

f es una función a trozos donde: $f_1(x) = 2x^2 - x$ y $f_2(x) = ax + b$

• Si $x \neq 1$: CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

- Si $x < 1$, f es continua y derivable ($f_1(x)$ función cuadrática)
- Si $x > 1$, f es continua y derivable ($f_2(x)$ función lineal)

Entonces f continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$ **(1)**

• Si $x = 1$:

• **CONTINUIDAD:**

$$f \text{ continua en } x = 1 \iff \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

- Calculamos el valor de la función en 1 y los límites laterales e igualamos:

$$\left. \begin{aligned} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 - x = 2 - 1 = 1 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax + b = a + b \\ \cdot f(1) &= f_2(1) = ax + b = a + b \end{aligned} \right\} \implies a + b = 1$$

Entonces si $a + b = 1$, f es continua en $x = 1$ **(2a)**

• **DERIVABILIDAD:** f derivable en $x = 1 \iff \begin{cases} f \text{ continua} \\ \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x)}{h} \end{cases}$

Usamos las derivadas laterales $f'^-(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ y $f'^+(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$

$$f \text{ derivable en } x = 1 \iff \begin{cases} f \text{ continua} \\ f'^-(1) = f'^+(1) \end{cases}$$

- Derivamos la función (derivamos cada uno de sus trozos):

$$f'(x) = \begin{cases} (2x^2 - x)' = 4x - 1 & \text{si } x < 1 \\ (ax + b)' = a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Calculamos en $x=1$ el valor de las derivadas por ambos lados e igualamos:

$$\left. \begin{array}{l} \cdot f'^-(1) = 4 \cdot 1 - 1 = 3 \\ \cdot f'^+(1) = a \end{array} \right\} \implies a = 3$$

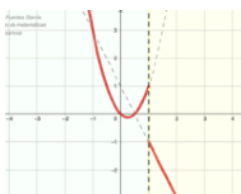
Entonces si $a = 3$, f es derivable en $x = 1$ **(2b)**

- Para que sea continua y derivable en $x=1$, deben cumplirse **(2a)** y **(2b)**, y queda un sistema de ecuaciones a resolver:

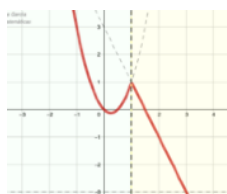
$$\left. \begin{array}{l} (2a) \\ (2b) \end{array} \right\} \implies \begin{cases} a + b = 1 \\ a = 3 \end{cases} \iff a = 3 \text{ y } b = -2 \text{ (2)}$$

- **Para finalizar**, si combinamos las conclusiones (1) y (2):

$$\left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right\} \implies \text{si } a = 3 \text{ y } b = -2, f \text{ es continua y derivable en todo } \mathbb{R}$$



NO CONTINUA, NO
DERIVABLE



CONTINUA
NO DERIVABLE



CONTINUA Y
DERIVABLE
(SOLUCIÓN)

5.3. Tangente a una curva

Vimos que la derivada de una función en un punto es la pendiente a la curva en ese punto (interpretación gráfica). Así, podemos calcular la recta tangente a cualquier función en un punto dado, y también la recta normal (perpendicular) a través de la **ecuación punto-pendiente**.



[INTERACTIVO: TVM Y DERIVADA](#)

Recta tangente: $\begin{cases} \text{Punto: } (x_0, f(x_0)) \\ \text{Pendiente: } f'(x_0) \end{cases} \implies y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Recta normal: $\begin{cases} \text{Punto: } (x_0, f(x_0)) \\ \text{Pendiente: } \perp - \frac{1}{f'(x_0)} \end{cases} \implies y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Ejemplo 1.

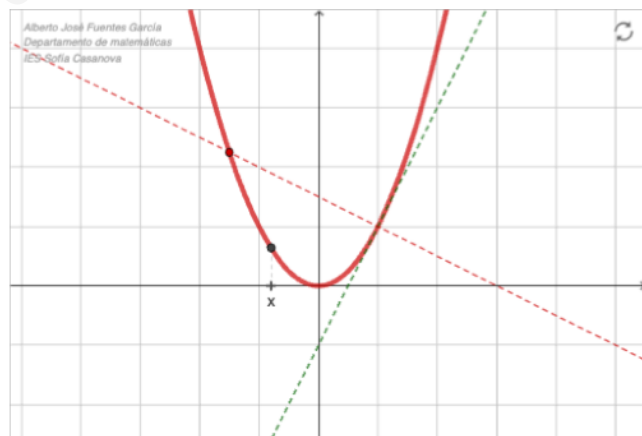
Calcula la recta tangente y la recta normal a $f(x) = x^2$ en el punto $x_0 = 1$.

Derivamos $f'(x) = 2x$.

Recta tangente: $\begin{cases} \text{Punto: } (1,1) \\ \text{Pendiente: } 2 \end{cases} \implies y - 1 = 2(x - 1): \quad \boxed{y = 2x - 1}$

Recta normal: $\begin{cases} \text{Punto: } (1,1) \\ \text{Pendiente: } \perp - \frac{1}{2} \end{cases} \implies y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1): \quad \boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$

Representación gráfica:



Ejemplo 2.

Hallar las rectas tangentes a la curva $y = \frac{x^3 - 3x^2}{9}$ que sean paralelas a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Dato: pendiente $m=1$. Incógnita: punto.

La bisectriz del primer y tercer cuadrante tiene pendiente $m=1$. Buscamos los puntos donde la función tiene pendiente 1 a través de la derivada:

$$\text{Derivamos: } f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{9} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 6x}{9}$$

Igualemos $f'(x) = 1$ para encontrar el punto:

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 6x}{9} = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

son las abscisas de los puntos de tangencia.

$$\text{Las ordenadas para las abscisas } -1 \text{ y } 3 \text{ son: } \begin{cases} f(-1) = \frac{(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2}{9} \Rightarrow f(-1) = -\frac{4}{9} \\ f(3) = \frac{3^3 - 3 \cdot 3^2}{9} \Rightarrow f(3) = 0 \end{cases},$$

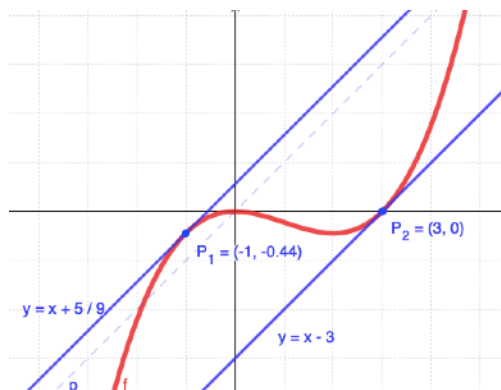
Así, los puntos de tangencia buscados son $(-1, -\frac{4}{9})$ y $(3, 0)$.

Obtenemos ahora las tangentes pedidas:

• Tangente por $(-1, -4/9)$: $y - \frac{-4}{9} = 1 \cdot (x - (-1)) \Rightarrow \boxed{y = x + \frac{5}{9}}$

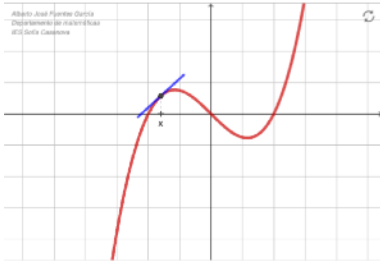
• Tangente por $(3, 0)$: $y - 0 = 1 \cdot (x - 3) \Rightarrow \boxed{y = x - 3}$

Representación gráfica:

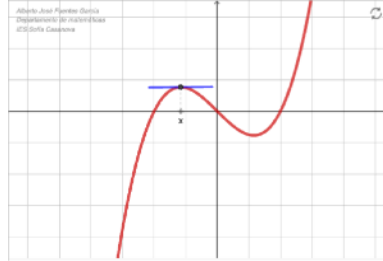


5.4. Estudio de la monotonía (crecimiento y decrecimiento)

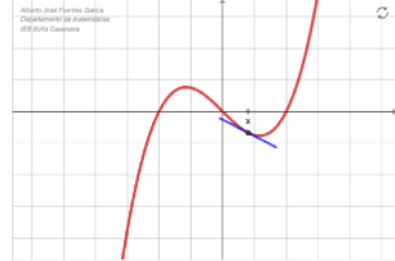
Si la derivada nos proporciona la pendiente de la tangente a una curva en cada punto, nos puede dar información sobre como se orienta (en funciones derivables):



$$f'(x_0) > 0 \text{ CRECE}$$



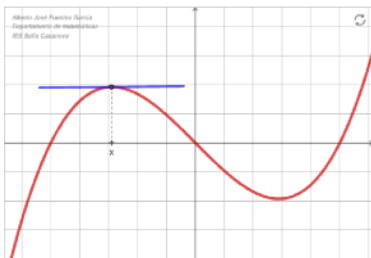
$$f'(x_0) = 0 \text{ HORIZONTAL}$$



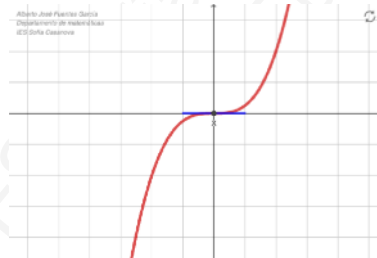
$$f'(x_0) < 0 \text{ DECRECE}$$

La derivada se convierte en una **herramienta para estudiar el crecimiento y el decrecimiento de una función en distintos intervalos.**

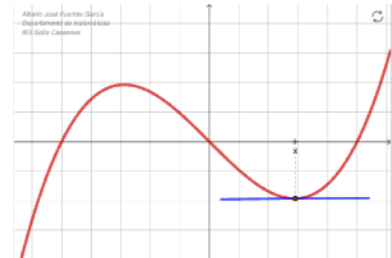
Además, en los puntos **donde la derivada vale cero (puntos singulares)**, la función se orienta horizontalmente, y son candidatos a ser localizaciones de valores **máximos o mínimos** (en general, llamados **extremos**).



$$f'(x_0) = 0, \text{ MÁXIMO RELATIVO}$$



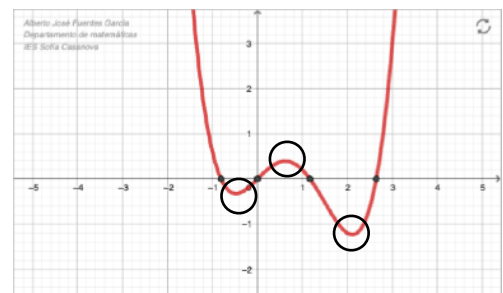
$$f'(x_0) = 0 \text{ PERO NO HAY EXTREMO}$$



$$f'(x_0) = 0, \text{ MÍNIMO RELATIVO}$$

Los extremos son **relativos** si lo son en un intervalo próximo, pero hay valores más altos (máximo) o más bajos (mínimo) en algún punto del dominio.

Son **absolutos**, si no hay valores más altos para el máximo ni más bajos para el mínimo en todo el Dom.



$$\begin{aligned} \text{MÍNIMO RELATIVO EN } x &= -\frac{1}{2} \\ \text{MÁXIMO RELATIVO EN } x &= \frac{1}{2} \\ \text{MÍNIMO ABSOLUTO EN } x &= 2,2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada es una **herramienta para localizar máximos y mínimos**.

- Buscar puntos singulares resolviendo $f'(x) = 0$
- Estudiar crecimiento y decrecimiento en el dominio. Para ello, dibujamos una recta, marcamos los puntos donde falle el dominio y los puntos singulares, y estudiamos el signo de la derivada en cada tramo. Veamos algunos ejemplos resueltos:

Ejemplo 1 explicado: Estudiar la monotonía de $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

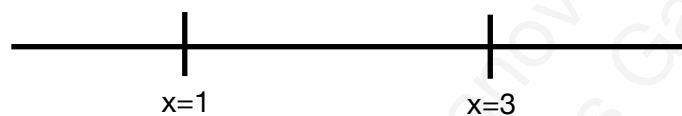
1. El **dominio** de una función polinómica es todo $\mathbb{R}$.

2. Calcular **puntos singulares** ($f'(x)=0$)

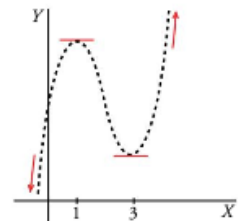
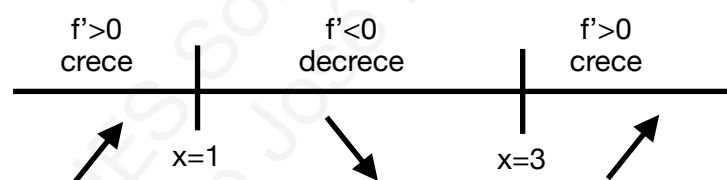
2.a. Derivar la función: $y' = 3x^2 - 12x + 9$. 2.b. Igualar la derivada a cero:

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento como explicamos, en la recta:



Damos valores en los casos $\begin{cases} \text{si } x < 1 & \Rightarrow f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9 = 9 > 0 \Rightarrow f \text{ crece} \\ \text{si } 1 < x < 3 & \Rightarrow f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 < 0 \Rightarrow f \text{ decrece} \\ \text{si } 3 < x & \Rightarrow f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 > 0 \Rightarrow f \text{ crece} \end{cases}$



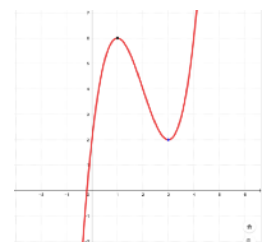
Concluimos que en $x=1$ hay un máximo relativo y en $x=3$ hay un mínimo relativo, e indicamos los intervalos de monotonía:

Intervalos de monotonía: Crecimiento: $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ Decrecimiento: $(1, 3)$

Extremos:

- Máximos: relativos en $x = 1$ ($y = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 2 = 6$)
- Mínimos: relativos en $x = 3$ ($y = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 2 = 2$).

Este estudio prácticamente permite representar gráficamente la función. Lo veremos con detalle más adelante. A la derecha podéis ver como la gráfica queda bastante definida por sus intervalos de monotonía y extremos.



Ejemplo 2: Estudiar la monotonía de $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$

Estudiamos el dominio de la función. Hay asíntotas verticales donde se anula el denominador: $x = 0$ y $x = 2$.

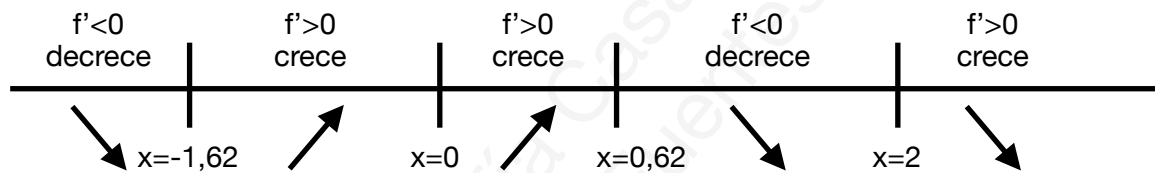
Derivamos la función:

$$y' = \frac{2x(x^2 - 2x) - (x^2 + 1)(2x - 2)}{(x(x - 2))^2} = \frac{2x^3 - 4x^2 - 2x^3 + 2x + 2x^2 + 2}{x^2(x - 2)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 2}{x^2(x - 2)^2} = \frac{2(x^2 - x + 2)}{x^2(x - 2)^2}$$

y calculamos los puntos singulares ($f'(x)=0$):

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - x + 2)}{x^2(x - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1,62 \\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,62 \end{cases}$$

Estudiamos los intervalos de monotonía de la función teniendo en cuenta los puntos singulares y las asíntotas, dando valores intermedios:



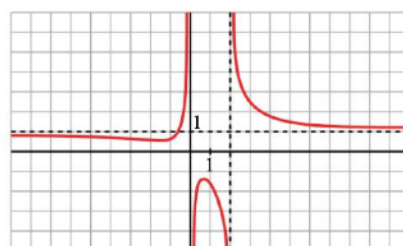
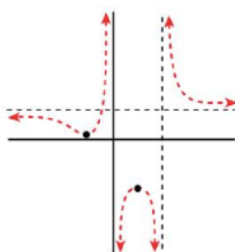
Intervalos de monotonía:

- Crecimiento: $(-1,62, 0) \cup (0, 0,62)$
- Decrecimiento: $(-\infty, -1,62) \cup (0,62, 2) \cup (2, +\infty)$

Extremos:

- Máximos: relativos en $x = 0,62$ ($y = -1,62$)
- Mínimos: relativos en $x = -1,62$ ($y = 0,62$) (valores de y obtenidos con calculadora)

Señalar, para finalizar, que con esta información ya podemos esbozar bastante bien la gráfica completa de esta función (convendría completar con el estudio de las asíntotas verticales y horizontales (los límites)).



5.5. Problemas de optimización: ejemplos resueltos

El objetivo es **encontrar los valores máximos y mínimos en diferentes situaciones** en las que **existe un modelo matemático** subyacente.

Son **problemas muy útiles**, permiten minimizar costes de producción y ahorrar materiales y energía, maximizar beneficios, identificar los picos en distintas situaciones, y solucionar muchos otros problemas. Los pasos para enfrentarse a estos problemas son:

PASOS PARA RESOLVERLOS:

1º. Lo primero es **leer el enunciado e interpretarlo correctamente**.

2º. **Encontrar la función a optimizar**. Unas veces vendrá dada directamente o casi directamente, otras veces exigirá un razonamiento o aplicar fórmulas de geometría o de economía sencillas. Para algunas personas es la parte que más cuesta, por falta de entrenamiento en resolución de problemas.

3º. **Calcular los máximos o los mínimos pedidos** igualando la derivada a 0 y estudiando los intervalos de crecimiento o la curvatura en el punto (C'').

4º. **Responder a lo que se pregunta interpretando adecuadamente la solución matemática**.

Ejemplo 1: Problema de números.

Encontrar dos números que sumen 20 y cuyo producto sea máximo.

Solución detallada:

Llamamos x e y a los dos números. Sabemos que $x + y = 20$ (1)

Tenemos que maximizar su producto. Sería la función:

$$P(x, y) = x \cdot y \quad (2)$$

(se escribe $P(x, y)$ porque de momento usa dos variables, tenemos que conseguir que sea una sola, ya que solo sabemos derivar funciones con una sola variable)

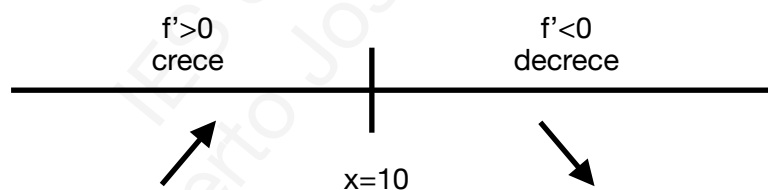
Usando (1), despejamos y : $y = 20 - x$. Sustituimos en (2) y obtenemos la función objetivo: $P(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$, quedando:

$$P(x) = 20x - x^2 \text{ (función a optimizar)}$$

Por lo que sabemos de funciones elementales, se trata de una parábola cóncava que tiene que tener un solo máximo absoluto. Lo **calculamos** a través de la **derivada**:

$$P'(x) = 20 - 2x \quad P'(x) = 0 \iff 20 - 2x = 0 \iff x = 10$$

Aunque sabemos que es un máximo por ser parábola cóncava, en general necesitaremos verlo con los intervalos de crecimiento o decrecimiento (o con f'').



- Por lo tanto, hay un máximo en $x=10$. Calculamos y : $y = 20 - 10 = 10$

Y finalizamos respondiendo que **los dos número buscados son 10 y 10, ambos suman 20 y el producto máximo es $10 \cdot 10 = 100$** .

Ejemplo 2: Problema donde ya nos dan la función objetivo.

El nivel de concentración de un fármaco en sangre viene dado por la función

$C(t) = 2^{-t+2} - 2^{-2t+2}$, siendo t el tiempo en horas. Es necesario saber cuando se produce la concentración máxima para diseñar adecuadamente la posología del fármaco y evitar concentraciones excesivas en el organismo. Calcula cuánto tiempo pasa hasta que la concentración del fármaco alcanza su nivel máximo en la sangre del paciente.

Solución: En este caso ya nos dan la **función objetivo**:

$$C(t) = 2^{-t+2} - 2^{-2t+2}$$

(es irrelevante que la variable sea t y no x , podríamos usar x en vez de t si quisiéramos y no cambiaría nada, pero prefiero acostumbraros a manejar otras letras como variables)

Derivamos y obtenemos puntos singulares:

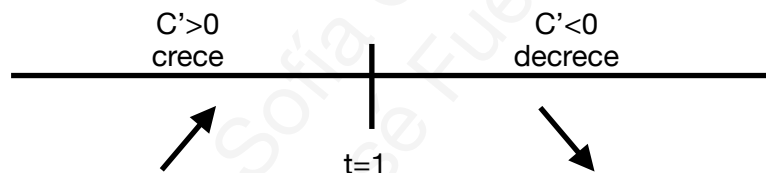
$$\begin{aligned} C'(t) &= 2^{-t+2} \cdot \ln 2 \cdot (-1) - 2^{-2t+2} \cdot \ln 2 \cdot (-2) = \\ &= -2^{-t+2} \cdot \ln 2 + 2 \cdot 2^{-2t+2} \cdot \ln 2 \end{aligned}$$

Iguamos a cero y resolvemos (es una ecuación exponencial, conviene hacer un

cambio $s = 2^{-t}$) hasta llegar a que $C'(t) = 0 \iff t = 1$

(*) (se resuelve en la página siguiente)

Estudiamos los intervalos de monotonía alrededor del punto singular:



Por lo tanto, hay un máximo en $t=1$.

Concluimos respondiendo que **el fármaco alcanza su nivel de concentración máximo en sangre transcurrida una hora desde la inoculación de la dosis.**

(*) Resolución de $C'(t) = 0$:

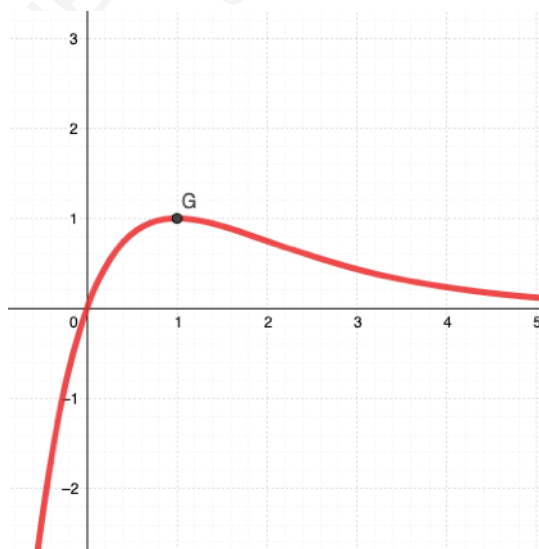
OPCIÓN 1: Agrupando exponentes e igualando potencias de 2:

$$\begin{aligned}
 -2^{-t+2} \cdot \ln 2 + 2 \cdot 2^{-2t+2} \cdot \ln 2 &= 0 && \iff (\text{simplificar } \ln 2) \\
 \iff 2^{-2t+2} = 2^{-t+2} &&& \iff (\text{inyectividad}) \\
 \iff -2t + 3 = -t + 2 &&& \iff \\
 \iff t = 1 &&&
 \end{aligned}$$

OPCIÓN 2: Separando exponentes y con cambio de variable

$$\begin{aligned}
 -2^{-t+2} \cdot \ln 2 + 2 \cdot 2^{-2t+2} \cdot \ln 2 &= 0 && \iff (\text{simplificar } \ln 2) \\
 \iff -2^{-t} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^{-2t+2} &= 0 && \iff (\text{prop. potencias}) \\
 \iff -4 \cdot 2^{-t} + 2 \cdot 2^2 \cdot (2^{-t})^2 &= 0 && \iff (\text{cambio } s = 2^{-t}) \\
 \iff -4s + 8s^2 = 0 \iff s(-4 + 8s) &= 0 && \iff \\
 \iff \begin{cases} s = 0 \text{ imposible solución pues } 2^{-t} \neq 0 \forall t \\ s = \frac{1}{2} \iff 2^{-t} = \frac{1}{2} \implies t = 1 \end{cases} &&&
 \end{aligned}$$

(**) Representación gráfica de la función estudiada:



Ejemplo 5: Problema economía (Beneficio = Ingresos - Costes).

Una cadena de montaje está especializada en la producción de un modelo de motocicleta. Los costes de producción en euros, $C(x)$, se relacionan con el número de motocicletas fabricadas, x mediante la expresión: $C(x) = 10x^2 + 2000x + 250\,000$

Si el precio de venta de cada motocicleta es de 8000 euros y se venden todas las fabricadas, se pide:

- Define la función de ingresos que obtiene la cadena de montaje en función de las unidades vendidas.
- ¿Qué función expresa los beneficios de la cadena?
- ¿Cuántas motocicletas debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán los mismos?

Solución:

Como se venden todas las motocicletas fabricadas, x es el número de motocicletas fabricadas y vendidas.

- La función de ingresos vendrá dada por la expresión: $I(x) = 8000x$

- En estos ejercicios siempre hay que tener en cuenta la relación

Beneficio = Ingresos - Costes, de modo que la **función beneficios** será:

$$B(x) = I(x) - C(x) = -10x^2 + 6000x - 250\,000$$

- Calculamos el máximo mediante la **derivada de B(x)**:

$$B'(x) = -20x + 6000$$

$$\text{Resolvemos } B'(x) = 0 \implies -20x + 6000 = 0 \implies x = 300$$

Sabemos que $B(x)$ es una función cuadrática con $a < 0$, parábola cóncava, así que el punto singular es un máximo absoluto. Se puede asegurar con los intervalos de crecimiento, **o también con la segunda derivada que nos indica la curvatura**: $B''(x) = -20 \implies B''(300) = -20 < 0 \implies$ cóncava, el extremo es máximo (un extremo en región cóncava es necesariamente un máximo, en región convexa necesariamente un mínimo)

$$B(300) = -10 \cdot 300^2 + 6000 \cdot 300 - 250\,000 = 650\,000 \text{ €}$$

Se maximizan beneficios fabricando 300 unidades.

Los beneficios ascienden a 650 000 €.

Ejemplo 6: Problema planteamiento geométrico (aplicado).

Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El pastizal debe tener 180.000 m² para producir suficiente forraje para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de forma que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita ser vallado?

Solución:

Siempre conviene dibujar la situación para analizarla:

y : lado paralelo al río x : lados que llegan al río

Sabemos que el área tiene que ser 180 000 m², luego

$$x \cdot y = 180\,000. \quad (1)$$

Queremos minimizar la cantidad de valla (perímetro): $V(x) = 2x + y$ (2)

Sustituimos (1) en (2) para obtener la **función objetivo**:

$$V(x) = 2x + \frac{180\,000}{x}$$

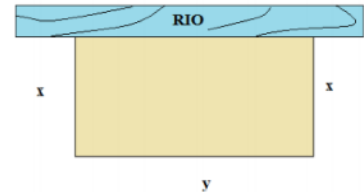
Derivamos: $V'(x) = 2 - \frac{180\,000}{x^2}$ y **calculamos** x en $V'(x) = 0$.

$$0 = 2 - \frac{180\,000}{x^2} \implies x^2 = 90\,000 \implies x = \pm 300$$

No tiene sentido la solución negativa, así que queda

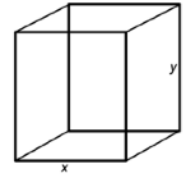
$$x = 300, y = \frac{180\,000}{300} = 600$$

El terreno tendrá que tener unas dimensiones de 600 m en el lado paralelo al río y 300 m en los lados que llegan al río, y se usarán 1200 m de valla.



Ejemplo 7: Problema planteamiento geométrico (aplicado a costes)

ABAU Xuño 2017. Deséxase construír unha caixa de base cadrada, con tapa e cunha capacidade de 80 dm^3 . Para a tapa e a superficie lateral quérese utilizar un material que custa 2 €/dm^2 e para a base outro que custa 3 €/dm^2 . Calcula as dimensións da caixa para que o seu custo sexa mínimo.

Solución:

Dibujamos la caja: x : lado de la base y : altura.

El volumen 80 dm^3 es la multiplicación de las tres dimensiones de la caja: $80 = x^2 \cdot y$

Despejamos y : $y = \frac{80}{x^2}$ (*)

Tenemos que calcular el coste mínimo. Para ello analizamos el problema:

$$\begin{aligned} \cdot 2 \text{ €/dm}^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Superficie lateral: } 4 \cdot xy \\ \text{Superficie tapa: } x^2 \end{array} \right\} &\Rightarrow \text{cuesta: } 2 \cdot (4xy + x^2) = 8xy + 2x^2 \\ \cdot 3 \text{ €/dm}^2 \left\{ \text{Superficie base: } x^2 \right\} &\Rightarrow \text{cuesta: } 3x^2 \end{aligned}$$

La función coste será, sumando ambas: $C(x, y) = 5x^2 + 8xy$ (**)

Sustituyendo (*) en. (**) obtenemos la **función objetivo**:

$$C(x) = 5x^2 + 8x \frac{80}{x^2} \Rightarrow C(x) = 5x^2 + \frac{640}{x}$$

Derivamos: $C'(x) = 10x - \frac{640}{x^2}$ y resolvemos $C'(x) = 0$

Obtenemos $x = \sqrt[3]{64} = 4$ y comprobamos que se trata de un mínimo con los intervalos de monotonía o con la segunda derivada:

$$C''(x) = 10 + \frac{1280}{x^3} \Rightarrow C''(4) > 0 \Rightarrow \text{convexa en 4, es un mínimo}$$

Por lo tanto, **las dimensiones para coste mínimo son 4 dm de base y 5 dm de altura.**

5.6. Representación gráfica de funciones

ASPECTOS A ESTUDIAR:

1. Dominio - dónde está definida la función (valores de x sobre los que hay gráfica)

El dominio de una función son los valores de x para los que está definida esa función. El dominio se puede restringir, como ya vimos:

- Indicándolo en un enunciado,
- Por el contexto real de un modelo matemático
- **Por expresiones matemáticas en las que x no pueda tomar algún valor (dividir por cero, raíz par de expresiones negativas, o logaritmos de expresiones que puedan dar cero o negativo).** En los demás casos, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

•

Ejemplos:

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 5} \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1, 5\}$$

$$f_2(x) = \sqrt{2x - 6} \implies 2x - 6 \geq 0 \implies 2x \geq 6 \implies x \geq 3 \implies \text{Dom}(f) = [3, +\infty)$$

$$f_3(x) = \log_5(2x + 4) \implies 2x + 4 > 0 \implies x > -2 \implies \text{Dom}(f) = (-2, +\infty)$$

$$f_4(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-9} \implies \text{Dom}(f) = (1, +\infty) - \{-3, 3\} = (1, 3) \cup (3, +\infty)$$

2. Simetrías - cambiamos todas las x por -x y comprobamos.

La simetría nos da mucha información sobre la gráfica de la función, y detectar errores si los demás cálculos no cuadran con la simetría estudiada (dominio, asíntotas, máx/mín...)

$$f(-x) = f(x)$$

Simetría PAR - EJE OY

$$f(-x) = -f(x)$$

Simetría IMPAR - Origen (0,0)

$$f(-x) \neq f(x) \text{ y } f(-x) \neq -f(x) \text{ NO SIMÉTRICA}$$

Ejemplos:

$$f(x) = x^2$$



$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

PAR - EJE OY

$$f(x) = x^3$$



$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

IMPAR - ORIGEN

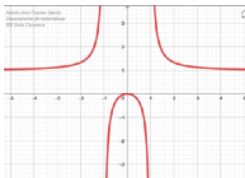
$$f(x) = x^2 + x$$



$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$$

NO SIMÉTRICA

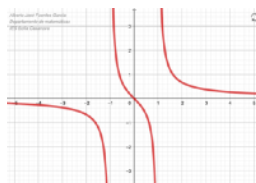
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$



$$f(-x) = f(x)$$

PAR - EJE OY

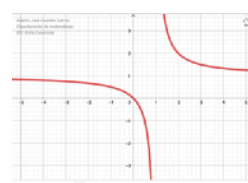
$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$



$$f(-x) = -f(x)$$

IMPAR - ORIGEN

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$$



$$f(-x) \neq f(x) \vee f(-x) \neq -f(x)$$

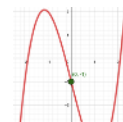
NO SIMÉTRICA

3. Cortes con los ejes

EJE OY: Hacemos $x=0$ y obtenemos $f(0)$. Punto de corte con el eje OY es $(0, f(0))$

Ejemplo:

$$f(x) = x^3 - 4x - 1 \implies f(0) = -1 \implies \text{CORTE EN } (0, -1)$$



EJE OX: Hacemos $y=f(x)=0$ y resolvemos la ecuación para saber los valores de x

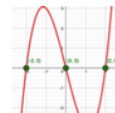
$(x_0, 0), (x_1, 0) \dots$ Si es simétrica, comprobamos que la simetría cuadra con lo calculado.

Ejemplo:

$$f(x) = x^3 - 4x \implies f(x) = 0 \implies$$

$$\implies 0 = x^3 - 4x = x(x+2)(x-2) \implies$$

$$\implies x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 2 \implies (-2, 0), (0, 0), (2, 0) \text{ CORTES}$$



4. Asíntotas (verticales, horizontales, oblicuas)

Haya o no, su estudio nos da información sobre como se comporta la función para poder dibujarla (ya casi permiten dibujar la gráfica en muchos casos).

Tiene que ser coherente con la simetría estudiada.

HORIZONTALES: Calculamos $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Si es un valor concreto L, la función tendrá una asíntota horizontal en $y=L$.

Si es infinito, sabemos como se comporta la función cuando x se aleja.

VERTICALES: Calculamos **límites laterales** $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

en puntos $x = a$ donde falla el dominio.

El resultado, en general, $-\infty$ o $+\infty$, aunque podría dar un valor concreto.

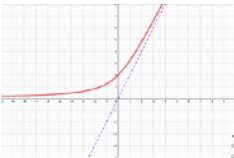
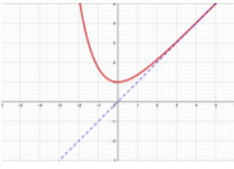
¡CUIDADO CON LOS SIGNOS!

OBLICUAS: Recta $y = mx + n$ donde

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (\text{si no es un número, ya no existe asíntota oblicua})$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$$

Función	Dominio	A.H.	A.V	A.O.	Gráfica
$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$	$\mathbb{R} - \{-2, 2\}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ $y = 0$	$x = -2 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$ $x = 2 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$	NO (horizontal por ambos lados)	
$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$	$\mathbb{R} - \{-2, 2\}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ $y = 0$	$x = -2 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty \end{cases}$ $x = 2 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}$	NO (horizontal por ambos lados)	
$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$	$\mathbb{R} - \{-2, 2\}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ $y = 1$	$x = -2 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty \end{cases}$ $x = 2 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{cases}$	NO (horizontal por ambos lados)	
$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$	$\mathbb{R} - \{-2, 2\}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ NO HAY	$x = -2 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{-8}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{-8}{0^-} = +\infty \end{cases}$ $x = 2 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty \end{cases}$	$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = 0$ $y = x$	

Función	Dominio	A.H.	A.V	A.O.	Gráfica
$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4}$	$\mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $y = 0$ (solo $-\infty$)	NO	$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ (en -inf da 0, no hay) $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = 0$ $y = 2x$	
$f(x) = x + e^{-x}$	$\mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$	NO	$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ (en -inf da +inf, no hay) $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ $y = x$	

5. Intervalos de crecimiento y decrecimiento (monotonía) 6. Máximos y mínimos

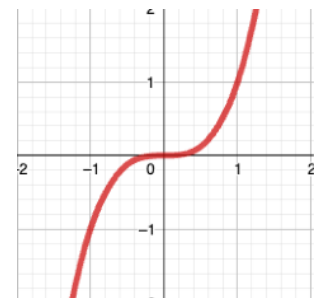
IGUAL QUE OPTIMIZACIÓN: epígrafes 5.5. y 5.6 ya vistos. Derivamos la función e igualamos a cero para obtener los puntos críticos. Sobre la recta real, marcamos los puntos donde falla el dominio y los puntos críticos recién obtenidos y comprobamos el signo de la derivada, igual que en problemas de optimización, para conocer los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Así ya quedan también definidos los máximos y mínimos.

7. Intervalos de concavidad y convexidad (curvatura)* 8. Puntos de inflexión

*Solo se estudian cuando se pide.

Igual que los intervalos de crecimiento y decrecimiento, pero con la segunda derivada ($f'' = 0$ y signos de f'' en los intervalos).

Un **punto de inflexión** es aquel en el que hay **cambio de cóncava a convexa o de convexa a cóncava** (candidatos aquellos en los que $f'' = 0$)



PUNTO DE INFLEXIÓN
CÓNCARO-CONVEXO EN
 $x = 0$

Para recordar:

$$y = x^2 \implies y'' = 2 > 0$$



CONVEXA $\cup$ si $f'' > 0$

$$y = -x^2 \implies y'' = -2 < 0$$



CÓNCARO $\cap$ si $f'' < 0$

9* Periodicidad (solo en funciones trigonométricas)

Seno o coseno periódicas de periodo $T = 2\pi$, tangente de período $T = \pi$, y otras trigonométricas.

TEMA 7b - EJERCICIOS INICIACIÓN: LÍMITES Y DERIVADAS.

Límites, derivadas y aplicaciones.

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Ejercicio 1. LÍMITES $n \rightarrow \infty$ sin L'Hopital: (sin exponenciales)**Polinómicos:**Sol: $-\infty$

1.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - n^3 + 3n^2)$

Racionales:Sol: $0, -\infty, \frac{-1}{2}, +\infty, 9$

1.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n + 2}{4n^4 - 5}$

1.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^4 - 3n + 2}{4n^3 - 5}$

1.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^4 - 3n + 2}{4n^4 - 5}$

1.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)^2 - 3n^2 + 3}{n^3 - 5}$

1.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2 + 4n)^2(n^3 - 3)^2(2n - 7)}{(n + 2)^3(n^3 - 3n)^2(2n^2 - 17)}$ (*no hacer todo el cálculo, razonar)

Estrategia similar a racionales:Sol: $\frac{7\sqrt[3]{25}}{5}, 2, 3$

1.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n - 1}{\sqrt[3]{5n^3 + 4n - 2}}$

1.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^4 + n^2 + 1}}{n^2 + 1}$

1.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$

Indeterminación $\infty - \infty$ Sol: $-\infty, -1, \frac{-1}{2}, 1$

1.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n - 6}{n + 2}$

1.11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n - 1} - \frac{n^2 + 1}{n - 2} \right)$

1.12. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2} - \sqrt{n^2 + n})$

1.13. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + n})$

Indeterminación $\infty \cdot 0$ o $\frac{0}{0}$ Sol: $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, 0$

1.14. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 7) \cdot \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 3}}$

1.15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{4n^2 + 5}}}{\frac{1}{n - 1}}$

1.16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{18n^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{32n^2 - 3}} \right)$

1.17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 + 2}{7}}{\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}}$

Ejercicio 2. LÍMITES $n \rightarrow \infty$: (exponenciales)**“Cebos” (no son número e):** Sol: $+\infty, 0, 0, 0, +\infty, 1, +\infty, 0$

2.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n+1} \right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}}$

2.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n+1} \right)^{\frac{-3n^2+2}{5n-3}}$

2.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n+1} \right)^{\frac{-3n^2+2}{5n^2-3}}$

2.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n^3+1} \right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}}$

2.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n^3+1} \right)^{\frac{-3n^2+2}{5n-3}}$

2.6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n^2+1} \right)^{\frac{-3n+2}{5n^2-3}}$

2.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n^2+1} \right)^{\frac{-3n^2+2}{5n-3}}$

2.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n^2+1} \right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}}$

Tipo número e: Sol: $e, e^{-\frac{2}{3}}, e^{-\frac{3}{2}},$

2.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^{n-1}$

2.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3n} \right)^n$

2.11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n+4} \right)^{\frac{n^2}{n+1}}$

Ejercicio 3. LÍMITES $n \rightarrow \infty$: (repaso de todo tipo) sol: a) $1/2$, b) e^3 , c) $\sqrt{e}$, d) -1 , e) $\sqrt{2}$, f) 0 , g) 3

3.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-n} \right)$

3.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-1} \right)^{\frac{n^2}{n+1}}$

3.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+4}{2n-1} \right)^{\frac{n+1}{5}}$

3.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2-1}{n} \right)$

3.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+5) \sqrt{\frac{n}{2n^3-1}}$

3.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{3n+1} \right)^{-\frac{2n}{3}}$

3.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{n+1}$

Ejercicio 4. INICIACIÓN DERIVADAS.

Del 1 al 20 muy básicas. Se presenta la función como $y = f(x)$ y la solución y'

1. $y = 3$	$y' = 0$	27. $y = \sqrt{2x-1}$	$y' = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$
2. $y = x + 5$	$y' = 1$	28. $y = \sqrt{x^2+1}$	$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
3. $y = x^7$	$y' = 7x^6$	29. $y = \frac{1-x}{\sqrt{1+x}}$	$y' = \frac{-x-3}{2(1+x)\sqrt{1+x}}$
4. $y = x^6 - x^3$	$y' = 6x^5 - 3x^2$	29* $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	$y' = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$
5. $y = 2x^4$	$y' = 8x^3$	30. $y = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$	$y' = \frac{1}{(-1+x)\sqrt{1-x^2}}$
6. $y = ax + b$	$y' = a$	31. $y = e^{4x}$	$y' = 4e^{4x}$
7. $y = 5x - 2$	$y' = 5$	32. $y = 5^{2x}$	$y' = 2 \cdot 5^{2x} \ln 5$
8. $y = a^5$	$y' = 0$	33. $y = e^{3-x^2}$	$y' = -2xe^{3-x^2}$
9. $y = ax^2 + bx + c$	$y' = 2ax + b$	34. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
10. $y = x(x-1)$	$y' = 2x - 1$	35. $y = x^3 \cdot 2^x \cdot e^x$	$y' = x^2 \cdot 2^x \cdot e^x (3 + x \ln 2 + x)$
11. $y = (x+1)(x-1)$	$y' = 2x$	36. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$y' = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$
12. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$y' = 3ax^2 + 2bx + c$	37. $y = a^{x^2+x+1}$	$y' = (2x+1)a^{x^2+x+1} \ln a$
13. $y = x^3 - x^2 + 4x - 5$	$y' = 3x^2 - 2x + 4$	38. $y = \ln(x^2+1)$	$y' = \frac{2x}{x^2+1}$
14. $y = x^4 - 4x^3 + 5x^2$	$y' = 4x^3 - 12x^2 + 10x$	39. $y = \ln(ax^2 + bx + c)$	$y' = \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$
15. $y = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 5$	$y' = 6x^2 + 6x - 6$	40. $y = \ln 5^{3x}$	$y' = 3 \ln 5$
16. $y = (x+1)(x^2 - x + 3)$	$y' = 3x^2 + 2$	41. $y = x^5 \ln x$	$y' = x^4(5 \ln x + 1)$
17. $y = x(x-1)^2$	$y' = 3x^2 - 4x + 1$	42. $y = x^2 \ln(2-x)$	$y' = x \left(2 \ln(2-x) - \frac{x}{2-x} \right)$
18. $y = a(x-1)^2$	$y' = 2a(x-1)$	43. $y = \frac{\ln x}{x}$	$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$
19. $y = a(a-1)^2$	$y' = 0$	44. $y = \log_3(1+x^2)$	$y' = \frac{2x}{1+x^2} \log_3 e$
20. $y = -x^{-2}$	$y' = \frac{2}{x^3}$	45. $y = \ln(x-5)$	$y' = \frac{1}{x-5}$
21. $y = \frac{1}{x+1}$	$y' = \frac{-1}{(x+1)^2}$	46. $y = \log_a(3x^2+5)$	$y' = \frac{6x}{3x^2+5} \log_a e$
22. $y = \frac{x^2-3}{x^3+x}$	$y' = \frac{-x^4+10x^2+3}{(x^3+x)^2}$	47. $y = x \cdot \ln x - x$	$y' = \ln x$
23. $y = \frac{x+1}{x}$	$y' = \frac{-1}{x^2}$	48. $y = \ln \sqrt{1+x^2}$	$y' = \frac{x}{1+x^2}$
24. $y = \frac{x(x+1)(x-1)}{3x^2-3}$	$y' = \frac{1}{3}$		
25. $y = \frac{x(x+2)^2}{x^2+4x+4}$	$y' = 1$		
26. $y = \sqrt{3x-2}$	$y' = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$		

Ejercicio 5. DERIVADAS.

49. $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ $y' = \frac{-1}{1-x^2}$
50. $y = \ln \frac{x^2+1}{x^2-1}$ $y' = \frac{-4x}{x^4-1}$
51. $y = \sin 2x$ $y' = 2 \cos 2x$
52. $y = \cos(2x+1)$ $y' = -2 \sin(2x+1)$
53. $y = \tan(x^2+x+1)$ $y' = (2x+1) \sec^2(x^2+x+1)$
54. $y = \tan \sqrt{x}$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sec^2 \sqrt{x}$
55. $y = \sqrt{\sin 3x}$ $y' = \frac{3 \cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$
56. $y = \sin^{2/3} x$ $y' = \frac{2}{3} \sin^{-1/3} x \cdot \cos x = \frac{2 \cos x}{3\sqrt[3]{\sin x}}$
57. $y = x \cos x$ $y' = \cos x - x \sin x$
58. $y = \ln \sin x$ $y' = \cot x$
59. $y = \sin x \cdot \cos 2x$ $y' = \cos x \cos 2x - 2 \sin x \sin 2x$
60. $y = e^x \tan x$ $y' = e^x(\tan x + \sec^2 x) = e^x(\tan x + \tan x + 1)$
61. $y = \arcsin 2x$ $y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$
62. $y = \arcsin \sqrt{x}$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$
63. $y = \arccos(x^2+1)$ $y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}}$
64. $y = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x$ $y' = \tan^2 x \sec^2 x - \sec^2 x + 1$
65. $y = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ $y' = \frac{1}{1+x^2}$
66. $y = \ln \left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x} \right)^2$ $y' = \frac{-4(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^3}$
67. $y = \ln \tan x$ $y' = \frac{1}{\sin x \cos x}$
78. $y = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ $y' = -1/\sin x$
69. $y = \ln \sqrt{\sin x}$ $y' = \cot 2x$

$$\begin{aligned}
70. \quad y &= \operatorname{arcsec} x^2 & y' &= \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}} \\
71. \quad y &= \arctan(2x+1) & y' &= \frac{-2}{(2x+1)^2+1} \\
72. \quad y &= \sin(\sin 2x) & y' &= 2 \cos 2x \cdot \cos(\sin 2x) \\
73. \quad y &= \sin(\ln(3x+5)) & y' &= \frac{3}{3x+5} \cos(\ln(3x+5)) \\
74. \quad y &= \arcsin(\cos x - x) & y' &= \frac{-\sin x - 1}{\sqrt{1-(\cos x - x)^2}} \\
75. \quad y &= \ln(x + \ln x) & y' &= \frac{x+1}{x^2 + x \ln x} \\
76. \quad y &= \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) & y' &= \frac{-2}{(1+x^2)^2 \sqrt{x^2+2}} \\
77. \quad y &= \log\left(\frac{\log x}{x}\right) & y' &= \frac{\log e - \log x}{x \log x} \log e \\
78. \quad y &= \ln^{1/2} \sin 2x & y' &= \frac{\operatorname{ctan} 2x}{\sqrt{\ln \sin 2x}} \\
79. \quad y &= x^2 \cos 3x & y' &= 2x \cos 3x - 3x^2 \sin 3x
\end{aligned}$$

Ejercicio 6. DERIVADAS POTENCIAL - EXPONENCIAL.

$$\begin{aligned}
80. \quad y &= x^{x+1} & y' &= \left[\ln x + \frac{x+1}{x} \right] x^{x+1} \\
81. \quad y &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x & y' &= \left[\ln(x+1) - \frac{1}{x-1} \right] \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \\
82. \quad y &= (x^5)^{x^2+1} & y' &= \left[\frac{10x \ln x + \frac{5x^2+5}{x}}{x^5} \right] (x^5)^{x^2+1} \\
83. \quad y &= x^{e^x} & y' &= \left[e^x \ln x + \frac{e^x}{x} \right] x^{e^x} \\
84. \quad y &= (3x+1)^{2x+3} & y' &= \left[2 \ln(3x+1) + \frac{6x+9}{3x+1} \right] (3x+1)^{2x+3} \\
85. \quad y &= (\sin x)^x & y' &= [\ln(\sin x) + x \operatorname{ctan} x] (\sin x)^x \\
86. \quad y &= x^{\sin(2x-9)} & y' &= \left[2 \cos(2x-9) \ln x + \frac{\sin(2x-9)}{x} \right] x^{\sin(2x-9)} \\
87. \quad y &= (\sin x)^{\cos x} & y' &= [-\sin x \ln(\sin x) + \cos x \operatorname{ctan} x] (\sin x)^{\cos x} \\
88. \quad y &= (\ln x)^{\ln x} & y' &= \frac{1}{x} [\ln(\ln x) + 1] (\ln x)^{\ln x} \\
89. \quad y &= (x^2-1)^{\sin x} & y' &= \left[\cos x \ln(x^2-1) + \frac{2x \sin x}{x^2-1} \right] (x^2-1)^{\sin x}
\end{aligned}$$

TEMA 7b - EJERCICIOS PREPARACIÓN EXAMEN: LÍMITES Y DERIVADAS.

Límites, derivadas y aplicaciones.

Ejercicio 1. DERIVADAS. Calcula las derivadas simplificando cuando proceda:

$$\begin{array}{llll}
 a) f_1(x) = \arctan \frac{x^2+1}{x^2-1} & b) f_2(x) = 5^{\cos \frac{1}{x^4}} & c) f_3(x) = \frac{e^{x^2}}{\sqrt[3]{x}} & d) f_4(x) = 2x \cdot \ln \sqrt{\frac{x^2}{1-x}} \\
 e) f_5(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} & f) f_6(x) = 2^{\cos \frac{1}{x^2}} & g) f_7(x) = \frac{e^x}{\sin^2 x} & h) f_8(x) = \arctan \sqrt{x^2-1} \\
 i) f_9(x) = 5^{\sin(\tan x)} & j) f_{10}(x) = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} & k) f_{11}(x) = \ln(\sin \sqrt[3]{x}) & l) f_{12}(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \tan x \\
 m) f_{13}(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} & n) f_{14}(x) = \ln(\sin(\frac{1}{x})) & o) f_{15}(x) = \frac{2e^{x^2}}{\sqrt{x}} & p) f_{16}(x) = 2^x \cdot \arcsin x \\
 q) f_{17}(x) = \ln \sqrt{\frac{2x}{x+1}} & r) f_{18}(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} & s) f_{19}(x) = 5^{\cos \frac{1}{x^2}} & t) f_{20}(x) = e^{-x^2} \cdot \sqrt[3]{2x} \\
 u) f_{21}(x) = \arctan \frac{x}{x+2} & v) f_{22}(x) = \ln(\cos \frac{1}{x}) & w) f_{23}(x) = e^{x^2} \cdot \sqrt{x}
 \end{array}$$

SOLUCIONES:

$$\begin{array}{llll}
 a) f'_1(x) = \frac{-2x}{x^4+1} & b) f'_2(x) = \frac{4 \ln 5 \cdot 5^{\cos \frac{1}{x^4}} \sin \frac{1}{x^4}}{x^5} & c) f'_3(x) = \frac{e^{x^2}(6x^2-1)}{3x\sqrt[3]{x}} & d) f'_4(x) = \ln \frac{x^2}{1-x} + \frac{2-x}{1-x} \\
 e) f'_5(x) = \frac{-2x}{x^4-1} & f) f'_6(x) = \frac{2 \ln 2 \cdot 2^{\cos \frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x^2}}{x^3} & g) f'_7(x) = \frac{e^x(\sin x - 2 \cos x)}{\sin^3 x} & h) f'_8(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \\
 i) f'_9(x) = \ln 5 \cdot 5^{\sin(\tan x)} \cdot \cos \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} & j) f'_{10}(x) = \frac{1}{x-1} & k) f'_{11}(x) = \frac{\sqrt[3]{x} \cos \sqrt[3]{x}}{3x} = \frac{\cot \sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2} \sin \sqrt[3]{x}} & l) f'_{12}(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\tan x}{x^2} \right) \\
 m) f'_{13}(x) = \frac{1}{1+x^2} & n) f'_{14}(x) = \frac{-\cot \frac{1}{x}}{x^2} & o) f'_{15}(x) = \frac{e^{x^2}(4x^2-1)}{x\sqrt{x}} & p) f'_{16}(x) = 2^x \ln 2 \cdot \arcsin x + \frac{2^x}{\sqrt{1-x^2}} \\
 q) f'_{17}(x) = \frac{1}{2x(x+1)} & r) f'_{18}(x) = \frac{2x}{1-x^4} & s) f'_{19}(x) = \frac{2 \ln 5 \cdot 5^{\cos \frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x^2}}{x^3} & t) f'_{20}(x) = 2e^{-x^2} \left(\frac{1-6x^2}{3\sqrt[3]{4x^2}} \right) \\
 u) f'_{21}(x) = \frac{1}{x^2+2x+2} & v) f'_{22}(x) = \frac{\tan \frac{1}{x}}{x^2} & w) f'_{23}(x) = e^{x^2} \left(\frac{4x^2+1}{2\sqrt{x}} \right)
 \end{array}$$

Ejercicio 2. CÁLCULO DE LÍMITES.

$$\begin{array}{lll}
 a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - e^x} = 0 & b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \ln x}{x^3 + x^2} = 1/2 & c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\tan(x^2 - 1)}{\ln(x^4)} = 1/2 \\
 d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{2x^3 - 5x + 4} = 2 & e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1} = 0 & f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x + x^2}{2x^2} = \text{inf} \\
 g) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 4} = -3/5 & h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^3 + x^2 - 5x + 10} = 1/2 & i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{e^x} = 1 \\
 j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = 1/6 & k) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{\tan(x - 1)} = 4 & l) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2x + 1}{x^3 + x^2 - 5x + 10} = 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{m) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = 1/2 & \text{n) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 1} \right) = 1 \quad \text{ñ) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} = e \\
\text{o) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} \right)^{\frac{-x^2}{2x+1}} = 0 & \text{p) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{x} - \frac{x^2}{x-1} \right) = -3 \\
\text{q) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 6x} \right) = 3 & \text{r) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 + 5} \right) = -2 \\
\text{s) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 3x} \right) = 3/2 & \text{t) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{\frac{x^2-1}{x}} = e^{-3} \\
\text{u) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{2x+1} \right)^{\frac{x^2-1}{2x}} = 0 & \text{v) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1}}{x-3} = -2 \\
\text{w) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^{\frac{x^2}{x+1}} = e^{-\frac{1}{2}} & \text{x) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{\frac{x^2+2}{x}} = e^{-3}
\end{array}$$

Ejercicio 3. ESTUDIO DE CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD.

3.1. Calcula a y b para que $f(x) = \begin{cases} -x^2 + bx & \text{si } x \leq 2 \\ -x + c & \text{si } x > 2 \end{cases}$ sea continua y derivable en $x=2$.

$$b = 3, \quad c = 4$$

3.2. Calcula a y b para que $f(x) = \begin{cases} a + \ln x & \text{si } 0 < x \leq e \\ bx & \text{si } x > e \end{cases}$ sea continua y derivable en $(0, +\infty)$.

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{e}$$

3.3. Calcula a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + bx + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 - 5x + 2a & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3a - 5 = b \\ 2a - 3 = b \end{cases} \quad \text{sols : } a = 2, b = 1$$

3.4. Calcula a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + 3 = b \\ 4a - 1 = -b \end{cases} \quad \text{sols : } a = 2, b = -7$$

3.5. Calcula a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \quad \text{sols : } a = 1, b = 0$$

3.6. Calcula a para que $f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 0 \\ 1 + xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea continua en $x=0$ y estudiar la derivabilidad.

$$a = 1, \text{ no derivable}$$

Ejercicio 4. RECTA TANGENTE Y NORMAL.

4.1. Dada la parábola $y = 4 - x^2$, representa la parábola y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$

$$y = -2x + 5$$

4.2. Dibuja la gráfica de la parábola $y = \frac{x^2}{2} + 1$ y su recta normal en el punto de abscisa $x = 1$. (Nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad).

$$y = -x + \frac{3}{2}$$

4.3. Dada la función $f(x) = \frac{2x}{x-1}$:

$$\text{b) } y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

a) Calcula los puntos, en el que las tangentes a la función son paralelas a la recta de ecuación: $r : x + 2y - 4 = 0$

$$(3,3), (-1,1)$$

b) Obtén las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.

4.4. Dada la función $f(x) = \frac{2x}{x-1}$:

$$\text{b) } y = -2x + 8 \text{ e } y = -2x$$

a) Calcula los puntos, en el que las tangentes a la función son paralelas a la recta de ecuación: $r : 2x + y = 0$

$$(2,4), (0,0)$$

b) Obtén las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.

4.5. Dada la función $f(x) = x^2 + 5x - 6$, calcula el punto en el que la tangente a la función es paralela a la recta de ecuación: $r : 2x - 2y - 5 = 0$ y obtén esa tangente.

$$(2,0) \text{ e } y = x - 2$$

4.6. Calcula la recta tangente a la función $y = \sqrt{2x - 1}$ en el punto en que dicha recta sea paralela a recta $y = \frac{1}{3}x - 2$. $(5,3)$ y $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

4.7. Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ en su punto de inflexión. $(-1,1)$ e $y = -3x - 2$

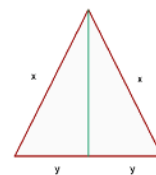
4.8. Calcula la recta tangente y normal a la función $y = \ln(x + 2)$ en el punto en que dicha recta sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante. $(-1,0)$ e $y = x + 1$; $y = -x - 1$

4.9. Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{1}{|x - 1|}$ en el punto en el que sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante. $(0,1)$ e $y = x + 1$

4.10. Dada la función $f(x) = 2 \cos(x) + |x - 1|$, calcula $f'(0)$, y obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$. $f'(0) = -1$ ($\pi, \pi - 3$) $y = x - 3$

Ejercicio 5. OPTIMIZACIÓN

5.1. De todos los triángulos isósceles de 12 m de perímetro, hallar los lados del que tome área máxima. (4m de lado)



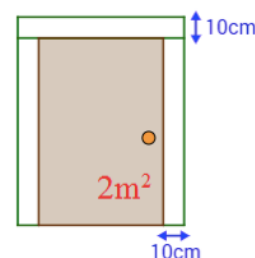
5.2. Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones un cuadrado de lado 80 m x 50 m, y doblando convenientemente (véase figura), se construye una caja. Calcular x para que el volumen de dicha caja sea máximo. $(x=10)$



5.3. Una hoja de papel debe tener 18 cm² de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtener razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie del papel. $(x=5)$

5.4. Descomponer el número 44 en dos sumandos tales que el quíntuplo del cuadrado del primero menos el séxtuplo del cuadrado del segundo sea un mínimo. $(24 \text{ y } 20)$

5.5. Un alambre de 170 cm de longitud se divide en dos partes. Con una, se quiere formar un cuadrado y con la otra un rectángulo de forma que la base mida el doble que la altura. Calcula las longitudes de las partes en las que se tiene que dividir el alambre para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima. $(80\text{C } 90\text{R})$



5.6. Una empresa de fabricación de puertas de madera utiliza un tablón rectangular para la hoja y tres listones de 10cm de ancho para el marco (lados laterales y lado superior). El precio del tablón es de 128 € por metro cuadrado y el de los listones es de 87 € por metro lineal. Calcular las dimensiones de una puerta de 2 m² de superficie de hoja para que el coste sea mínimo. ¿Cuál será su precio? $(2 \text{ m ancho } \times 1 \text{ m largo})$

5.7. Considera la función $f(x) = 3 - x^2$ y un punto de su gráfica, M, situado en el primer cuadrante ($x \leq 0$, $y \leq 0$). Si por el punto M se trazan paralelas a los ejes de coordenadas, su intersección con OX y OY determina dos puntos, A y B, respectivamente.

- Haz una gráfica de los elementos del problema.
- Halla las coordenadas del punto M que hace que el rectángulo OAMB tenga área máxima.

(1,2)

5.8. Se desea construir una caja con forma de paralelepípedo rectangular de 9 litros de volumen y tal que un lado de la base sea doble que el otro. Determinar las longitudes de sus lados para que el área total de sus 6 caras sea mínima.

- Obtén la función $S(x)$ (superficie total de la caja en función del lado menor de la base).
- Obtén el valor mínimo de la función $S(x)$
- Indica las dimensiones que minimizan el coste de construcción de la caja.)
- Indica cuál será la superficie de la caja con esas dimensiones.

$$S(x) = 4x^2 + \frac{27}{x} \Rightarrow S'(x) = 8x - \frac{27}{x^2}, x = 3/2 = 1'5 \text{ dm}, 1'5x3x2 \text{ dm}, 27 \text{ dm}^2$$

5.9. Se quiere construir un depósito de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para $13,5 \text{ m}^3$, sin cubierta superior. El material será una chapa de grosor uniforme. El objetivo es calcular las dimensiones del depósito para que el gasto sea el menor posible.

- Obtén la función $S(x)$ (superficie de chapa necesaria para la construcción del depósito en función del lado de la base).
- Obtén los máximos o mínimos necesarios de la función $S(x)$.
- Calcula las dimensiones que minimizan el coste de construcción del depósito.
- Calcula el precio del depósito si la chapa cuesta 15 €/m^2 .

$$S(x) = x^2 + \frac{54}{x} \Rightarrow S'(x) = 2x - \frac{54}{x^2}, 3x3x1'5 \text{ m} \Rightarrow 27 \text{ m}^2, 405\text{€}$$

5.10. Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie de modo que sea lo más barato posible. Los tramos horizontales del marco cuestan $2,5 \text{ €/m}$ y los tramos verticales 3 €/m .

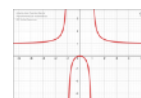
- Obtén la función $C(x)$ (coste del marco en función de la longitud de la base).
- Obtén el valor mínimo de la función $C(x)$
- Indica las dimensiones que minimizan el coste de construcción del marco.
- Indica cuál será el coste del marco con esas dimensiones.

$$C(x) = 5x + \frac{36}{x} \Rightarrow S'(x) = 5 - \frac{36}{x^2}, \frac{6\sqrt{5}}{5}x\sqrt{5} = 2'68x2'24\text{m}, 12\sqrt{5} = 26,83\text{€}$$

Ejercicio 6. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

6.1. Realiza una representación gráfica de la siguiente función estudiando las características básicas necesarias que se indican en el resumen de puntuación:

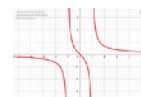
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$



(reparto de puntuación: dominio/continuidad (0,25), simetría (0,5), periodicidad (0,25) puntos de corte (0,5), asíntotas (0,75), monotonía, máximos y mínimos (0,75), representación gráfica 0,75)

6.2. Realiza una representación gráfica de la siguiente función estudiando las características básicas necesarias que se indican en el resumen de puntuación:

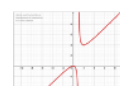
$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$



(reparto de puntuación: dominio, simetría y puntos de corte (0,2), asíntotas (0,35), monotonía, máximos y mínimos (0,35), representación gráfica 0,35)

6.3. Realiza una representación gráfica de la siguiente función estudiando las características básicas necesarias que se indican en el resumen de puntuación:

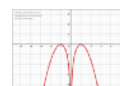
$$f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$$



(reparto de puntuación: dominio/continuidad (0,25), simetría (0,5), periodicidad (0,25) puntos de corte (0,5), asíntotas (0,75), monotonía, máximos y mínimos (0,75), representación gráfica 0,75)

6.4 Realiza una representación gráfica de la siguiente función estudiando las características básicas necesarias que se indican en el resumen de puntuación:

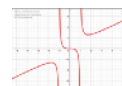
$$f(x) = 1 - x^2 + \ln x^2$$



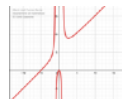
(reparto de puntuación: dominio/continuidad (0,25), simetría (0,5), periodicidad (0,25) puntos de corte (0,25), asíntotas (0,75), monotonía, máximos y mínimos (0,5), curvatura/puntos de inflexión (0,5), representación gráfica 0,75)

6.5. Dibuja la gráfica de $f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 2}$ estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte

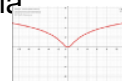
con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos.



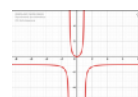
6.6. Halla la asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1}$



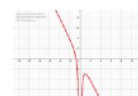
6.7. Representa gráficamente la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$ calculando dominio, simetría, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, curvatura y puntos de inflexión.



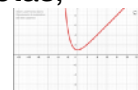
6.8. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$ calculando dominio, simetría, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos.



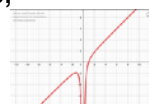
6.9. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{-2x^3 - 1}{x^2}$ calculando dominio, asíntotas, puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, curvatura y puntos de inflexión.



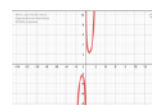
6.10. Representa gráficamente la función $f(x) = x + e^{-x}$ calculando dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, curvatura y puntos de inflexión.



6.11. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$ calculando dominio, asíntotas, puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, curvatura y puntos de inflexión.



6.12. Dibuja la gráfica de $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$ estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos e mínimos relativos.



TEMA 8 - ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD: REGRESIÓN.

Regresión bidimensional.

1.DETERMINISTA VS ALEATORIO

Un experimento se llama **determinista** cuando se puede conocer el resultado de antemano. Por ejemplo, si dejo caer un objeto que no genere resistencia desde 10 metros de altura, sabemos, por las fórmulas estudiadas en física, el tiempo que tardará en caer con gran exactitud.

Un experimento se llama **aleatorio** si es imposible predecir el resultado de antemano. Por ejemplo, saber si el resultado de un lanzamiento de una moneda antes de lanzarla, o si una persona escogida al azar dentro de un instituto usa gafas o no.

La probabilidad es la rama de las matemáticas que estudia los experimentos aleatorios. La estadística y la probabilidad se convierten en una importantísima herramienta para la toma de decisiones y el conocimiento del mundo que nos rodea, pues muchas de las realidades a estudiar son aleatorias y no deterministas.

2. SUCESOS

Consideremos un experimento aleatorio. Lo primero que interesa es saber los posibles resultados. Es lo que se llama **espacio muestral**, conjunto de los posibles resultados de un experimento.

Ejemplos:

Lanzar una moneda $\Rightarrow E = \{C, +\}$

Lanzar un dado $\Rightarrow E = \{1,2,3,4,5,6\}$

Color de pelo der una persona elegida al azar
 $\Rightarrow E = \{\text{"rubio"}, \text{"pelirrojo"}, \text{"castaño"}, \text{"moreno"}\}$

A cada uno de los elementos del espacio muestral se le llama **suceso elemental**.

Un conjunto de varios elementos del espacio muestral se llama **suceso compuesto**.

Al conjunto de todos los elementos del espacio muestral se llama **suceso seguro**.

Al conjunto vacío (lo ajeno al espacio muestral) se le llama **suceso imposible**.

Dado un suceso A , se puede definir su **contrario** $\bar{A} = A^c = A'$, formado por todos los elementos del espacio muestral que no sean de A : $\bar{A} = E - A$

Ejemplo: el experimento es lanzar un dado común.

Suceso A : "resultado par".

$$A = \{2,4,6\}$$

Suceso B : "resultado menor que 3".

$$B = \{1,2\}$$

Contrario de A (par) será $\bar{A}$ ("resultado impar")

$$\bar{A} = \{1,3,5\}$$

Suceso seguro:

$$E = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Suceso imposible:

$$I = \emptyset \text{ ó } I = \{9,10,11\}$$

El conjunto de todas los posibles sucesos, con las operaciones de unión e intersección, se llama **álgebra de Boole**, muy importante en teoría de conjuntos, lógica, programación e informática, electrónica y, obviamente, probabilidad. Veamos en que consiste:

2. PROBABILIDAD DE SUCESOS. REGLA DE LAPLACE

La **probabilidad** de que ocurra un suceso en un experimento aleatorio es una medida que nos indica si es fácil o difícil que ocurra, teniendo en cuenta que una **probabilidad 0 significa imposible** y una **probabilidad 1 significa seguro**.

Regla de Laplace: cuando tenemos un **experimento aleatorio con sucesos elementales equiprobables**, se puede calcular la probabilidad de un suceso con la fórmula:

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Ejemplos:

- Lanzando un dado, $P(\text{"sale un 6"}) = \frac{1}{6} = 0,166\dots$

$P(\text{"menor que 3"}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,33\dots$

- Lanzando una moneda $P(\text{"cara"}) = \frac{1}{2}$

Axiomática de Kolmogorov: La probabilidad cumple los siguientes axiomas:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ (la probabilidad siempre es positiva)

2. $P(E) = 1$ (la probabilidad del suceso seguro es 1)

3. Si A y B son **incompatibles** ($A \cap B = \emptyset$), entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

NOTA: Este curso no profundizamos más en estos conceptos. En la materia Matemáticas II y también en la optativa Métodos Numéricos y Estadísticos se detallan los contenidos necesarios para afrontar los ejercicios de probabilidad de las pruebas de acceso a la universidad.

3. VARIABLES ALEATORIAS (discretas y continuas)

Se llama **variable aleatoria** a una función que asigna a cada suceso de un espacio muestral un número real.

Pueden ser **discretas**, es decir, que toman un número finito o numerable de valores (a saltos, paso a paso), o **continuas**, es decir, que toman todos los valores intermedios entre dos valores dados

4. ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL

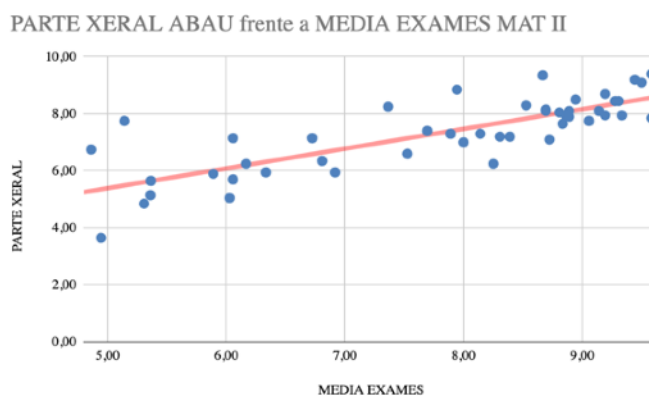
Hemos estudiado las funciones como relación entre variables. En general, se relacionaban a través de una expresión analítica, por lo que era una situación totalmente determinista: conocido el valor de la variable independiente x , podemos calcular exactamente el valor de y .

Y esto se corresponde con una gran cantidad de situaciones reales: salario de un vendedor por número de unidades, longitud de un resorte cuando se aplica peso o cualquier otra fórmula manejada en física ($s=v \cdot t$, etc...).

Pero **existen muchas otras situaciones en las que, no existiendo una relación determinista que permita conocer la relación exacta entre las variables, se comprueba que sus los valores de una afectan a la otra en mayor o menor medida.**

La estadística bidimensional y la regresión aportan las herramientas necesarias para poder comprender, controlar y medir este tipo de situaciones.

Por ejemplo, el siguiente gráfico (**diagrama de dispersión o nube de puntos**) muestra la relación entre la media en la materia Matemáticas II, y la media obtenida en la Prueba de Acceso a la Universidad. Aunque no podemos establecer esa relación con una fórmula, vemos que los valores se aproximan, en cierta medida, a la línea roja.



5. REGRESIÓN LINEAL

A la vista de la nube de puntos, existen diferentes ajustes (lineal, polinómico, exponencial, logarítmico...). Este curso nos centraremos en el ajuste a través de una recta, tal y como vimos en el gráfico-ejemplo de la página anterior. El objetivo de la regresión lineal es **encontrar la ecuación de una recta que mejor se ajuste a una nube de puntos** en un diagrama de dispersión. Esta "recta del mejor ajuste", llamada recta de regresión, nos permite modelar la relación entre las dos variables y hacer predicciones. La ecuación de esta recta tiene la forma: $\hat{Y} = mX + n$. El símbolo sobre la Y hace referencia a que se obtiene una estimación.

NOTA: ¿Cómo decidimos cuál es la "mejor" recta posible? Usamos el método de los mínimos cuadrados. La idea es sencilla: la mejor recta es aquella que hace que las distancias verticales entre los puntos de datos reales y la propia recta sean lo más pequeñas posible en conjunto. A estas distancias se les llama errores o residuos. El método busca minimizar la suma de los cuadrados de estos errores. Se elevan al cuadrado para que los errores positivos y negativos no se anulen entre sí y para dar más peso a los errores más grandes.

5.1. Construcción de la Tabla Estadística

Lo primero es organizar los datos en una tabla para facilitar los sumatorios. Si tenemos N pares de datos, construimos columnas para las variables, sus cuadrados y su producto:

xi	yi	xi ²	yi ²	xi · yi
x_1	y_1	x_1^2	y_1^2	$x_1 \cdot y_1$
...	...	...	...	...
$\sum x$	$\sum y$	$\sum x^2$	$\sum y^2$	$\sum x \cdot y$

5.2. Cálculo de las medias y la varianza (Centros de Gravedad)

Las medias representan el valor central de cada variable. La recta de regresión **siempre** pasa por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$. La varianza y la covarianza miden la dispersión:

- **Media de X:** $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$ **Media de Y:** $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{N}$
- **Varianza de X:** $\sigma_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2$
- **Covarianza:** $\sigma_{xy} = \frac{\sum (x_i \cdot y_i)}{N} - (\bar{x} \cdot \bar{y})$

4. Ecuación de la Recta de Regresión (Y sobre X)

La recta que minimiza los errores cuadráticos ² se calcula utilizando la fórmula punto-pendiente, usando el centro de gravedad y la pendiente de regresión.

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$$

Donde la pendiente es $m = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ y el punto $(\bar{x}, \bar{y})$

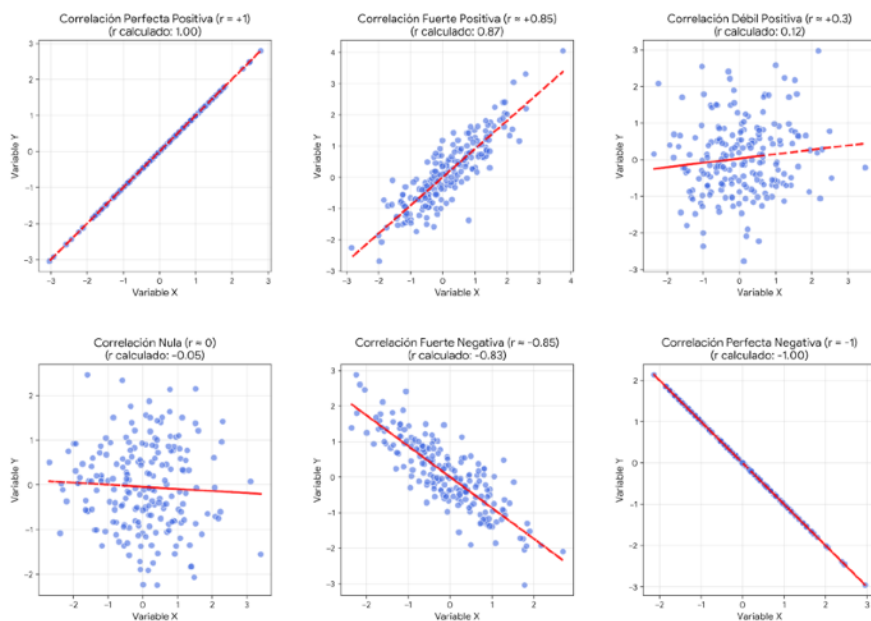
5. El Coeficiente de Correlación de Pearson

Aunque la recta se puede calcular sin él, es fundamental calcular r para saber si la recta es fiable (si el ajuste es bueno).

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

- σ_x y σ_y son las desviaciones típicas (raíz cuadrada de las varianzas).
- El valor de r está siempre entre -1 y 1. Su interpretación es:
 - Si $|r|$ está cerca de 1: La correlación es fuerte, la recta es fiable para hacer predicciones.
 - Si $|r|$ está cerca de 0: La correlación es nula o muy débil.

Interpretación del Coeficiente de Correlación (r) de Pearson



Ejemplo Resuelto: Horas de Estudio vs. Nota de Examen

Queremos estudiar la relación entre el número de horas que 5 alumnos han dedicado a estudiar para un examen (Variable X) y la nota que han obtenido finalmente (Variable Y). Los datos se recogen en la tabla que se muestra a continuación.

Calcula la **recta de regresión** de Y sobre X para predecir la nota en función de las horas y comprueba si la fiabilidad es buena.

Paso 1: Construcción de la Tabla Estadística

Organizamos los datos y calculamos las columnas necesarias para las fórmulas

Alumno	Horas (x_i)	Nota (y_i)	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
A	2	3	4	9	6
B	3	5	9	25	15
C	5	6	25	36	30
D	7	8	49	64	56
E	8	9	64	81	72
SUMA (Σ)	25	31	151	215	179

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{25}{5} = 5 \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{N} = \frac{31}{5} = 6,2$$

El centro de gravedad de la distribución es el punto (5, 6,2)

Paso 3: Cálculo de Varianzas y Covarianza

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum x^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{151}{5} - 5^2 = 30,2 - 25 = 5,2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum y^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{215}{5} - 6,2^2 = 43 - 38,44 = 4,56$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum (x \cdot y)}{N} - (\bar{x} \cdot \bar{y}) = \frac{179}{5} - (5 \cdot 6,2) = 35,8 - 31 = 4,8$$

(Como la covarianza es positiva, la relación es directa: a más horas, más nota).

Paso 4: Obtención de la Recta de Regresión

Usamos la fórmula punto-pendiente: $y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$

Calculamos la pendiente: $m = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{4,8}{5,2} \approx \mathbf{0,92}$

Sustituimos en la ecuación: $y - 6,2 = 0,92 \cdot (x - 5)$, despejando $\hat{y} = \mathbf{0,92x + 1,6}$

Solución: La recta de regresión es $y = 0,92x + 1,6$.

Paso Extra: ¿Es fiable esta recta? (Coeficiente de Correlación)

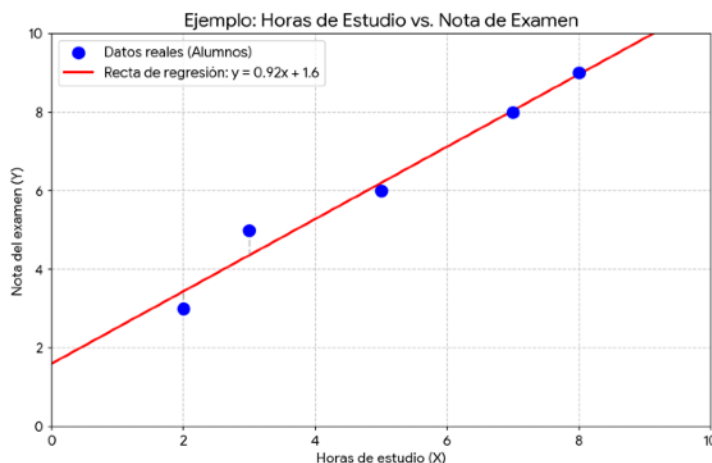
Calculamos r de Pearson para ver si nos podemos fiar de la predicción. $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

Primero necesitamos las desviaciones típicas (raíz cuadrada de las varianzas):

$$\sigma_x = \sqrt{5,2} \approx 2,28 \quad \sigma_y = \sqrt{4,56} \approx 2,14$$

$$r = \frac{4,8}{2,28 \cdot 2,14} = \frac{4,8}{4,88} \approx \mathbf{0,98}$$

Conclusión: Como 0,98 está muy cerca de 1, la correlación es **muy fuerte y positiva**. La recta es muy fiable para hacer estimaciones.



TEMA 8 - EJERCICIOS. REGRESIÓN.

Regresión bidimensional.



CALCULADORA DE
REGRESIÓN
BIDIMENSIONAL

Ejercicio 5. REGRESIÓN. [2 puntos]

a) Una empresa realiza un estudio de los efectos de la publicidad sobre sus ventas. Los resultados de ese estudio son los siguientes (X representa el gasto, e Y las ventas, ambos, en miles de euros).

X: N° de horas	1	2	3	4	5	6
Y: Nota media	9	18	32	27	40	46

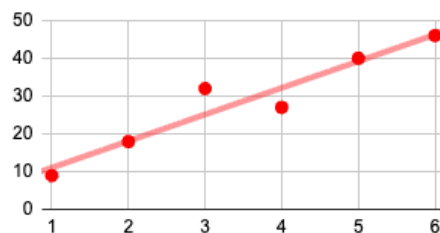
a. Halla el coeficiente de correlación de las dos variables e interprétalo.

b. Obtén la recta de regresión de Y sobre X.

fila	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	1	9	1	81	9
2	2	18	4	324	36
3	3	32	9	1024	96
4	4	27	16	729	108
5	5	40	25	1600	200
6	6	46	36	2116	276
Sumas:	21	172	91	5874	725

n	6
media x	3,5
media y	28,6667
DT x	1,7078
DT y	12,5388
COVARIANZA:	20,5000

CORRELACIÓN:	$r =$	0,9573	POSITIVA MUY FUERTE
Recta Y sobre X	m y sobre x:	7,0286	
	n y sobre x:	4,0667	
	$y = mx + n:$	$y = 7,02857142857142x + 4,06666666666668$	



b) La siguiente tabla recoge datos de ocho alumnos de bachillerato de un instituto, relativos al número de horas por día que están conectados a las redes sociales y la nota media obtenida en la última evaluación:

X: N° de horas	0	2	3	4	2	1	3	1
Y: Nota media	8	6	6	1	4	7	3	8

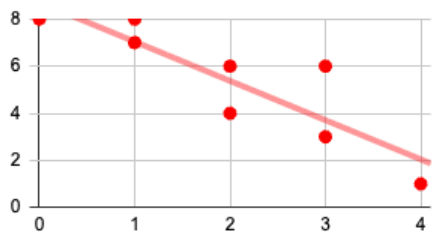
a. Halla el coeficiente de correlación de las dos variables e interprétalo.

b. Obtén la recta de regresión de Y sobre X.

fila	xi	yi	xi²	yi²	xi*yi
1	0	8	0	64	0
2	2	6	4	36	12
3	3	6	9	36	18
4	4	1	16	1	4
5	2	4	4	16	8
6	1	7	1	49	7
7	3	3	9	9	9
8	1	8	1	64	8
Sumas:	16	43	44	275	66

n	8
media x	2
media y	5,3750
DT x	1,2247
DT y	2,3419
COVARIANZA:	-2,5000

CORRELACIÓN:	r=	-0,8716	NEGATIVA FUERTE
Recta Y sobre X	m y sobre x:	-1,6667	
	n y sobre x:	8,7083	
	y=mx+n:	y=-1,6666666666667x+8,7083333333333	



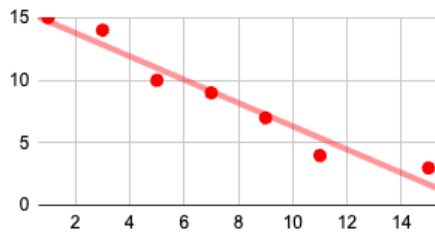
c) Una persona se entrena para obtener el carnet de conducir repitiendo un test de 50 preguntas, y anota el número de preguntas que falla en cada intento:

X: Intento	1	3	5	7	9	11	15
Y: N° de fallos	15	14	10	9	7	4	3

a. Halla el coeficiente de correlación de las dos variables e interprétalo.

b. Obtén la recta de regresión de Y sobre X.

fila	xi	yi	xi ²	yi ²	xi*yi	n	7
1	1	15	1	225	15	media x	7,285714286
2	3	14	9	196	42	media y	8,8571
3	5	10	25	100	50		
4	7	9	49	81	63	DT x	4,4630
5	9	7	81	49	63	DT y	4,2570
6	11	4	121	16	44		
7	15	3	225	9	45	COVARIANZA:	-18,5306
						CORRELACIÓN:	r= -0,9753 NEGATIVA MUY FUERTE
						Recta Y sobre X	m y sobre x: -0,9303
							n y sobre x: 15,6352
							y=mx+n: y=-0,930327868852459x+15,6352459016393
Sumas:	51	62	511	676	322		

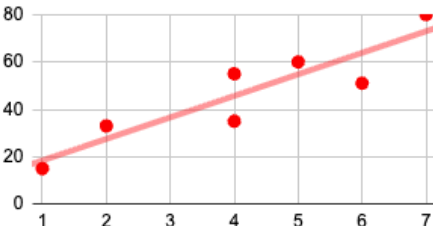


d) Elegimos siete automóviles al azar. Su antigüedad, en años, y el número de kilómetros que han rodado, en miles, están relacionados por la siguiente tabla:

X: Antigüedad	1	2	4	4	5	6	7
Y: Kilómetros (miles)	15	33	35	55	60	51	80

a. Halla el coeficiente de correlación de las dos variables e interprétalo.

b. Obtén la recta de regresión de Y sobre X.

fila	xi	yi	xi ²	yi ²	xi*yi	n	7
1	1	15	1	225	15	media x	4,142857143
2	2	33	4	1089	66	media y	47,0000
3	4	35	16	1225	140	DT x	1,9588
4	4	55	16	3025	220	DT y	19,6469
5	5	60	25	3600	300	COVARIANZA:	34,8571
6	6	51	36	2601	306		
7	7	80	49	6400	560		
						CORRELACIÓN:	r= 0,9058
							POSITIVA FUERTE
						Recta Y sobre X	m y sobre x: 9,0851
							n y sobre x: 9,3617
						y=mx+n:	y=9,08510638297873x+9,36170212765955
							
Sumas:	29	329	147	18165	1607		

