MATEMÁTICAS I

IES Sofía Casanova

2º TRIMESTRE

Alberto José Fuentes García

TEMA 4 - APUNTES

Geometría analítica (vectores)

Introducción a la geometría analítica. Vectores como herramienta básica..

0. Introducción a la geometría analítica.

La **geometría analítica une** dos mundos aparentemente distintos: el **álgebra** y la **geometría**. Esta fusión **permite resolver problemas geométricos usando herramientas algebraicas**. Es uno de los desarrollos más importantes en la historia de las matemáticas, con muchas aplicaciones prácticas y teóricas que conectan áreas.

0.1. De la geometría euclídea a la geometría analítica: el plano cartesiano.

La geometría clásica siempre se asocia al mundo griego: os sonarán nombres como **Pitágoras**, **Tales**, **Euclides**, Arquímedes o Apolonio, relacionados con resultados geométricos que conocéis.

Los griegos no poseían un buen sistema de numeración, y eso hizo que se enfrentaran a los retos priorizando la geometría: el dibujo y las propiedades y relaciones de puntos, rectas, polígonos, círculos y otras figuras, dibujadas en un plano, a priori, vacío…[1]

Ese conocimiento se condensó en la obra *Los Elementos* de **Euclides** (≈300 a.C.), una de las más importantes e influyentes de la historia de las matemáticas y de la humanidad. Con el desarrollo y evolución de los sistemas de numeración indoarábigos y la aritmética, y también del álgebra (a partir del *Tratado del Álgebra* del persa **Al-Jwarizmī** (s. IX)), se abrieron nuevos caminos en el desarrollo matemático.

Geometría y álgebra convergen en el siglo XVII, cuando René **Descartes**[2] y Pierre de **Fermat** dan lugar, con sus estudios, al nacimiento de la geometría analítica con el desarrollo del plano cartesiano: el plano dejó de ser un espacio vacío, al introducir un sistema de referencia formado por un punto origen y un unos ejes perpendiculares escalados, apareciendo así las coordenadas para cada punto del plano, y permitiendo utilizar aritmética y el álgebra para realizar cálculos precisos sobre elementos geométricos. Este cambio supuso una revolución que llevó la capacidad de resolución de problemas a un nuevo nivel.

---

[1] *Aunque posteriormente, ya en el siglo III d.C. nacen la aritmética y el álgebra con **Diofanto de Alejandría** (s.III d.C.))*

[2] *Descartes fue un filósofo, matemático y físico francés que revolucionó la historia del conocimiento. En filosofía, rompió con la escolástica medieval para dar lugar al racionalismo: la búsqueda de la verdad a través de la razón. Famoso por su frase "pienso, luego existo". En matemáticas, como se comenta, abrió un nuevo campo, la geometría analítica.*

0.2. Nacen los vectores: magnitudes con dirección y sentido

La idea de que era necesario tener en cuenta la dirección asociada a una magnitud (en una fuerza, por ejemplo), es importante para resolver algunos problemas, ya la manejó **Arquímedes** en el siglo III a.C, estudiando las palancas y el equilibrio.

En el siglo XVII, con el desarrollo de la física moderna, algunos autores como **Galileo** o **Newton** fueron profundizando en ello, y plantearon descomposiciones relacionadas con la suma de vectores. **Newton**, en su segunda ley, $\overrightarrow{F} = m \cdot \vec{a}$, manejaba implícitamente vectores aunque aún no con la notación vectorial actual.

Tras los avances comentados de Descartes, y de otros matemáticos como **Euler** o **Lagrange**, debemos esperar hasta el **siglo XIX**, momento en el que **Grassmann** introduce la definición, las operaciones, y las propiedades actuales de los vectores.

0.3. Utilidad de la geometría analítica

La geometría analítica y los vectores son herramientas universales que han transformado nuestra capacidad de analizar, modelar y resolver problemas. Desde el **diseño de puentes** hasta la **animación de películas y videojuegos** y el desarrollo de **algoritmos de inteligencia artificial**, estas herramientas son una prueba de cómo la abstracción matemática tiene aplicaciones prácticas que impactan nuestra vida cotidiana.

1. Física. Fuerzas y movimientos: los vectores representan magnitudes físicas que tienen dirección y sentido, como fuerza, velocidad, aceleración o momentum.
Trayectorias y proyecciones. En el análisis de trayectorias de proyectiles, los vectores permiten descomponer el movimiento en componentes horizontal y vertical, lo que facilita los cálculos. **Campos eléctricos y magnéticos**: los campos vectoriales representan fuerzas que varían en el espacio, como el campo eléctrico o el campo magnético.+

2. Ingeniería. **Diseño estructural**: vectores para analizar fuerzas aplicadas a **estructuras** como edificios o puentes, asegurando su estabilidad (vigas y columnas). **Robótica**:los vectores permiten describir la posición, orientación y movimientos de robots en un espacio tridimensional. **Simulación y modelado**: en simulaciones por computadora, los vectores ayudan a modelar el movimiento de **fluidos**, **automóviles**, **aviones**, etc.

3. Biología y **ecología.** Modelos de dispersión de poblaciones o trayectorias de animales en ecosistemas suelen representarse mediante vectores. En **biomecánica**, los vectores representan **fuerzas internas y externas en el movimiento humano y animal**. En **geología**, los vectores se usan para describir las tensiones en la corteza terrestre. En **meteorología**, los vectores representan la **dirección y velocidad del viento** o las corrientes oceánicas.

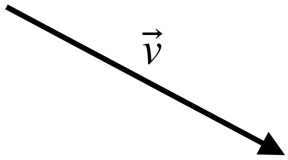
4. Computación gráfica y diseño 2D y 3D. Los vectores son esenciales para describir objetos y sus movimientos en entornos tridimensionales, como en **videojuegos** o simulaciones, y su representación en **pantallas**. **Transformaciones geométricas**: las rotaciones, traslaciones y escalados de objetos se representan mediante operaciones con vectores y matrices en gráficos por computadora. **Animación**: los vectores permiten describir trayectorias y movimientos suaves de personajes u objetos en una animación.

5. Economía y ciencias sociales. **Optimización**: en programación lineal, los vectores representan restricciones y soluciones para maximizar beneficios o reducir costes. En **economía**, los vectores permiten visualizar tendencias en gráficos tridimensionales o interpretar relaciones entre variables.

6. Matemáticas puras y aplicadas. La **geometría analítica** permite estudiar figuras y **relaciones geométricas** mediante ecuaciones algebraicas. En **álgebra lineal:** los vectores son la base para resolver sistemas de ecuaciones lineales, encontrar autovalores y estudiar **transformaciones lineales**.

7. Inteligencia artificial y ciencia de datos, donde los datos se representan como vectores y sus propiedades permiten manejarlos y manipularlos

1. Vectores en el plano $\mathbb{R}^2$.



Un vector $\vec{v}$ en el plano es un segmento orientado que tiene:

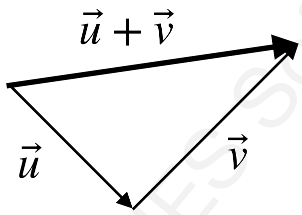
- **Módulo**: Longitud del vector $|\vec{v}|$
- **Dirección**: La orientación de la línea que contiene al vector.
- **Sentido**: Hacia dónde apunta, hay dos posibles sentidos para cada dirección.

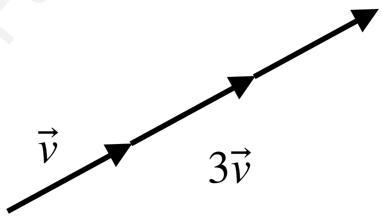
Cuando hablamos de vectores, a los números no vectoriales les llamaremos escalares.

1.1. Operaciones con vectores y espacio vectorial.

Gráficamente, podemos definir dos operaciones sobre los vectores:

- **Suma** $\vec{u} + \vec{v}$: se dibujan los vectores consecutivamente, cada uno desde el extremo del anterior. La suma es el vector que une el origen con el extremo final.
- **Producto por un escalar** $k \cdot \vec{v}$: consiste el prolongar o acortar el módulo del vector según el valor del escalar, cambiando de sentido si es negativo.

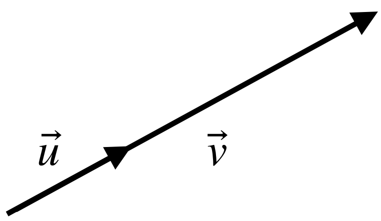




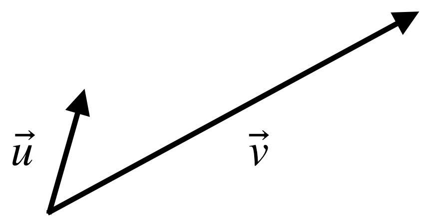
El conjunto de vectores, con estas dos operaciones, se llama **espacio vectorial**.

A partir del producto de un vector por un escalar, surge la idea de dependencia lineal:

Dos vectores de $\mathbb{R}^2$ son **linealmente dependientes** si uno se puede obtener como un producto del otro por un escalar. En caso contrario son **linealmente independientes**.



LINEALMENTE DEPENDIENTES

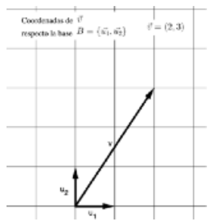


LINEALMENTE INDEPENDIENTES

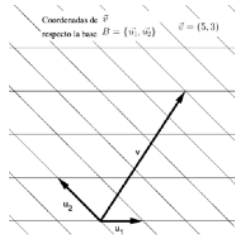
1.2. Sistema de referencia. Base. Coordenadas.

Para trabajar algebraicamente con vectores en el plano (de momento un plano vacío y sin referencias), necesitamos un sistema de referencia formado por un punto llamado origen y una base de vectores.

Se llama **base** en un espacio vectorial a un conjunto de vectores linealmente independientes ($\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$) que permiten escribir cualquier otro vector como una **combinación lineal**[3] de ellos:



EJEMPLO BASE CANÓNICA (PERPENDICULARES UNITAROS)



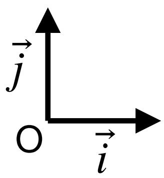
EJEMPLO BASE NO CANÓNICA (NO PERPENDICULARES/ UNITARIOS)

($\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \exists a, b \in \mathbb{R} \setminus \vec{\mathbf{v}} = \mathbf{a} \cdot \overrightarrow{\mathbf{u_1}} + \mathbf{b} \cdot \overrightarrow{\mathbf{u_2}}$).

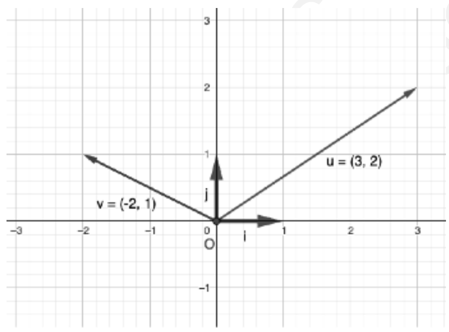
Aparecen así las **coordenadas**: $\vec{v} = (a, b)$ en la base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$

Aunque trabajar en bases no canónicas tiene diversas utilidades, nos centraremos solo en la canónica.

•Base canónica: $\begin{cases} \text{Origen } O(0,0) \\ \text{Vectores } \vec{i}, \vec{j} \ / \begin{cases} |\vec{i}| = 1, |\vec{j}| = 1 \\ \vec{i} \perp \vec{j} \end{cases} \end{cases}$



Con la base canónica, se forma el sistema de coordenadas cartesiano que ya conocéis:



$$\vec{u}(u_1, u_2) \implies \begin{cases} \boxed{\text{Modulo } |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \\ \text{Ángulo } \alpha = \arctan \frac{u_2}{u_1} \end{cases}$$

Operaciones en base canónica con $\vec{u}(x_1, y_1)$, $\vec{v}(x_2, y_2)$ y $k \in \mathbb{R}$:

• Suma $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

•Producto por escalar: $k \cdot \vec{u} = (k x_1, k x_2)$

---

[3] *El adjetivo **lineal** se aplica a todo aquello que "funciona bien" con **sumas**, **restas**, y **multiplicaciones por coeficientes**. Ya conocéis los sistemas de ecuaciones **lineales**, la función **lineal**, ahora combinación **lineal**, y veréis **linealidad** en derivadas, integrales, matrices, y multi**linealidad** en determinantes. Es "buena noticia"; implica que podemos trabajar con naturalidad con menos posibilidad de cometer errores.*

***Ejemplos no lineales**: logaritmos $\log(A+B) \neq \log A + \log B$ y $\log(kA) \neq k \log A$, potencias $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$ y $(3x)^2 \neq 3x^2$… Lo no lineal obliga a estar más pendiente de propiedades específicas para operar, nos obliga a tener más cuidado. Lo lineal es más familiar e intuitivo para estudiantes, menos dado a fallos. Ya tenéis experiencia con los errores comunes que se cometen en igualdades notables, aplicando propiedades de logaritmos, etc.*

1.3. Producto escalar.

1.3.1. Producto escalar: definición y cálculo.

El producto escalar es una operación entre dos vectores cuyo resultado es un escalar. Es muy importante, porque permite calcular ángulos entre vectores, y estudiar perpendicularidad y proyecciones.

Definición. Dados dos vectores $\vec{u},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, se define su **producto escalar** como:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})}$$

Como consecuencia:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = |\vec{u}||\vec{u}| \cdot \cos((\widehat{\vec{u}, \vec{u}})) = |\vec{\mathbf{u}}|^2$$

Esta propiedad se usa usa en ejercicios cuando preguntan $|\vec{u} + \vec{v}|$ o $|\vec{u} - \vec{v}|$ conocidos los módulos de los vectores y el ángulo que forman, por ejemplo:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}\vec{u} - \vec{u}\vec{v} - \vec{v}\vec{u} + \vec{v}\vec{v} =$$
$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}| - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$$

Y calculamos $|\vec{u} - \vec{v}|$ como la raíz cuadrada del resultado.

1.3.2. Producto escalar en la base canónica. Cálculo con coordenadas.

En la base canónica, si consideramos las coordenadas de $\vec{u}(u_1, u_2)$ y $\vec{v}(v_1, v_2)$, queda:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j}) \cdot (v_1\vec{i} + v_2\vec{j}) = u_1v_1(\vec{i} \cdot \vec{i}) + u_1v_2\cancel{(\vec{i} \cdot \vec{j})} + u_2v_1\cancel{(\vec{j} \cdot \vec{i})} + u_2v_2(\vec{j} \cdot \vec{j}) \implies$$

$$\implies \begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \quad (\vec{i} \parallel \vec{i} \implies \cos 0 = 1 \ y\ |\vec{i}| = 1) \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0 \quad (\vec{i} \perp \vec{j} \implies \cos 90^\circ = 0) \end{cases} \implies$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2}$$

1.3.2. Producto escalar: aplicaciones

- **Ángulo de vectores**: de $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$, **despejando**:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}}$$

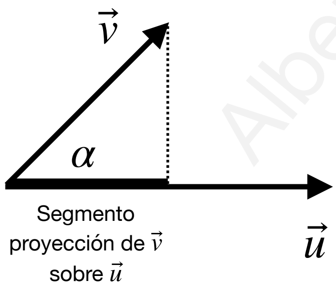
- **Perpendicularidad**[4]: (como consecuencia de que el coseno de 90º es 0)

$$\boxed{\vec{u}\perp\vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0}$$

- **Obtener vector perpendicular** a $\vec{u}(a,b)$: [5]

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{u_\perp}(-b,\ a) \\ \overrightarrow{u_\perp}(b,\ -a) \end{cases}}$$

- **Interpretación geométrica (proyección)**:



$$\boxed{\text{• Proyección de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u} = |\vec{v}|\cdot\cos\alpha}$$

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot\boxed{|\vec{v}|\cdot\cos\alpha} = \vec{u}\cdot\boxed{proy_{\vec{u}}\vec{v}}$

La proyección es la "sombra" que proyecta un vector sobre otro, suponiendo una luz que cae perpendicularmente sobre el segundo (imagina, en el dibujo, una luz que cae verticalmente desde arriba)

---

[4] *Son sinónimos: **perpendicular, ortogonal, normal, hacer 90º**, $\perp$, **ángulo recto**.*

[5] *Basta **intercambiar las coordenadas y cambiar uno de los signos.** Hay dos posibles vectores perpendiculares a otro dado, porque así* $\vec{u}\cdot\overrightarrow{u_\perp} = a\cdot(-b) + b\cdot a = a\cdot b + b\cdot(-a) = 0$

TEMA 4 - Ejercicios

Geometría analítica (vectores)

Introducción a la geometría analítica. Vectores como herramienta básica..

Ejercicio 1. VECTORES ORTOGONALES, ÁNGULOS, COMBINACIÓN LINEAL

1.1. Dados $\vec{u}(1,3)$ y $\vec{v}(-6,k)$ con coordenadas en base ortonormal:

a) Obtén valor de *k* para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) Obtén *k* para que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}(-2,0)$ formen un ángulo de 45º.

c) Escribe un vector unitario y perpendicular (a la vez ambas condiciones) a $\vec{u}$.

d) Dados $\vec{a}(1,\ 2)$ $\vec{b}(3,-1)$ y $\vec{c}(11,\ 1)$, expresa $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Sol: a) $k=2$ *b)* $k=\pm 6$ *c)* $\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$ *d)* $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$

1.2. Contesta las siguientes preguntas sobre vectores:

a) Dados $\vec{u}(\frac{1}{2},k)$ y $\vec{v}(\frac{1}{2},0)$, calcula *k* para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formen un ángulo de 60º.

b) Dados $\vec{m}(-5,k)$ y $\vec{n}(4,-2)$, calcula *k* para que sean ortogonales.

c) Obtén un vector unitario y perpendicular a $\vec{w}(-3,4)$.

d) Dados $\vec{a}(3,-2)$, $\vec{b}(-1,\ 2)$y $\vec{c}(0,-5)$, calcula *m* y *n* de modo que: $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$

Sol: a) $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ *b)* $k=-10$ *c)* $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ *d)* $\vec{c}=\frac{5}{4}\vec{a}-\frac{15}{4}\vec{b}$

1.3. Los vectores $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$ y $\vec{d}=5\vec{a}-4\vec{b}$ son perpendiculares. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios. ¿Qué ángulo forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$? *Sol:* $\alpha=60°$

1.4. Calcula un vector de módulo 2 que forme con el vector $\vec{u}(-1,0)$ un ángulo de 60º.

Sol: $\mathbf{v}_1=(-1,\sqrt{3})$ *o* $\mathbf{v}_2=(-1,-\sqrt{3})$,

1.5. Dados los vectores $\vec{u}(-3,k)$ y $\vec{v}(4,-6)$

a) Calcula k para que sean perpendiculares. *Sol:* $k=-2$

b) Calcula k para que el módulo del vector $\vec{u}$ sea 5. *Sol:* $k=\pm 4$

1.6. Las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en base ortonormal son: $\vec{u}(2,1)$ y $\vec{v}(k,-3)$.

a) Obtén un vector unitario y perpendicular (a la vez) a $\vec{u}$. *Sol:* $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

b) Obtén *k* para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formen un ángulo de 135° *Sol:* $k=9,-1$

1.7. Las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en una base ortonormal son $\vec{u}(-1,3)$ y $\vec{v}(4,\ k)$.

a) Obtén valor de *k* para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares. *Sol:* $k=\frac{4}{3}$

b) Obtén *k* para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formen un ángulo de 45°. *Sol:* $k=8,-2$

c) Dados $\vec{a}(1,\ 2)$, $\vec{b}(0,3)$ y $\vec{c}(-1,\ 3)$, expresa $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
Sol: $\vec{c}=\vec{a}-\frac{5}{3}\vec{b}$

1.8. Las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en una base ortonormal son $\vec{u}(-3,1)$ y $\vec{v}(2,\ k)$.

a) Obtén valor de *k* para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares. *Sol:* $k=6$

b) Calcula el ángulo que forma el vector $\vec{u}$ con el vector $\vec{w}(1,-2)$. *Sol: 135º*

c) Dados $\vec{a}(-3,1)$, $\vec{b}(1,-2)$ y $\vec{c}(2,\ \frac{7}{2})$, expresa $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

1.9. Dados los vectores $\overrightarrow{a}=(-1,3)$, $\overrightarrow{b}=(2,1)$ y $\overrightarrow{c}=(m,p)$

a) Calcular el ángulo que forman $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$. *Sol: 81º52'11"*

b) Determinar las coordenadas positivas del vector $\overrightarrow{c}$ para que sea perpendicular al vector $\overrightarrow{a}$ y tenga módulo 10. *Sol:* $\mathbf{c}=(3\sqrt{10},\sqrt{10})$.

Ejercicio 2. PROYECCIÓN

2.1 Dados los vectores $\vec{u}(1,3)$ y $\vec{v}(6,4)$. Halla la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$. *Sol* $\frac{9\sqrt{10}}{5}$

2.2. Dados los vectores $\vec{a}(5,2)$ y $\vec{b}(4,-3)$, calcula la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ y la de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$. *Sol* $\frac{14\sqrt{29}}{29}, \frac{14}{5}$

2.3. Dados los vectores $\vec{a}(2,6)$ y $\vec{b}=(5,1)$, calcula:

a) Las coordenadas de un vector unitario de la misma dirección que $\vec{b}=(5,1)$

b) Un vector de la misma dirección que $\vec{b}$ y cuyo módulo sea igual a la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ (vector proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$).

Sol:a) $\vec{v}=\left(\frac{5\sqrt{26}}{26},\frac{5\sqrt{26}}{26}\right) - \vec{v}=\left(-\frac{5\sqrt{26}}{26},-\frac{5\sqrt{26}}{26}\right)$ *b)* $\frac{8\sqrt{26}}{13}; \left(\frac{40}{13},\frac{8}{13}\right)$ *y opuesto*

Ejercicio 3. MÓDULO DE SUMA O RESTA Y ÁNGULOS

3.1. Si $|\vec{v}|=6, |\vec{w}|=10$ y $|\vec{v}+\vec{w}|=14$, calcula el ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{w}$. *Sol* $\theta=60^\circ$.

3.2. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}|=5,\ |\vec{v}|=2$ y que forman un ángulo de 60º. Calcula $|\vec{u}+\vec{v}|$. *Sol:* $\sqrt{39}$

3.3. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}|=4,\ |\vec{v}|=2$ y que forman un ángulo de 60º. Calcula $|\vec{u}-\vec{v}|$. *Sol:* $2\sqrt{3}$

3.4. De dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que son ortogonales y que $|\vec{u}|=6$ y $|\vec{v}|=10$. Halla $|\vec{u}+\vec{v}|$ y $|\vec{u}-\vec{v}|$. *Sol:* $2\sqrt{34}$

3.5. Dados $\vec{a}$ y $\vec{b}$, de módulos 3 y 5 respectivamente, y formando un ángulo de 120º entre ellos, calcula $|\vec{a}-\vec{b}|$ *Sol: 7*

TEMA 5 - APUNTES

Geometría analítica (puntos y rectas)

Introducción a la geometría analítica. Puntos, rectas y problemas métricos.

2. Geometría analítica.

2.1. Puntos en el plano. Vector de posición. Distancia entre dos puntos.

Asumido el sistema de referencia en la base canónica, tenemos nuestro plano cartesiano, donde cada punto P tiene una coordenada horizontal x_p y una coordenada vertical y_p. Pero este enfoque es limitado, ya que no tenemos ningún tipo de operación definida para puntos, sino para vectores. Esto lo solucionamos a través del llamado vector de posición.

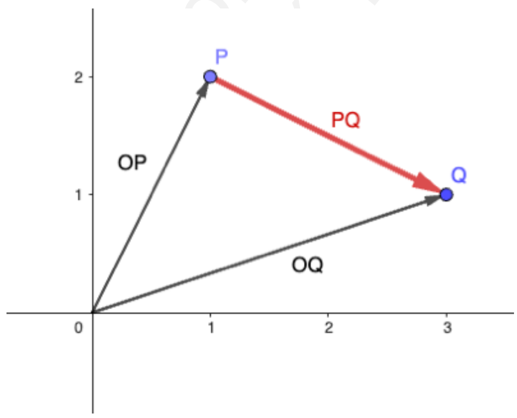
Dado un punto $P(x_p, y_p)$, llamamos **vector de posición asociado a** P al vector $\overrightarrow{OP}$, que une el origen $O(0,0)$ con el punto P. Sus coordenadas son las mismas: $\overrightarrow{OP}(x_p, y_p)$

Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, podemos calcular la distancia con vectores:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$dist(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ (módulo del vector que los une)



2.2. Puntos alineados, punto medio, punto simétrico

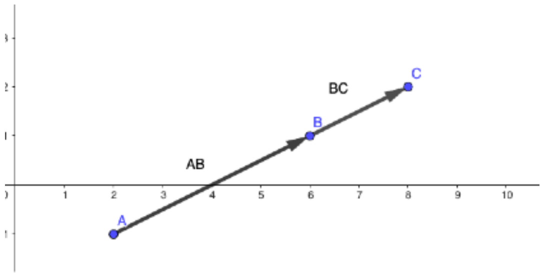
Puntos alineados. Tres puntos están alineados si las **coordenadas** de los vectores que los unen son **proporcionales.**

Nota: Equivale a decir que son linealmente dependientes, se mantienen en una dimensión sin abrir a dos.

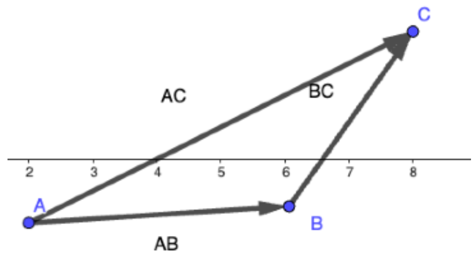
Ejemplo: $A(2,-1),\ B(6,1)\ y\ C(8,2)$ ¿están alineados?

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = B - A = (6-2, 1-(-1)) = (4,2) \\ \overrightarrow{BC} = C - B = (8-6, 2-1) = (2,1) \end{cases} \Longrightarrow \frac{4}{2} = \frac{2}{1}, \text{ sí, se cumple.}$$

Coordenadas proporcionales $\Longrightarrow$ **A, B y C son puntos alineados**



ALINEADOS (EJEMPLO, 1 DIMENSIÓN)
LINEALMENTE DEPENDIENTES



NO ALINEADOS (ABRE 2 DIMENSIONES)
LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Punto medio. Con un sencillo planteamiento vectorial, conseguimos una fórmula cómoda para calcular el punto medio (**media de las coordenadas**)

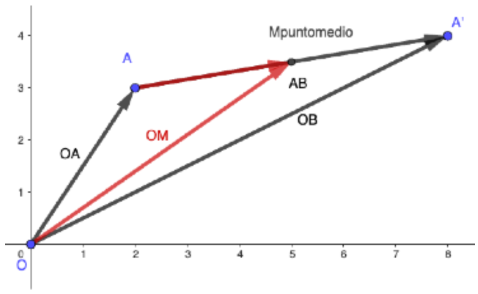
Punto medio: $M(x,y)$ entre $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$. Se cumple que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (x_1,y_1) + \frac{1}{2}\big((x_2-x_1),(y_2-y_1)\big)$$

Simplificando:

$$\overrightarrow{OM} = \left(x_1 + \frac{x_2-x_1}{2}, y_1 + \frac{y_2-y_1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

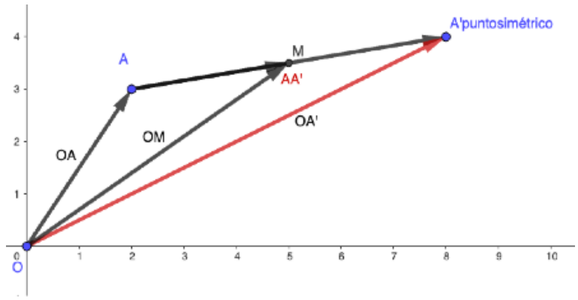


Por lo tanto, la fórmula para el punto medio es:

$$\text{PUNTO MEDIO: } M(x,y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Punto simétrico. El punto simétrico de $A(x_1, y_1)$ respecto de $M(x_m, y_m)$ es el punto $A'(x, y)$, que cumple que M es punto medio entre A y A'.

Vale la misma fórmula que usamos para el punto medio. Tenemos que despejar en ella las coordenadas x e y del punto A':



PUNTO SIMÉTRICO: $M(x_m, y_m) = \left(\dfrac{x_1 + \mathbf{x}}{2}, \dfrac{y_1 + \mathbf{y}}{2}\right)$ (despejar **x** e **y**).

Ejemplo: Calcular el simétrico de $A(7,4)$ respecto a $P(3, -11)$.

P será el punto medio entre A y su simétrico A'. Con la fórmula:

$P\,(3, -11) = \left(\dfrac{7 + \mathbf{x}}{2}, \dfrac{4 + \mathbf{y}}{2}\right)$. Despejamos **x** e **y**:

Despejamos x: $3 = \dfrac{7 + x}{2} \implies 6 = 7 + x \implies x = -1.$

Despejamos y: $-11 = \dfrac{4 + y}{2} \implies -22 = 4 + y \implies y = -26.$

Por lo tanto, el simétrico es: $A'(-1, -26)$.

2.3. Ecuaciones de la recta. **RECTA : PUNTO Y VECTOR DIRECTOR**.

Partíamos del plano vacío, y hemos logrado resolver problemas métricos con puntos y vectores. Veremos ahora como se consiguen, partiendo de una interpretación vectorial, todas las ecuaciones de la recta.

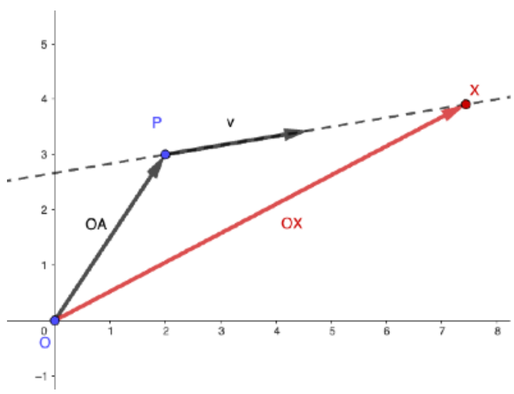
***Toda recta se construye a partir de un punto y una dirección (vector)**. Esa asociación es esencial.*

Ecuación vectorial. Dados $\begin{cases} punto\ \ P(p_1, p_2) \\ vector\ \ \vec{v}(v_1, v_2) \end{cases}$

Un punto $X(x, y)$ sobre la recta X se obtiene prolongando el vector t veces desde P.

Vectorialmente:

ECUACIÓN VECTORIAL $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v},\ t \in \mathbb{R}$



Ecuaciones paramétricas. Desde la expresión vectorial, introduciendo coordenadas y operando obtenemos:

$$(x, y) = (p_1, p_2) + t \cdot (v_1, v_2) \implies \begin{cases} x = p_1 + t \cdot v_1 \\ y = p_2 + t \cdot v_2 \end{cases}$$ ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Cada coordenada se obtiene a través del punto, el vector y un parámetro $t \in \mathbb{R}$

Se usará más en segundo de bachillerato, en geometría del espacio.

Ecuación continua. Despejando t e igualando, desaparece el parámetro y queda:

ECUACIÓN CONTINUA $\dfrac{x - p_1}{v_1} = \dfrac{y - p_2}{v_2}$ (*)

Útil para conseguir cualquier otra ecuación si los datos son punto y vector.

Desde la ecuación continua, obtenemos la punto pendiente, la explícita y la implícita:

Ecuación punto pendiente. Pasando v_2 al otro lado queda $y - p_2 = \dfrac{v_2}{v_1}(x - p_1)$

Sustituyendo por la pendiente: $m = \dfrac{v_2}{v_1}$ (detallaremos más adelante), la ecuación queda:

ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE $\quad y - p_2 = m(x - p_1)$

Útil cuando los datos son un punto y la pendiente

Ecuación explícita. Operando para despejar y obtenemos $y = mx \overbrace{-mp_1 + p_2}^{n}$.

ECUACIÓN EXPLÍCITA $y = mx + n$ donde

$$\begin{cases} m \ pendiente \\ n \ ordenada \ en \ el \ origen \ (punto \ (0{,}n)) \end{cases}$$

Es la más usada en análisis, como función. Permite representación rápida y sencilla.

Ecuación implícita. Desde (*), pasando todo a un lado: $\overbrace{v_2}^{A} x \overbrace{-v_1}^{B} y \overbrace{+p_2v_1 - p_1v_2}^{C} = 0$

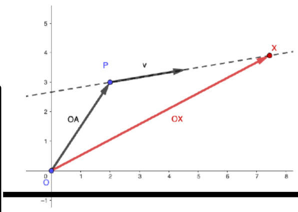
ECUACIÓN IMPLÍCITA: $Ax + By + C = 0$

La más usada en geometría y álgebra. También llamada GENERAL.

ESQUEMA DE LAS ECUACIONES DE LA RECTA (punto y dirección)

Recta r: $\begin{cases} punto\ P(p_1, p_2) \\ vector\ \vec{v}(v_1, v_2) \end{cases}$ **Dirección:** $\begin{cases} vector:\ \vec{v}(v_1, v_2) \equiv (1,m) \equiv (-B, A) \\ o \\ pendiente\ m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{m}{1} = -\frac{A}{B} \end{cases}$

Un punto $X(x, y)$ de la recta, satisface cualquiera de las siguientes ecuaciones:



ECUACIÓN VECTORIAL

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

→ Coordenadas →

ECUACIONES PARAMÉTRICAS

$$\begin{cases} x = p_1 + t \cdot v_1 \\ y = p_2 + t \cdot v_2 \end{cases}$$

→ despejar t →

ECUACIÓN CONTINUA

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$$

→ mover v_2 →

ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE

$$y - p_2 = m(x - p_1)$$

→

ECUACIÓN EXPLÍCITA

$$y = mx + n$$

$$\begin{cases} m\ pendiente \\ n\ ordenada\ en\ el\ origen\ (0,n) \end{cases}$$

→ todo a un lado →

ECUACIÓN GENERAL O IMPLÍCITA

$$Ax + By + C = 0$$

Vector normal: $\vec{v_\perp}(A, B)$

Vector: $\vec{v}(-B, A) \equiv (B, -A)$

PASO DE UNAS ECUACIONES A OTRAS + COMBINACIONES DE DATOS

Con las siguientes combinaciones de datos podemos obtener las ecuaciones de la recta:

$$'' \Rightarrow '' \; Q(p_1+v_1, p_2+v_2)$$
$$'' \Leftarrow '' \; \vec{v}(q_1-p_1, q_2-p_2)$$

Datos:
$$\begin{cases} punto\ P(p_1,p_2) \\ vector\ \vec{v}(v_1,v_2) \end{cases}$$

Datos:
$$\begin{cases} punto\ P(p_1,p_2) \\ pendiente\ m \end{cases}$$

Datos:
$$\begin{cases} punto\ P(p_1,p_2) \\ punto\ Q(q_1,q_2) \end{cases}$$

$'' \Rightarrow '' \; m = \frac{v_2}{v_1}$ $\quad '' \Leftarrow '' \; \vec{v}(1,m)$

$'' \Leftarrow '' \; m = \frac{q_2-p_2}{q_1-p_1} = \frac{\text{"lo que sube"}}{\text{"lo que avanza"}}$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS
$$\begin{cases} x = p_1 + t \cdot v_1 \\ y = p_2 + t \cdot v_2 \end{cases}$$

ECUACIÓN CONTINUA
$$\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2}$$

ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE
$$y - p_2 = m(x - p_1)$$

ECUACIÓN EXPLÍCITA
$$y = mx + n$$
$$\begin{cases} m\ pendiente \\ n\ ordenada\ en\ el\ origen\ (punto\ (0,n)) \end{cases}$$

ECUACIÓN GENERAL O IMPLÍCITA
$$Ax + By + C = 0$$
Vector normal: $\vec{v_\perp}(A,B)$

PASO A IMPLÍCITA: A esta ecuación se puede llegar:

a) Despejando e "=0" desde la continua, pto-pte o explícita

b) Del vector $\vec{v}(v_1,v_2)$ sabemos $A = v_2$, B=$-v_1$.

Calculamos C sustituyendo el punto y despejando:

$Ap_1 + Bp_2 + C = 0$ (sabemos todo menos C)

PASO A OTRAS ECUACIONES DESDE IMPLÍCITA:

Desde esta ecuación sabemos: $\begin{cases} vector\ \vec{v}(-B,A) \\ punto:\ dar\ cualquier\ valor\ a\ x\ y\ despejar\ y \end{cases}$

Y con punto y vector, podemos obtener cualquiera de las otras. También podemos despejar y para obtener explícita, o llamar t a una de las letras y despejar la otra, pasando así a paramétricas.

2.4. La pendiente en las ecuaciones de la recta. Vector director.

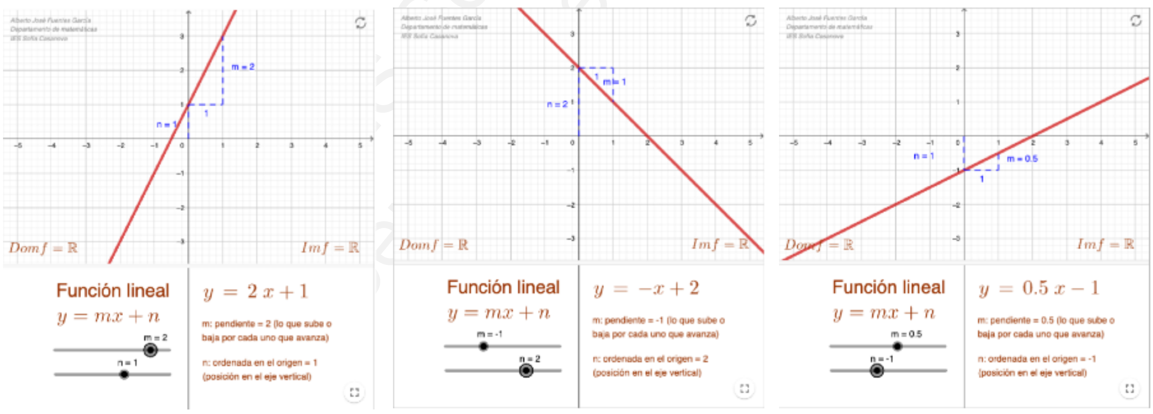
La pendiente es una medida de la inclinación de una recta (o vector). Es un concepto fundamental y os acompañará durante todo el bachillerato en distintos temas.

Definición. Dado un vector $\vec{v}(v_1, v_2)$ se define pendiente del vector como el cociente:

$$m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\text{"lo que sube (o baja)"}}{\text{"lo que avanza"}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

Equivalentemente, la pendiente es lo que sube (o baja) por cada unidad que avanza en horizontal. La pendiente de una recta, es la pendiente de cualquier vector sobre ella.

ECUACIÓN EXPLÍCITA: nos permite representar una recta de forma intuitiva y rápida. Basta situarse en la ordenada en el origen (altura en el eje X, dada por la n) y utilizar la pendiente m (avanzamos una unidad en X y subimos o bajamos lo que indique m):



VARIOS EJEMPLOS DE REPRESENTACIÓN DE RECTAS EN EXPLÍCITA.
PUEDES EXPERIMENTAR DESDE: [HTTPS://WWW.GEOGEBRA.ORG/M/SAMNCJAX](https://www.geogebra.org/m/samncjax)

ECUACIÓN IMPLÍCITA: Como $\overbrace{v_2}^{A}\, x \overbrace{-v_1}^{B}\, y \overbrace{+p_2v_1 - p_1v_2}^{C} = 0$, tenemos: $v_2 = A$, $-v_1 = B$. Entonces el vector director será $\vec{v}(v_1, v_2) = (-B, A)$ y $m = -\frac{B}{A}$

Observamos entonces que (A, B) es un vector perpendicular a la recta (los coeficientes A y B nos dan directamente un vector perpendicular, útil para obtener el vector director).

Resumiendo, la dirección de una recta es: $\begin{cases} vector: \ \vec{v}(v_1, v_2) \ \equiv \ (1,m) \equiv (-B, A) \\ pendiente \ m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{m}{1} = -\frac{A}{B} \end{cases}$

Así, podemos obtener el vector si sabemos la pendiente, la pendiente si sabemos el vector, u obtener la dirección desde la ecuación implícita.

El vector director de una recta, se puede simplificar (ejemplo, $\vec{v}(6, -4) \equiv (3, -2)$

2.5. Ecuación normal.

Ecuación normal (perpendicular, ortogonal…). Para obtener la ecuación de una recta perpendicular a otra dada, basta tener un punto y obtener la dirección perpendicular:

Recta original: $\begin{cases} vector: \ \vec{v}(v_1, v_2) \ \equiv \ (1,m) \equiv (-B, A) \\ pendiente \ m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{m}{1} = -\frac{A}{B} \end{cases}$

Recta perpendicular: $\begin{cases} vector \perp: \ \overrightarrow{v_\perp}(-v_2, v_1) \ \equiv (A, B) \\ pendiente \perp: \ m_\perp = -\frac{v_1}{v_2} = -\frac{1}{m} = \frac{B}{A} \end{cases}$

LA ECUACIÓN IMPLÍCITA PERMITE OBTENER DIRECTAMENTE EL VECTOR NORMAL:

$$Ax + By + C = 0 \Longrightarrow \text{vector normal } \overrightarrow{v_\perp}(A, B)$$

2.6. Distancia de un punto a una recta.

Dada una recta en forma general: r: Ax + By + C = 0, y un punto $P(a, b)$, queremos obtener la distancia de P a r. Se podría resolver con los siguientes pasos:

1. Construir recta $r_{\perp P}$ perpendicular a r pasando por P.
2. Obtener intersección $P' = r \cap r_{\perp P}$.
3. Calcular la distancia $dist(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$

Es un proceso algo laborioso. Existe una fórmula sencilla y útil para ahorrar esfuerzo:

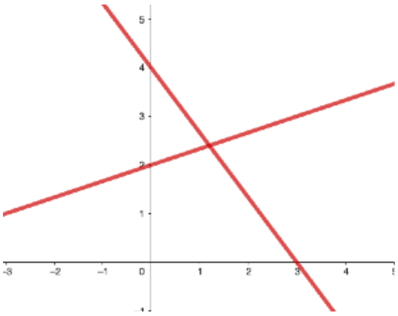
DISTANCIA PUNTO RECTA $\text{dist}(P, r) = \dfrac{|A \cdot a + B \cdot b + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Ejemplo. Calcular la distancia del punto $P(-2,7)$ a la recta $r : 5x - 8y + 4 = 0.$

Usamos la fórmula: $\text{dist}(P, r) = \dfrac{|5 \cdot (-2) + (-8) \cdot 7 + 4|}{\sqrt{5^2 + (-8)^2}} = \dfrac{62}{\sqrt{89}} \approx 7{,}1$

2.7. Posiciones relativas. Paralelismo. Ángulo entre rectas.

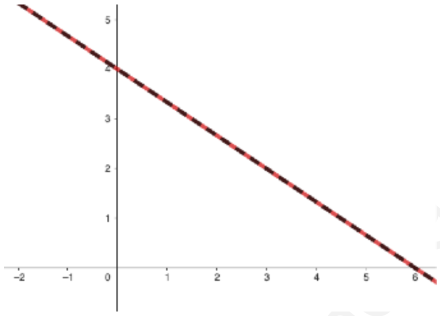
Las rectas ya se conocen y manejan desde la ESO. Resolver sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas tiene una interpretación gráfica, dependiendo de las soluciones que se obtengan:



- RECTAS SECANTES.
- SOLUCIÓN ÚNICA
- SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (SCD)

EJ. $\begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ 2x + 3y - 12 = 0 \end{cases}$

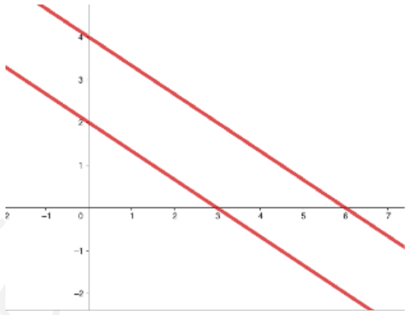
SOL: $(2, \frac{7}{3})$



- RECTAS COINCIDENTES.
- INFINITAS SOLUCIONES
- SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (SCI)

EJ. $\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0 \\ 4x + 6y - 24 = 0 \end{cases}$

SOL: $0 = 0 (\infty)$



- RECTAS PARALELAS.
- NO HAY SOLUCIÓN
- SISTEMA INCOMPATIBLE (SI)

EJ. $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ 2x + 3y - 12 = 0 \end{cases}$

SOL: –

Para **estudiar posiciones relativas**, se puede:

1. **Resolver sistema de ecuaciones** implícitas o explícitas y decidir según las soluciones (SCD - solución única - secantes; SCI - infinitas - coincidente; SI - no hay - paralelas).

2. Comparar vectores de dirección, vectores normales o pendientes

1. $\vec{v_r} \nparallel \vec{v_s} \implies secantes$ (SCD, solución única) $\qquad (m_r \neq m_s)$

2. $\vec{v_r} \parallel \vec{v_s} \implies \begin{cases} paralelas\,.\,P \in r \implies P \in s \\ coincidentes\,.\,P \in r \text{ pero } P \notin s \end{cases} \quad (m_r = m_s)$

(distinguimos paralelas de coincidentes usando un punto de r; si también está en s (cumple la ecuación al sustituir), serán coincidentes, pero si no está en s, serán paralelas)

Ejemplo 1: En las gráficas anteriores:

Primera: $\vec{v_r}(3,1) \nparallel \vec{v_s}(-3,2)$ (secantes) $\qquad (\frac{1}{3} \neq -\frac{2}{3}$, pero $-\frac{2}{3} \neq -\frac{6}{4})$

Segunda: $\vec{v_r}(-3,2) \parallel \vec{v_s}(-6,4)$ (paralelas o coincidentes).$(0,4) \in r, s$ (coincidentes)

Tercera: $\vec{v_r}(-3,2) \| \vec{v_s}(-6,4)$ (paralelas o coincidentes). $(0,2) \in r$ pero $\notin s$ (paralelas)

Ejemplo 2. Comprobar paralelismo de vectores.

¿Son paralelos $\vec{u} = (6{,}12)\ y\ \vec{v} = (-4, -8)$?

Opción 1: Comprobar $\vec{u} \perp \vec{v}_{\perp}$

(un vector paralelo a otro, es perpendicular de su perpendicular; $\vec{v}_{\perp} = (8, -4)$).

$\vec{u} \cdot \vec{v}_{\perp} = (6 \cdot 8) + (12 \cdot -4) = 48 - 48 = 0 \Longrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}_{\perp} \Longrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$

Opción 2: Comprobar coordenadas proporcionales.

$$\frac{6}{-4} = \frac{12}{-8} \Longrightarrow -48 = -48 \Longrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}_{\perp} \Longrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$$

Opción 3. Buscar k **tal que** $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$

$$(6{,}12) = k \cdot (-4, -8) \Longrightarrow \begin{cases} 6 = -4k \Longrightarrow k = -\frac{3}{2} \\ 12 = -8k \Longrightarrow k = -\frac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$$

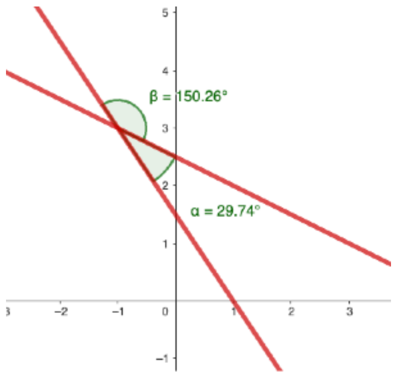
Ejemplo 3. Calcular el **ángulo entre las rectas** $r_1 : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$ y $r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \end{cases}$

Obtenemos los vectores directores: $\vec{v}_1 = (-2{,}1)$ y $\vec{v}_2 = (2, -3)$

Utilizamos el producto escalar para despejar el coseno:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|} = \frac{-7}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{-7}{\sqrt{65}} \Longrightarrow$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-7}{\sqrt{65}}\right)$$



$\alpha \approx 150°15'18''43$ pero damos el agudo: $\alpha = 29°44'41''$

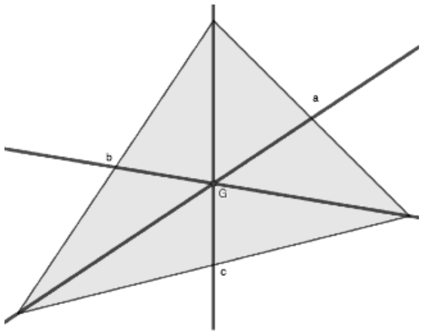
Ejemplo 4. Calcular el ángulo entre $r_1 : 5x - y + 4 = 0 \quad r_2 : y = 7$

Obtenemos los vectores directores: $\vec{v}_1 = (1{,}5) \qquad \vec{v}_2 = (1{,}0)$

Con el producto escalar: $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{26} \cdot 1} = \dfrac{1}{\sqrt{26}} \Longrightarrow \alpha = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{26}}\right)$

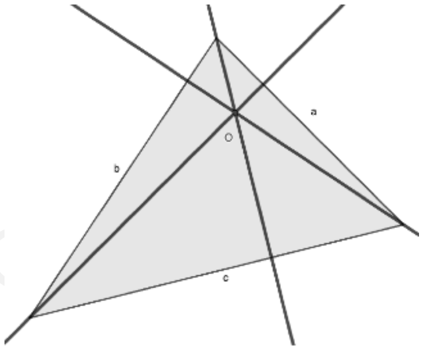
$$\alpha \approx 78°41'24''$$

2.10. Centros de un triángulo



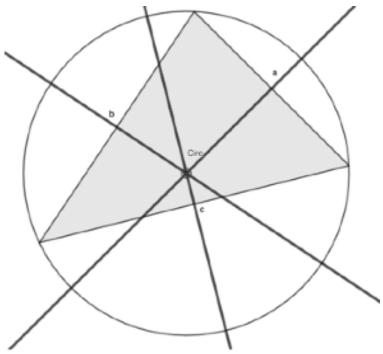
Las **medianas** son las rectas que pasan por un vértice y el punto medio del lado opuesto.

Se cortan en el **baricentro** (G) (es el centro de gravedad, y está situado a 2/3 partes del vértice y a 1/3 del lado opuesto). $G = \left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3}\right)$



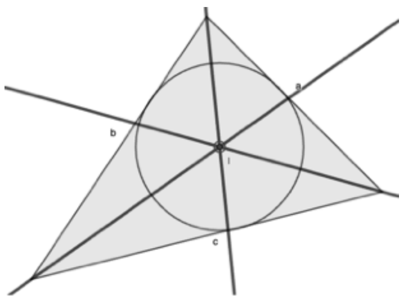
Las **alturas** son las rectas que pasan por un vértice y son ortogonales al lado opuesto.

Se cortan en el **ortocentro** (O). Puede estar fuera del triángulo.



Las **mediatrices** son las rectas que pasan por el punto medio de un lado y son ortogonales a ese lado.

Se cortan en el **circuncentro** (C) (centro de la circunferencia circunscrita).



Las **bisectrices** son las rectas que pasan por un vértice y dividen en dos partes iguales al ángulo presente en ese vértice. Cumplen que los puntos de la bisectriz equidistan de las rectas que forman el ángulo (útil para calcularlas sin ángulos, $dist(b, r_1) = dist(b, r_2)$)

Se cortan en el **incentro** (I) (centro de la circunferencia inscrita).

Dispondréis de ejemplos totalmente resueltos para su cálculo.

TEMA 5 - ANEXO

Centros de un triángulo (resueltos con detalle)

Ejercicios resueltos sobre obtención de las rectas notables y los centros de un triángulo.

Calculadora de centros de un triángulo:

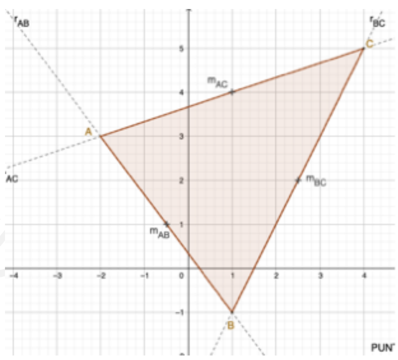
https://matematicasinteractivas.com/calculadora-de-centros-de-un-triangulo/

Dado el triángulo A(–2, 3), B(1, -1), C(4, 5) a) Calcula su baricentro. b) Calcula su ortocentro. c) Calcula su circuncentro. d) Calcula su área utilizando la fórmula usual (base·altura/2). e) Calcula su área utilizando la fórmula de Herón.

Para empezar estos ejercicios, recordad que estamos en geometría y es MUY IMPORTANTE tener presente qué es lo que estamos haciendo gráficamente. Así que lo ideal es que representéis en primer lugar los puntos y el triángulo.

Antes de empezar a contestar los apartados, hay una serie de preparativos que conviene hacer al principio, de forma que los tengamos ordenados y a la vista en todo momento.

PREPARATIVOS Y CÁLCULOS PREVIOS



VÉRTICES:

$\mathbf{A(-2,\ 3),\ B(1,\ -1),\ C(4,\ 5)}$

PUNTOS MEDIOS:

$\mathbf{M_{AB} = (-\frac{1}{2},\ 1),\ M_{BC} = (\frac{5}{2},\ 2), M_{AC} = (1,\ 4)}$

LADOS (direcciones y longitudes):

$$\overrightarrow{AB} = (3,\ -4) \implies |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \implies \mathbf{c = 5}$$
$$\overrightarrow{BC} = (3,\ 6) \implies |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \implies \mathbf{a = 3\sqrt{5}}$$
$$\overrightarrow{AC} = (6,\ 2) \implies |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \implies \mathbf{b = 2\sqrt{10}}$$

RECTAS (lados):

Recta AB:

$$r_{AB} : \left\{ \begin{matrix} PUNTO\ B(1,\ -1) \\ vector\ \overrightarrow{AB}(3, -4) \end{matrix} \right\} \implies \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-4} \implies \mathbf{4x + 3y - 1 = 0} \text{ -> } \textit{recta AB}$$

Recta BC:

$$r_{BC} : \left\{ \begin{matrix} PUNTO\ B(1,\ -1) \\ vector\ \overrightarrow{BC}(3,6) \equiv (1,2) \end{matrix} \right\} \implies \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} \implies \mathbf{2x - y - 3 = 0} \text{ -> } \textit{recta BC}$$

Recta AC:

$$r_{AC} : \left\{ \begin{matrix} PUNTO\ \ C(4,\ 5) \\ vector\ \overrightarrow{BC}(6,2) \equiv (3,1) \end{matrix} \right\} \implies \frac{x-4}{3} = \frac{y-5}{1} \implies \mathbf{x - 3y + 11 = 0} \text{ -> } \textit{recta AC}$$

Con estos cálculos ya tenemos lo que necesitamos para realizar los demás apartados.

a) Calcula su baricentro

El baricentro es el punto de corte de las medianas. Aunque para obtener la puntuación tenéis que calcular las medianas, recordad que existe un "truco" para calcular el baricentro, hacemos la media de las coordenadas de los vértices sumándolas y dividiendo entre 3, eso nos ayudará a saber si vamos por buen camino: $G = \left(\frac{-2+1+4}{3}, \frac{3+(-1)+5}{3}\right) = \left(\mathbf{1}, \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}\right)$. *Calculamos las medianas (unen cada vértice con el punto medio opuesto). Llega con dos, pero yo aquí calculo las 3 para que podáis comprobar.*

MEDIANAS:

Mediana C-M_AB:

$$m_{AB}: \left\{ \begin{array}{r} PUNTO\ C(4,\ 5) \\ vector\ \overrightarrow{CM_{AB}}\left(-\frac{9}{2}, -4\right) \equiv (9{,}8) \end{array} \right\} \Longrightarrow \frac{x-4}{9} = \frac{y-5}{8} \Longrightarrow \mathbf{8x - 9y + 13 = 0}$$

Mediana A-M_BC:

$$m_{BC}: \left\{ \begin{array}{r} PUNTO\ A(-2,\ 3) \\ vector\ \overrightarrow{AM_{AB}}\left(\frac{9}{2}, -1\right) \equiv (9, -2) \end{array} \right\} \Longrightarrow \frac{x+2}{9} = \frac{y-3}{-2} \Longrightarrow \mathbf{2x + 9y - 23 = 0}$$

Mediana B-M_AC:

$$m_{AC}: \left\{ \begin{array}{r} PUNTO\ B(1,\ -1) \\ vector\ \overrightarrow{BM_{AC}}\,(0{,}5) \equiv (0{,}1) \end{array} \right\} \Longrightarrow \text{recta vertical!} \Longrightarrow \mathbf{x = 1}$$

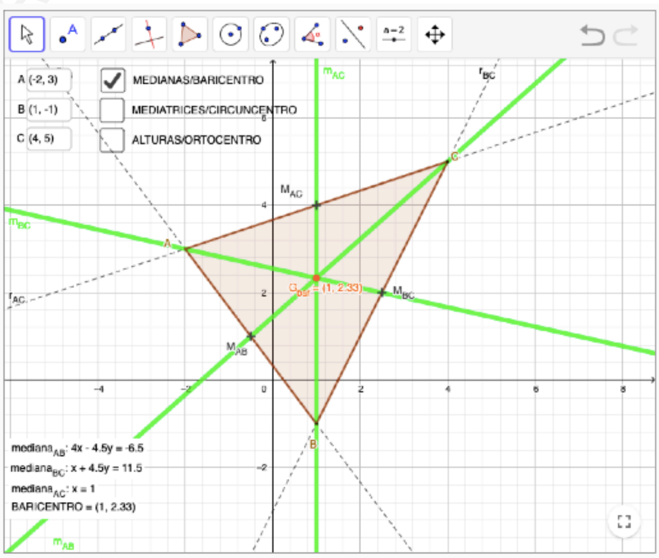
BARICENTRO:

El baricentro es el punto de corte de las medianas, podemos elegir las dos que queramos. Lo más sencillo en este caso es elegir x=1 con cualquier otra, por ejemplo 2x+9y-23=0, pero cualquier opción nos llevará al mismo resultado.

$$m_{AC} \cap m_{BC}: \left\{ \begin{array}{r} x = 1 \\ 2x + 9y - 23 = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow 2 \cdot 1 + 9y - 23 = 0 \Longrightarrow y = \frac{21}{9} = \frac{7}{3} \Longrightarrow \mathbf{G} = \left(\mathbf{1}, \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}\right)$$

GRÁFICA

Os dejo la representación gráfica. En el examen no se exigía, pero es MUY RECOMENDABLE que la hagáis para identificar posibles errores:



b) Calcula su ortocentro

El ortocentro es el punto de corte de las alturas (rectas por el vértice perpendiculares al lado opuesto). Llega con dos, pero yo aquí calculo las 3 para que podáis comprobar.

ALTURAS:

Altura sobre AB:

$$h_{AB}:\left\{\begin{matrix} PUNTO\ C(4,\ 5) \\ vector \perp \overrightarrow{AB}(4,3) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{x-4}{4}=\frac{y-5}{3} \Longrightarrow \mathbf{3x-4y+8=0}$$

Altura sobre BC:

$$h_{BC}:\left\{\begin{matrix} PUNTO\ A(-2,\ 3) \\ vector \perp \overrightarrow{BC}(6,-3)\equiv(2,-1) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{-1} \Longrightarrow \mathbf{x+2y-4=0}$$

Altura sobre AC:

$$h_{AC}:\left\{\begin{matrix} PUNTO\ B(1,\ -1) \\ vector \perp \overrightarrow{AC}(2,-6)\equiv(1,-3) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-3} \Longrightarrow \mathbf{3x+y-2=0}$$

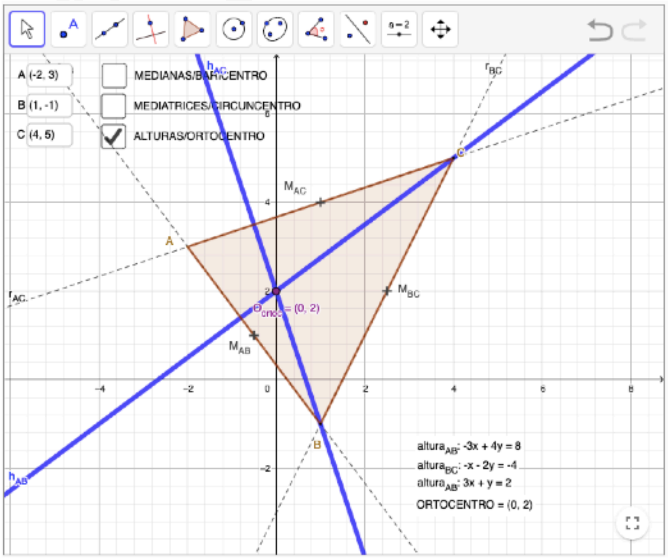
ORTOCENTRO:

Calculamos el ortocentro como punto de corte de dos de las alturas. Es cómodo con 1ª y 3ª por reducción:

$$h_{AB}\cap h_{AC}:\left\{\begin{matrix} 3x-4y+8=0 \\ 3x+y-2=0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow 2\cdot -5y+10=0 \Longrightarrow y=2 \Longrightarrow x=0 \Longrightarrow \mathbf{O}=(\mathbf{0},\ \mathbf{2})$$

GRÁFICA

Os dejo la representación gráfica. En el examen no se exigía, pero es MUY RECOMENDABLE que la hagáis para identificar posibles errores:



c) Calcula su circuncentro

El circuncentro es el punto de corte de las mediatrices (rectas por el punto medio de un lado y dirección perpendicular a ese lado). Llega con dos, pero yo aquí calculo las 3 para que podáis comprobar.

MEDIATRICES:

Mediatriz sobre AB:

$$MED_{AB}: \left\{ \begin{matrix} PUNTO\ M_{AB} = (-\frac{1}{2},\ 1) \\ vector \perp \overrightarrow{AB}(4,3) \end{matrix} \right\} \Longrightarrow \frac{x+\frac{1}{2}}{4} = \frac{y-1}{3} \Longrightarrow \mathbf{6x - 8y + 11 = 0}$$

Mediatriz sobre BC:

$$MED_{BC}: \left\{ \begin{matrix} PUNTO\ M_{BC} = (\frac{5}{2},\ 2), \\ vector \perp \overrightarrow{BC}(6,-3) \equiv (2,-1) \end{matrix} \right\} \Longrightarrow \frac{x-\frac{5}{2}}{2} = \frac{y-2}{-1} \Longrightarrow \mathbf{2x + 4y - 13 = 0}$$

Mediatriz sobre AC:

$$MED_{AC}: \left\{ \begin{matrix} PUNTO\ M_{AC} = (1,\ 4) \\ vector \perp \overrightarrow{AC}(2,-6) \equiv (1,-3) \end{matrix} \right\} \Longrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-3} \Longrightarrow \mathbf{3x + y - 7 = 0}$$

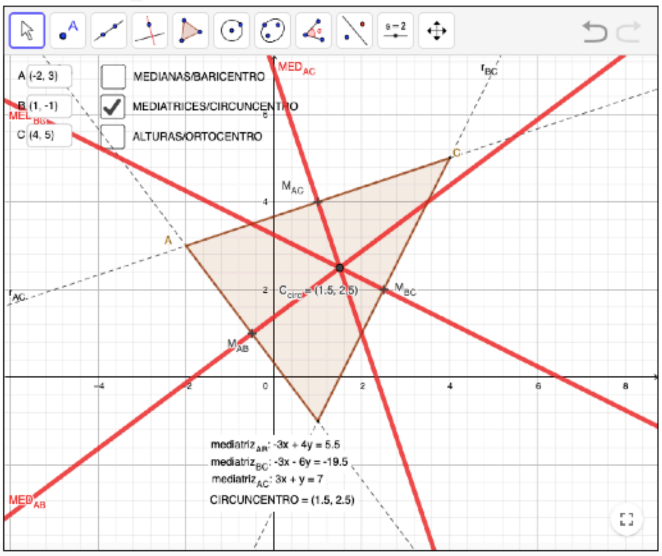
CIRCUNCENTRO:

Calculamos el circuncentro como punto de corte de dos de las mediatrices. Es cómodo con 1ª y 3ª por reducción:

$$MED_{AB} \cap MED_{AC}: \left\{ \begin{matrix} 6x - 8y + 11 = 0 \\ 3x + y - 7 = 0 \end{matrix} \right\} \Longrightarrow -10y + 25 = 0 \Longrightarrow y = \frac{5}{2} \Longrightarrow x = \frac{3}{2} \Longrightarrow \mathbf{C} = (\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}})$$

GRÁFICA

Os dejo la representación gráfica. En el examen no se exigía, pero es MUY RECOMENDABLE que la hagáis para identificar posibles errores:

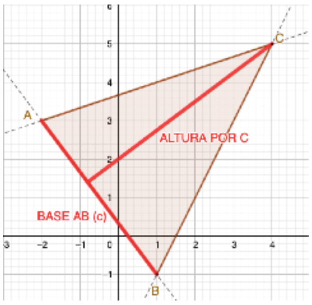


d) Calcula el área con la fórmula usual

El área se calcula con la fórmula $A = \dfrac{base \cdot altura}{2}$*. Para eso tenemos que diseñar la estrategia a seguir. ¿Qué base tomamos? Es MUY IMPORTANTE ver lo que vamos a hacer sobre la gráfica. Aquí resolveré las 3 opciones. Para la altura, usaremos la fórmula de distancia de un punto P a una recta r siendo* $P(a, b)$ *y*

$$r : Ax + By + C \quad : \quad dist(P, r) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

OPCIÓN 1. BASE AB (lado c)



BASE AB (c): $c = 5$ *(calculado en los preparativos)*

ALTURA POR C: se calcula como la distancia entre el punto C y la recta que pasa por AB (calculada en los preparativos).

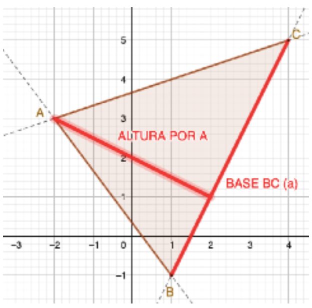
CALCULAMOS ALTURA:

(de preparativos): $\left\{ \begin{array}{r} r_{AB} : 4x + 3y - 1 = 0 \\ C(4,5) \end{array} \right\} \Longrightarrow dist(C, r_{AB}) = \dfrac{|4 \cdot 4 + 3 \cdot 5 - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{30}{5} = 6$

CALCULAMOS EL ÁREA:

$$\left\{ \begin{array}{r} \text{BASE: } c = 5 \\ \text{ALTURA: } h = 6 \end{array} \right\} \Longrightarrow \text{ÁREA} = \frac{\textbf{base} \cdot \textbf{altura}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{5 \cdot 6}}{\mathbf{2}} = \mathbf{15\ u^2}$$

OPCIÓN 2. BASE BC (lado a)



BASE BC (a): $a = 3\sqrt{5}$ *(calculado en los preparativos)*

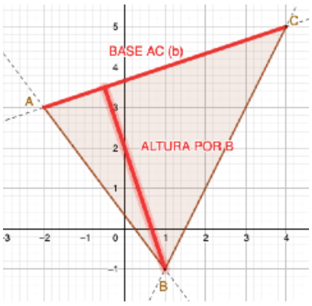
ALTURA POR A: se calcula como la distancia entre el punto A y la recta que pasa por BC (calculada en los preparativos).

CALCULAMOS ALTURA:

$$\left\{ \begin{array}{r} r_{BC} : 2x - y - 3 = 0 \\ A(-2,3) \end{array} \right\} \Longrightarrow dist(A, r_{BC}) = \frac{|2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{30}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

CALCULAMOS EL ÁREA:

$$\left\{ \begin{array}{r} \text{BASE: } a = 3\sqrt{5} \\ \text{ALTURA: } h = \dfrac{10}{\sqrt{5}} \end{array} \right\} \Longrightarrow \text{ÁREA} = \frac{\textbf{base} \cdot \textbf{altura}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{3\sqrt{5} \cdot \frac{10}{\sqrt{5}}}}{\mathbf{2}} = \mathbf{15\ u^2}$$



OPCIÓN 3. BASE AC (lado b)

BASE AC (b): $a = 2\sqrt{10}$ *(calculado en los preparativos)*

ALTURA POR B: se calcula como la distancia entre el punto B y la recta que pasa por AC (calculada en los preparativos).

CALCULAMOS ALTURA:

$$\left\{\begin{array}{r} r_{BC}: x - 3y + 11 = 0 \\ B(1, -1) \end{array}\right\} \Longrightarrow dist(A, r_{BC}) = \frac{|1\cdot 1 - 3\cdot(-1) + 11|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}}$$

CALCULAMOS EL ÁREA:

$$\left\{\begin{array}{r} \text{BASE: } a = 2\sqrt{10} \\ \text{ALTURA: } h = \dfrac{15}{\sqrt{10}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ÁREA} = \frac{\mathbf{base \cdot altura}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{2\sqrt{10} \cdot \frac{15}{\sqrt{10}}}}{\mathbf{2}} = \mathbf{15\ u^2}$$

e) Cálculo del área mediante la fórmula de Herón

La fórmula de Herón es: $A = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$ *donde s es el semiperímetro y a, b y c los lados.*

Este ejercicio es prácticamente de uso de calculadora con toda la precisión, ya que no tiene ningún razonamiento más allá de la fórmula.

En los preparativos tenemos calculados los lados:

$$a = 3\sqrt{5},\ b = 2\sqrt{10} \text{ y } c = 5.$$

Obtenemos el semiperímetro:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{10} + 5}{2} \approx 9{,}0164...$$

(su valor decimal queda almacenado en la tecla ANS de la calculadora.)

Posteriormente introducimos adecuadamente la fórmula en la calculadora:

$$\mathbf{A = \sqrt{ANS\cdot(ANS - 3\sqrt{5})\cdot(ANS - 2\sqrt{10})\cdot(ANS - 5)} = 15\ u^2}$$

TEMA 5 - EJERCICIOS

Geometría analítica (puntos y rectas)

Puntos, rectas y problemas métricos.

Ejercicio 1. PUNTOS ALINEADOS, PUNTO MEDIO, PUNTO SIMÉTRICO…

1.1. Averigua si están alineados los puntos $P(7,11)$, $Q(4,-3)$ y $R(10,25)$.
Sol: están alineados.

1.2. Calcula el valor de k para que los puntos de coordenadas $A(1,7)$, $B(-3,4)$, $C(k,5)$ estén alineados. Sol: $k=-\frac{5}{3}$

1.3. Dados los puntos $P(3,9)$ y $Q(8,-1)$:

a) Halla el punto medio de $\overline{PQ}$. Sol: $M=\left(\frac{11}{2},4\right)$

b) Halla el simétrico de P respecto de Q. Sol: $P'(13,-11)$

c) Halla el simétrico de Q respecto de P . Sol: $Q'(-2,19)$

d) Obtén un punto A de $\overline{PQ}$ tal que $\overline{PA}/\overline{AQ}=\frac{2}{3}$. Sol: $A(5,5)$

e) Obtén un punto B de $\overline{PQ}$ tal que $\overline{PB}/\overline{PQ}=\frac{1}{5}$. Sol: $B(4,7)$

1.4. Halla el punto simétrico de $P(1,-2)$ respecto del punto $H(3,0)$. Sol: $P'(5,2)$

1.5.. Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $A(1,2)$, $B(5,-1)$, $C(6,3)$. Represéntalo gráficamente. Sol: $D(2,6)$

1.6. Determina k para que los puntos $A(-3,5)$, $B(2,1)$ y $C(6,k)$ estén alineados.
Sol: $k=-\frac{11}{5}$

1.7. Determina los puntos que dividen al segmento AB, A(–2, 1), B(5, 4), en tres partes iguales. Sol: $P(1/3,2)$ $Q(8/3,3)$

1.8. Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo. Compruébalo con el cuadrilátero de vértices: $A(3,8)$ $B(5,2)$ $C(1,0)$ $D(-1,6)$
Sol: $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}(-1,4)$ $\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{RQ}=(-3,2)$

Ejercicio 2. ECUACIONES DE LA RECTA Y OBTENCIÓN DE RECTAS

2.1. Dados los siguientes datos a partir de los cuales se puede obtener una recta, obtén, en cada caso, las ecuaciones paramétricas, continua, punto pendiente, explícita e implícita (o general). Indica también la pendiente, un vector de dirección, un vector perpendicular, la ordenada en el origen y un punto adicional.

a) $\begin{cases} \text{punto } A(-3,7) \\ \text{dirección } \perp \overrightarrow{d_\perp}(7,4) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{punto } A(-3,7) \\ \text{dirección } \vec{d}(2,2) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{punto } P(5,-2) \\ \text{punto } Q(0,4) \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{punto } M(3,7) \\ \text{punto } Q(3,0) \end{cases}$

e) $\begin{cases} \text{punto } A(0,0) \\ \text{punto } B(7,0) \end{cases}$

f) $\begin{cases} \text{punto } R(1,1) \\ \text{punto } S(3,3) \end{cases}$

g) $\begin{cases} \text{pendiente } 3 \\ \text{ordenada en el origen } -5 \end{cases}$

sols

r	$\vec{v}$	$\overrightarrow{v_\perp}$	Paramétricas	Continua	Punto-Pendiente	Explícita	Implícita	m pte	n ord orig	Punto
(a)	(4, -7)	(7, 4)	x = -3 + 4t; y = 7 - 7t	(x+3)/4 = (y-7)/-7	y - 7 = (-7/4)(x + 3)	y = (-7/4)x + 7/4	7x + 4y - 7 = 0	-7/4	7/4	(1, 0)
(b)	(2, 2)-> (1,1)	(2, -2)	x = -3 + 2t; y = 7 + 2t	(x+3)/2 = (y-7)/2	y - 7 = 1·(x + 3)	y = x + 10	x - y + 10 = 0	1	10	(-1, 9)
(c)	(-5, 6)	(6, 5)	x = 5 - 5t; y = -2 + 6t	(x-5)/-5 = (y+2)/6	y + 2 = (-6/5)(x - 5)	y = (-6/5)x + 4	6x + 5y - 20 = 0	-6/5	4	(0, 4)
(d)	(0, -7)-> (0,1)	(1, 0)	x = 3; y = 7 - 7t	(x-3)/0 = (y-7)/-7 *	(no aplica; recta vertical)	(no aplica; x=3)	x - 3 = 0	∞	(no existe)	(-3,2)
(e)	(7, 0)-> (1,0)	(0, 1)	x = t; y = 0	(no continua común)*	y - 0 = 0·(x - 0)	y = 0	y = 0	0	0	(3, 0)
(f)	(2, 2)	(2, -2)	x = 1 + 2t; y = 1 + 2t	(x-1)/2 = (y-1)/2	y - 1 = 1·(x - 1)	y = x	x - y = 0	1	0	(2,2)
(g)	(1, 3)	(3, -1)	x = t; y = -5 + 3t	x/1 = (y+5)/3	y + 5 = 3(x - 0)	y = 3x - 5	3x - y - 5 = 0	3	-5	(1, -2)

2.2. Dadas las rectas $r_a : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$ y $r_b : \begin{cases} x = 1 - 4s \\ y = 4 + 3s \end{cases}$, obtén paramétrica e implícita de la recta:

a) paralela a r_a que pase por el punto $(5,7)$ Sol: $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases} \equiv x + 2y - 19 = 0$

b) perpendicular a r_b que pase por el punto $(0,0)$ Sol: $\begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \end{cases} \equiv 4x - 3y = 0$

2.3. Dadas las siguientes rectas dadas mediante una de sus ecuaciones, obtén, en cada caso, las ecuaciones paramétricas, continua, punto pendiente, explícita e implícita (o general). Indica también la pendiente, un vector de dirección, un vector perpendicular y la ordenada en el origen.

a) $5x - 3y + 8 = 0$

b) $\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

c) $y = 3x - 4$

d) $2x - y = 0$

e) $x - 7 = 0$

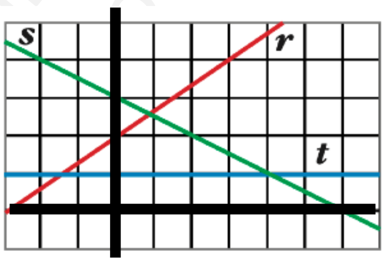
f) $3y - 6 = 0$

g) $x + 3y = 0$

sols-1

r	Paramétrica	Continua	Punto-pendiente	Explícita	Implícita	$\vec{v}$	$\overrightarrow{v_\perp}$	m	N
a	x = t; y = (5/3)t + 8/3	(x - 0)/3 = (y - 8/3)/5	y - 8/3 = (5/3)(x - 0)	y = (5/3)x + 8/3	5x - 3y + 8 = 0	(3,5)	(5,-3)	5/3	8/3
b	x = 5 - 3t; y = -1 + 2t	(x - 5)/-3 = (y + 1)/2	y + 1 = (-2/3)(x - 5)	y = (-2/3)x + 7/3	2x + 3y - 7 = 0	(-3,2)	(2,3)	-2/3	7/3
c	x = t; y = 3t - 4	(x - 0)/1 = (y + 4)/3	y + 4 = 3(x - 0)	y = 3x - 4	3x - y - 4 = 0	(1,3)	(3,-1)	3	-4
d	x = t; y = 2t	(x - 0)/1 = (y - 0)/2	y - 0 = 2(x - 0)	y = 2x	2x - y = 0	(1,2)	(2,-1)	2	0
e	x = 7; y = t	(no continua válida)	(no aplica, recta vertical)	(no aplica, recta vertical)	x - 7 = 0	(-0,1)	(1,0)	∞	-
f	x = t; y = 2	(no continua válida)	y - 2 = 0·(x - 0)	y = 2	3y - 6 = 0	(-1,0)	(-0,1)	0	2
g	x = t; y = -t/3	(x - 0)/3 = (y - 0)/-1	y - 0 = (-1/3)(x - 0)	y = (-1/3)x	x + 3y = 0	(3,-1)	(1,3)	-1/3	0

2.4. Escribe las ecuaciones explícitas de las rectas representadas en la gráfica:



Sols:

$r : y = \frac{2}{3}x + 2$

$s : y = \frac{-1}{2}x + 3$

$t : y = 1$

2.5. Halla la ecuación de la paralela a $r : 2x - 3y = 0$ cuya ordenada en el origen es -2.

NOTA: (cuando no se indica, en geometría, se utiliza la forma general o implícita)

Sol: 2x– 3y– 6 = 0

2.6. Dada la recta $4x + 3y - 6 = 0$, escribe la ecuación de la recta perpendicular a ella en el punto de corte con el eje de ordenadas. *Sol:* $3x - 4y + 8 = 0$

2.7. Halla k para que $S(-5,k)$ pertenezca a r: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$ *Sol:* $k = 10$

Ejercicio 3. POSICIONES RELATIVAS, DISTANCIAS Y ÁNGULOS

3.1. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas.
Si son secantes, calcula su punto de corte y el ángulo que forman (puedes calcular el ángulo que forman sus vectores normales).
Si son paralelas, calcula su distancia (obtén un punto de una de ellas dando valores)

a) $\begin{cases} 3x + 5y - 8 = 0 \\ 6x + 10y + 4 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 3y + 4 = 0 \\ 3x - 9y - 12 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + y + 3 = 0 \\ x - 2y + 16 = 0 \end{cases}$

Sol: a) paralelas $dist = \frac{10}{\sqrt{34}}$ b) secantes (4/3, 4/3) $\theta \approx 71.565°$

c) coincidentes d) secantes en (-2,7) $\theta \approx \arccos(3/\sqrt{130}) \approx 73.739°$

3.2. Justifica, razonando con los vectores directores, que las siguientes rectas son secantes, y calcula su punto de corte sustituyendo la paramétrica en la implícita o explícita y calculando el valor del parámetro:

a) $r_1 : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$ $r_2 : y = -3x + 9$

b) $r_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$ $r_2 : -2x + 3y - 1 = 0$

Sol: a) $t = 2 \implies (2,3)$ *b)* $t = -1 \implies (1,1)$

3.3. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas.
Si son secantes, calcula su punto de corte y el ángulo que forman (hazlo sin cambiar a otra ecuación de la recta, trabaja en paramétricas, igualando y calculando t y s).
Si son paralelas, calcula su distancia (para la distancia, pasa a implícita).

a) $r_a : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$ $r_b : \begin{cases} x = 1 - 4s \\ y = 4 + 3s \end{cases}$ b) $r_1 : \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$ $r_2 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 - 2s \end{cases}$

c) $r_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ $r_3 : \begin{cases} x = 5 + 3s \\ y = -5 - 6s \end{cases}$ d) $r_3 : \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -5 - 6t \end{cases}$ $r_4 : \begin{cases} x = 5 - 2s \\ y = -12 + 4s \end{cases}$

Sols: a) secantes, $\cap (-15,16)$, $\alpha = 10°18'17''4$

b) secantes, $\cap (2,1)$, $\alpha = 32°28'16''29$

c) coincidentes d) paralelas, $dist(r_3, r_4) = \frac{7}{\sqrt{5}}$

3.4. Halla la distancia de $Q(-3,4)$ a las siguientes rectas:

a) $2x + 3y = 4$ b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5}$ c) $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - 6t \end{cases}$ d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

Sols: a) $\frac{2\sqrt{13}}{13} = 0{,}55$ b) $\frac{20\sqrt{29}}{29} = 3{,}71$ c) $\frac{13\sqrt{10}}{10} = 4{,}11$ d) $\frac{7\sqrt{13}}{13} = 1{,}94$

Ejercicio 4. SIMÉTRICO RESPECTO A RECTA. PROBLEMAS DE RECTAS

4.1. Calcula el simétrico de $A(6,3)$ respecto a la recta $r: x+2y-2=0$. *Sol* $A'(2,-5)$

4.2. Calcula el simétrico de $P(1,1)$ respecto a la recta $x-2y-4=0$. Sol: $P'(3,-3)$

4.3. Calcula el simétrico del punto $(2,-5)$ respecto a la recta $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{-1}$. Sol: $P'(6,3)$

4.4. Calcula el simétrico de $A(4,-2)$ respecto a la recta $r: \dfrac{x-3}{2}=-y+1$. Sol: $P'(6,2)$

Para calcular un punto simétrico respecto a una recta:

1º. Construye recta $r_\perp : \begin{cases} punto\ P \\ vector \perp r \end{cases}$

2º. Calcula el corte $M = r \cap r_\perp$

3º. Usa la fórmula del punto medio (M punto medio de P y P')

Puedes comprobar o generar más ejercicios desde aquí: https://www.geogebra.org/m/hncghsha

---

4.5. Halla la ecuación explícita de una recta que pase por $A(2,-3)$ y forme un ángulo de 45 grados con la recta de ecuación $r: 3x-y+3=0$.

Sol: (i) $y=-2x+1$, *(ii)* $y=\frac{1}{2}x-4$.

NOTA: Para el vector de la recta tenemos dos opciones:

A) Usar el vector $\vec{v}(1,k)$ *y el producto escalar para ángulos para calcular k (igual que en ejercicios anteriores).*

B) Usar la fórmula (que no hemos tratado en los apuntes) $\tan\alpha = \left|\dfrac{m_2-m_1}{1-m_2m_1}\right|$

4.6. Calcula la ecuación continua de una recta perpendicular a $y=2x+1$ y pase por el punto $P(2,-1)$. *Sol:* $x+2y=0$

4.7. Dadas las rectas: $\begin{cases} r: (x,y)=(2,-1)+t(1,-3), t\in\mathbb{R} \\ s: \text{paralela a la recta: } x+y-1=0 \text{ y pasa por } A(5,2) \end{cases}$

a) Calcula la posición relativa de las dos rectas y el ángulo que forman.

b) Calcula la ecuación de una recta que pase por un punto de la recta $\begin{cases} x=1-2t, \\ y=-t, \end{cases}$ y que forme 45° con la recta s.

Sol: a) secantes (-1,8), $\alpha=26°56$ $x+2y=0$ *b) y=t*

Ejercicio 5. CENTROS TRIÁNGULO, MEDIATRIZ, MEDIANA, ALTURA, BISECTRIZ.

NOTA: La fórmula de Herón permite calcular el área de un triángulo conocidos los lados a, b, c*. El semiperímetro es* $s = \frac{a+b+c}{2}$*. El área:* $A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$*)*

En todos los ejercicios debes realizar la representación gráfica de cada apartado.

Puedes obtener las soluciones en:

[matematicasinteractivas.com - centros de un triángulo]

5.1. Dado el triángulo formado por los vértices A(2, 4), B(6, -2), C(-6, -4)
a) Calcula su baricentro. b) Calcula su circuncentro. c) Calcula su ortocentro.
d) Calcula su área utilizando la fórmula usual (base·altura/2). Compruébalo con la fórmula de Herón usando la calculadora.

5.2. Dado el triángulo formado por los vértices A(2, 5), B(–4, –1), C(0, 1)
a) Calcula su baricentro. b) Calcula su circuncentro. c) Calcula su ortocentro.
c) Calcula su área utilizando la fórmula usual (base·altura/2). Compruébalo con la fórmula de Herón usando la calculadora.

5.3. Dado el triángulo formado por los vértices. A(-4, 0), B(–2, 6), C(2, 2)
a) Calcula su baricentro. b) Calcula su circuncentro. c) Calcula su ortocentro.
c) Calcula su área utilizando la fórmula usual (base·altura/2). Compruébalo con la fórmula de Herón usando la calculadora.

5.4. Dado el triángulo formado por los vértices A(-2, 4), B(2, 0), C(2, 2):
a) Calcula su baricentro. b) Calcula su circuncentro. c) Calcula su ortocentro.
d) Calcula el área del triángulo utilizando la fórmula usual (base·altura/2). Compruébalo con la fórmula de Herón usando la calculadora.

5.5. Dado el triángulo formado por los vértices A(–2, 4), B(–4, 0), C(2, 2)
a) Calcula su baricentro. b) Calcula su circuncentro. c) Calcula su ortocentro.
c) Calcula su área utilizando la fórmula usual (base·altura/2). Compruébalo con la fórmula de Herón usando la calculadora.

5.6. Obtén las bisectrices de los pares de rectas: $(dist((x, y), r_1) = dist((x, y), r_2))$

a) $r : y = 2$ y $s : 3x + 4y + 10 = 0$ Sol: $x + 3y = 0$ $3x - y + 20 = 0$

b) $r : y = 2$ y $s : 4x - 3y + 1 = 0$ Sol: $4x + 2y - 9 = 0$ $4x - 8y + 11 = 0$

c) $r : y = 2$ y $s : 3x - 4y + 14 = 0$ Sol: $3x + y + 4 = 0$ $x - 3y + 8 = 0$

d) $r_1 : 2x + y - 8 = 0$ y $r_2 : x - 2y + 16 = 0$ Sol: $3x + y - 8 = 0$ $x + 3y + 24 = 0$

TEMA 6 - APUNTES

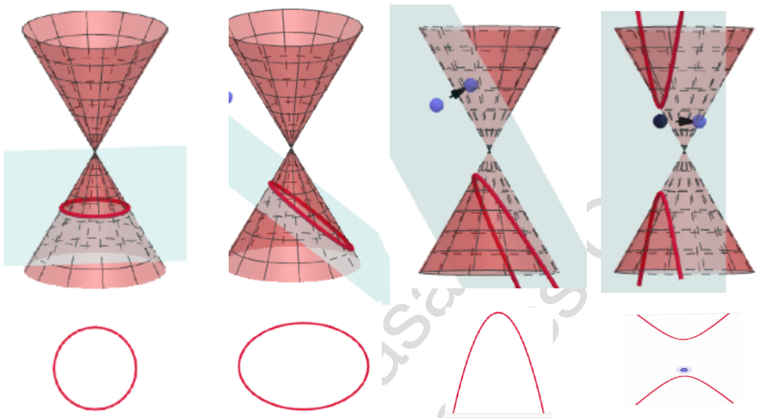
Geometría analítica (cónicas)

Circunferencia y cónicas.

3. Cónicas.

Las cónicas son las curvas que se obtienen al cortar un cono con un plano presentado en distintas inclinaciones: **circunferencia**, **elipse**, **parábola** e **hipérbola.** Más allá de su atractivo geométrico, son esenciales porque explican fenómenos en campos muy diversos: órbitas planetarias, diseño de antenas parabólicas y arcos elípticos… Conocer sus propiedades y ecuaciones nos permite entender mejor la relación entre la geometría y el mundo real, donde estas curvas aparecen de forma natural y recurrente.

CÓNICAS POR EXCENTRICIDAD:



SECCIONES CÓNICAS: CIRCUNFERENCIA, ELIPSE, PARÁBOLA E HIPÉRBOLA. FUENTE: ÁLGEBRA LINEAL II. LUIS FUENTES. UDC.

3.1. Introducción histórica a las cónicas y aplicaciones

De nuevo, es en la Grecia clásica en donde encontramos las primeras referencias a las cónicas. **Apolonio de Perga** (s. III a.C.) fue quien realizó la obra más influyente: en su tratado “Las Cónicas” se nombran por primera vez la parábola, la hipérbola y la elipse, y se analizan sus propiedades. De ahí procede la denominación “secciones cónicas”.

Con el desarrollo de la geometría analítica de **Descartes** (s. XVII), se avanza en el estudio de las ecuaciones de las cónicas y sus fundamentos algebraicos. Desde entonces, son numerosos los campos en los que se utilizan:

- **Astronomía: Johannes Kepler** (s. XVII) descubrió que la trayectoria de los planetas es una elipse con el Sol en uno de sus focos. Posteriormente, se comprobó que los cometas siguen trayectorias elípticas, parabólicas o hiperbólicas.

ÓRBITAS DE LOS PLANETAS

- **Ingeniería y arquitectura**: muchas estructuras se diseñan usando cónicas por sus propiedades, que proporcionan muchas ventajas técnicas (estructurales y de construcción). Algunos ejemplos que pueden resultar familiares son el puente colgante de San Francisco (Golden Gate) o las torres de enfriamiento de centrales térmicas (por ejemplo, la de As Pontes).

GOLDEN GATE

TORRES ENFRIAMIENTO

- **Propiedades derivadas de la reflexión en cónicas. Telecomunicaciones**: las antenas parabólicas concentran o emiten señales dirigiéndolas hacia un foco, aprovechando las propiedades reflectoras de las cónicas. **Generación de calor**: el mismo principio se usa para cocinas parabólicas o encendedores solares de supervivencia, también se especula con la posibilidad de que Arquímedes quemara barcos romanos enemigos con espejos que concentraban la energía solar. **Óptica, iluminación y medicina:** espejos y focos elípticos y parabólicos, como pueden ser los sistemas que usan dentistas y cirujanos, automoción, faros…

REFLEXIÓN CÓNICAS PAULO.GAL

VÍDEO: COCINA SOLAR

VÍDEO: BILLAR ELÍPTICO

VÍDEO: CANASTA QUE SIEMPRE ENCESTA

- **Física y trayectorias:** los movimientos de proyectiles (en ausencia de resistencia del aire y bajo la acción de la gravedad) se describen con parábolas (como el arco que describe el agua en una fuente). Las aplicaciones van mucho más allá y las encontramos en muchos posibles campos: estudio de ondas, radiación, aeronáutica…

FUENTE PARABÓLICA

TIRO PARABÓLICO EN BALONCESTO

CÓNICAS EN GEOGEBRA. NAVARRA.

CÓNICAS. PAULO.GAL

3.2. Circunferencia (puntos que equidistan del centro).

Definición. Lugar geométrico de los puntos ($P(x, y)$) del plano cuya distancia (r,radio) a un punto fijo (centro (a, b)) es constante.

Ecuación reducida. $\text{dist}\big(P, (a, b)\big) = r \implies \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \implies$

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Ecuación general (desarrollada).

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2 \implies x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$$\boxed{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}$$

Donde $A = -2a, \quad B = -2b, \quad C = a^2 + b^2 - r^2$.

Así, se puede calcular el centro y el radio mediante las expresiones:

$$a = -\frac{A}{2}, \quad b = -\frac{B}{2}, \quad r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}.$$

Pero es más recomendable el método de completar cuadrados (igualdades notables):

Identificar: Los coeficientes de x^2 e y^2 deben ser iguales, si es el caso, factor común.

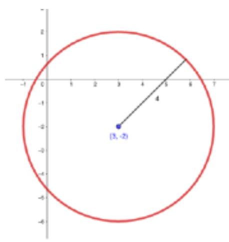
Paso de general a reducida (obtención de centro y radio) **completando cuadrados**

Ejemplo 3.2.1. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$, obtener centro, radio y ecuación reducida.

$(x^2 - 6x + \ldots) + (y^2 + 4y + \ldots) - 3 = 0 \implies$

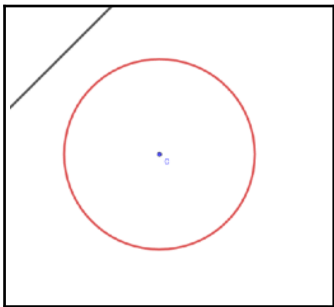
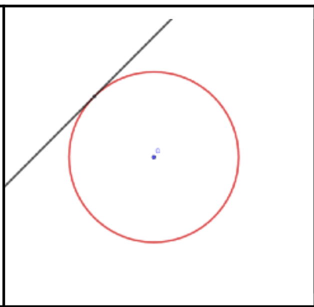
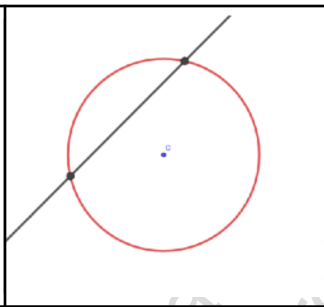
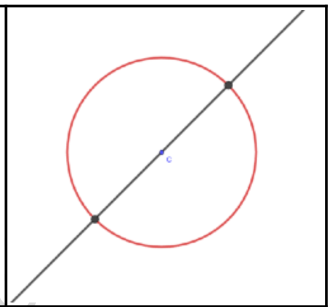
$\implies (x^2 - 6x + \mathbf{9}) + (y^2 + 4y + \mathbf{4}) - 3 - \mathbf{9} - \mathbf{4} = 0 \implies$

$\implies (x - \mathbf{3})^2 + (y + \mathbf{2})^2 = \mathbf{16} \begin{cases} \text{centro: } (3, -2) \\ \text{radio } r = 4 \end{cases}$



Posiciones relativas de recta y circunferencia

Para estudiar la posición relativa entre una recta y una circunferencia se puede medir la distancia del centro C a la recta r y compararla con el radio R. Si también queremos saber los puntos de corte en el caso de que sean secantes, se resuelve el sistema de ecuaciones no lineal formado por las ecuaciones de la recta y de la circunferencia.

			
EXTERIORES	**TANGENTES**	**SECANTES**	**SECANTE POR EL CENTRO**
Sin punto de corte	Un punto de corte	Dos puntos de corte	Dos puntos de corte, centro en la recta
Sistema sin solución (incompatible)	Solución única	Dos soluciones	Dos soluciones
Distancia al centro mayor que el radio dist$(C, r) > R$	Distancia al centro igual al radio dist$(C, r) = R$	Distancia al centro menor que el radio dist$(C, r) < R$	Distancia al centro nula dist$(C, r) = 0$

Ejemplo 3.2.2. Estudia la posición relativa de la recta $s: y = x$ respecto la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

Completamos cuadrados: $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 16 \Longrightarrow \begin{cases} centro\ (4, -1) \\ radio\ 4 \end{cases}$

Con $\begin{cases} C(-4,1) \\ s: x - y = 0 \end{cases}$ **estudiamos dist(C, s):**

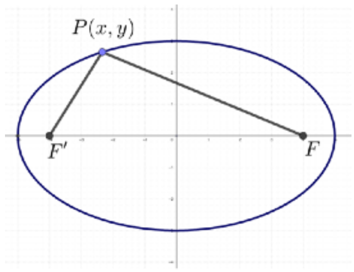
$$\text{dist}(C, s) = \frac{|1 \cdot (-4) - 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3{,}5 < 4 \Longrightarrow \textbf{SECANTES}$$

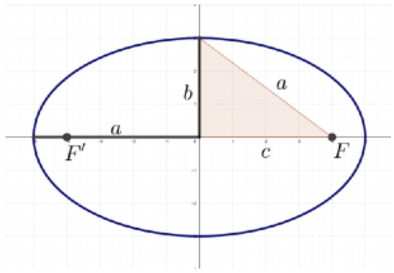
Puntos de corte: Resolver $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0 \\ y = x \end{cases}$. Por sustitución:

$$x^2 + x^2 - 8x + 2x + 1 = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 6x + 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} (2{,}82\ ,\ 2{,}82) \\ (0{,}48\ ,\ 0{,}48) \end{cases}$$

3.3. Elipse. Suma de distancias a dos focos, fija.

Definición. Lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (focos F y F') es constante e igual a eje mayor $(2a)$

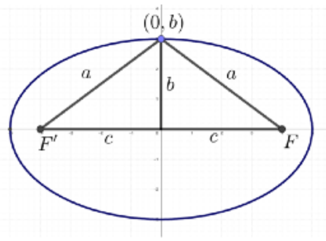




dist$(P, F) +$ *dist*$(P, F') = 2a$

Elementos de una elipse. Consideremos una elipse con centro en el origen $O(0,0)$

- a: semieje mayor. • b: semieje menor.
- c: distancia centro-foco (semidistancia focal)
- Si a > b, la elipse tiene orientación “horizontal”.
- Si b > a, orientación “vertical”. (Si a=b, circunferencia)



Focos y vértices (para la elipse horizontal con centro $O(0,0)$:

- Focos: $F'(-c,0)$ $\quad F(c,0)$.
- Vértices del eje mayor:$(a,0)$ $\quad (-a,0)$.
- Vértices del eje menor: $(0,b)$ $\quad (0,-b)$.

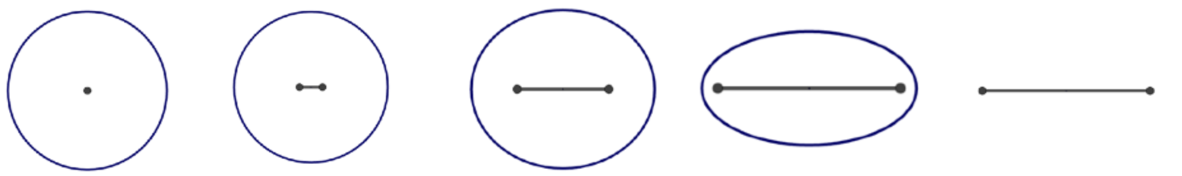
Se cumple $a^2 = b^2 + c^2$ (basta situarse en (0,b), las distancia a los focos es 2a, y aplicamos Pitágoras en uno de los triángulos rectángulos de hipotenusa a)

Excentricidad:

$$e = \frac{c}{a}, \quad 0 \le e < 1$$

EXCENTRICIDAD ELIPSE

Es una medida de la deformación de la elipse desde la circunferencia hasta un segmento:



$e = 0$ CIRCUNFERENCIA

$e \approx 0$ ELIPSE PRÓXIMA A CIRCUNFERENCIA

$e \approx 0{,}5$ ELIPSE DE EXCENTRICIDAD MEDIA

$e \approx 0{,}9$ ELIPSE MUY EXCÉNTRICA (ALARGADA)

$e = 1$ ELIPSE DEGENERADA A SEGMENTO

Ecuación reducida. Elipse con centro en el origen $O(0,0)$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

DEMOSTRACIÓN: (no es necesario saberla, pero a nivel formativo conviene entenderla)

$$\text{dist}(P,F)+\text{dist}(P,F')=2a \Longrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2} \Longrightarrow \quad \text{(elevando al cuadrado)}$$

$$\Longrightarrow (x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2 \Longrightarrow \text{(desarrollo)}$$

$$\Longrightarrow \cancel{x^2}-2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \Longrightarrow \qquad \text{(dividimos :(-4))}$$

$$\Longrightarrow cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \Longrightarrow \qquad \text{(elevando al cuadrado)}$$

$$\Longrightarrow (cx+a^2)^2=a^2\left((x+c)^2+y^2\right) \Longrightarrow \qquad \text{(desarrollando)}$$

$$\Longrightarrow c^2x^2+\cancel{2a^2cx}+a^4=a^2x^2+\cancel{2a^2cx}+a^2c^2+a^2y^2 \Longrightarrow \text{(reagrupando)}$$

$$\Longrightarrow a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2 \Longrightarrow \qquad \text{(factor común)}$$

$$\Longrightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \Longrightarrow \qquad \text{(sustituyendo } a^2-c^2=b^2\text{)}$$

$$\Longrightarrow b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \Longrightarrow \qquad \text{(dividiendo por } a^2b^2\text{)}$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \textbf{C.Q.D.}$$

Ecuación reducida. Elipse con centro en el origen $C(x_0,y_0)$ (traslación)

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

NOTA: Una elipse se orienta verticalmente cuando a y b intercambian papeles (semieje mayor bajo x y semieje menor bajo y). Todo se razona análogamente.

Ejemplo 3.3.1. Haz el estudio de la elipse $x^2 + 4y^2 - 8y = 0$, identificando todos sus elementos característicos.

ECUACIÓN REDUCIDA: Sacamos factor común a y, y completamos cuadrados:

$$x^2 + 4(y^2 - 2y + \ldots)\ldots = 0 \implies x^2 + 4(y^2 - 2y + 1) - 4 = 0 \implies$$

Dividimos entre 4 la ecuación: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{1} = 1$

Comparando con la ecuación reducida, identificamos: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

· Centro $(0,1)$

· Semieje mayor $a^2 = 4 \to a = 2$ · Semieje menor $b^2 = 1 \to b = 1$

· Semidistancia focal: $c^2 = a^2 - b^2 = 2^2 - 1 = 3 \implies c = \sqrt{3}$

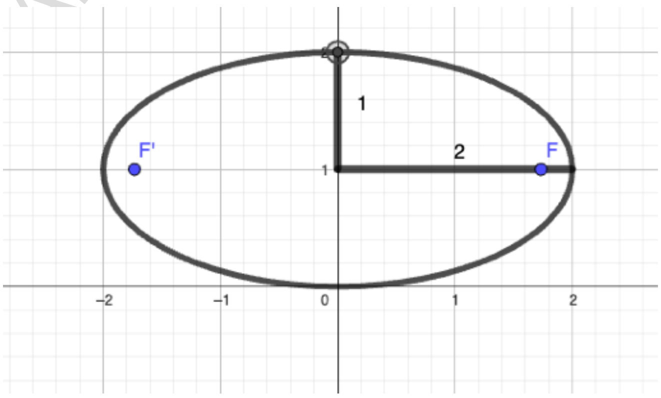
· Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ (elipse excéntrica "alargada" $e \approx 1$)

· Focos (desde el centro, nos movemos c a la izquierda y a la derecha)

$F(\sqrt{3},1) \qquad F'(-\sqrt{3},1)$

· Vértices: (desde el centro, nos movemos el semieje mayor en horizontal, el menor en vertical…): $(-2,1)$, $(2,1)$, $(0,0)$, $(0,2)$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA



Identificar ecuación general (desarrollada): $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

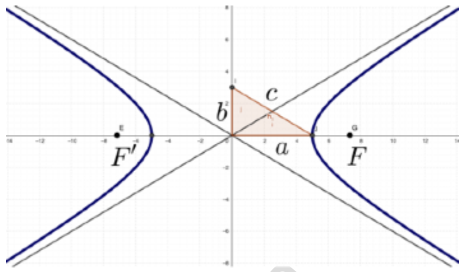
($A \neq B$, A y B mismo signo)

3.3. Hipérbola

Definición. Lugar geométrico de los puntos donde la diferencia de distancias a los dos focos es constante. $\left| d(P, F_1) - d(P, F_2) \right| = 2a$

Ecuación reducida (centro en el origen):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Ecuación reducida (centro en $P(x_0, y_0)$):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Elementos de una hipérbola centrada en $O(0,0)$:

- a: semieje. • b: (ver dibujo). • k=2a: constante
- c: distancia centro-foco (semidistancia focal)
- $r : \frac{b}{a}x$ y $r' : -\frac{b}{a}x$ asíntotas
- Focos: $F'(-c,0)$ $F(c,0)$.

EXCENTRICIDAD HIPÉRBOLA

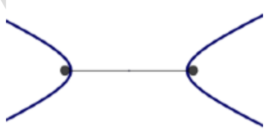
EXCENTRICIDAD COMBINADA

Se cumple $c^2 = a^2 + b^2$ (c hace de hipotenusa, en la elipse era a)

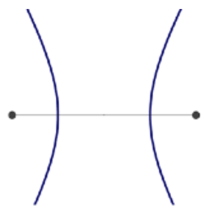
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$, $e > 1$

Es una medida de la deformación de la hipérbola (se va abriendo al aumentar):

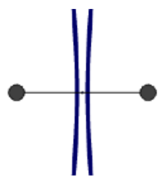
$e = 1$
CERRADA A SEGMENTO



$e \approx 1$
HIPÉRBOLA CERRADA (ASÍNTOTAS DE PENDIENTE PEQUEÑA)



e MEDIA
SE ABRE (LAS ASÍNTOTAS ABREN LA PENDIENTE)

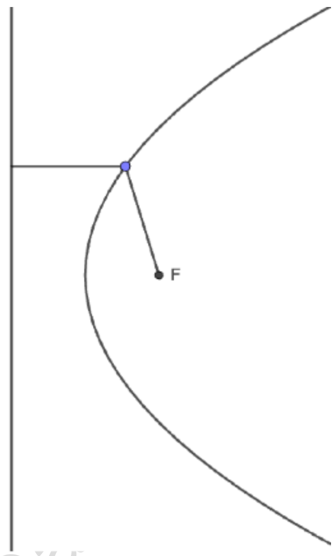


e ALTA
ABIERTA ACERCÁNDOSE A MEDIATRIZ (ASÍNTOTAS CASI VERTICALES)

Identificar ecuación general (desarrollada): $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$

(A y B distinto signo)

3.4. Parábola



Definición. Lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto llamado foco (F) y una recta llamada directriz (d) d:

$dist(P,F) = dist(P,d)$

Elementos:

Vértice V(0,0) Foco $F(\frac{p}{2},0)$

Directriz $d : x = -\frac{p}{2}$

p: distancia del foco a la dire

Ecuación reducida (vértice en el origen): $y^2 = 2px$

DEMOSTRACIÓN: Usamos $dist(P,F) = dist(P,d)$:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} = x+\frac{p}{2} \Rightarrow x^2 \cancel{+\frac{p^2}{4}} - px + y^2 = x^2 \cancel{+\frac{p^2}{4}} + px \Rightarrow y^2 = 2px$$

Ecuación reducida (centro en $P(x_0, y_0)$): $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$

Identificar ecuación general (desarrollada):

$$Ax^2 + Cx + Dy + E = 0 \qquad \text{o} \qquad By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

(solo un término al cuadrado)

TEMA 6 - EJERCICIOS

Geometría analítica (cónicas)

Circunferencia y cónicas.

Ejercicio 1. CIRCUNFERENCIAS: ECUACIONES, CENTRO y RADIO

1.1. Calcula el centro y el radio de la circunferencia $4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y + 15 = 0.$

Sol: (1/2,-2) r=$\sqrt{2}/2$

1.2. Escribe la ecuación de las circunferencias que verifican las siguientes condiciones:

a) De centro el punto $C(-3,1)$ y radio $r = 4.$ Sol: $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$

b) Uno de sus diámetros es el segmento de extremos $A(-2,0)$ y $B(4, -2)$

Sol: $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 8 = 0$

1.3. Identifica cuáles de las curvas representadas por las siguientes ecuaciones son circunferencias y calcula, si es posible, su centro y su radio:

a) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y + 14 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 6x = 0$ c) $x^2 + y^2 = 9$

Sol: a) C(1,-2) $r = 1/\sqrt{3}$ b) C(3,0) $r = 3$ c) C(0,0) $r = 3$

1.4. Estudia en cada caso si el punto P es interior, exterior o pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x = 0.$ a) $P(2,4)$ b) $P(2,2)$ c)$P(2,5)$

Sol:centro (5,0) radio 5 a) pertenece b) interior 3,6 c) exterior 5,8

Ejercicio 2. RECTAS TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA

NOTA: La distancia del centro a la tangente en un punto, es el radio.
La tangente a una circunferencia en un punto es perpendicular al radio sobre ese punto.

2.1. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto $C(1,4)$ y es tangente a la recta $r : 3x + 4y - 4 = 0.$ Sol: $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$ $r = 3$

2.2. Calcula las tangentes a las siguientes circunferencias en el punto dado:

a) $x^2 + y^2 = 26$ en $P(-1,5).$ Sol: $x - 5y + 26 = 0$

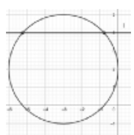
b) $3x^2 + 3y^2 - 4x + 17y + 23 = 0$ en $P(1, -2)$ Sol: $2x + 5y + 8 = 0$

2.3. Dada la circunferencia $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$, calcula las ecuaciones de sus tangentes paralelas a la recta $r : 3x + 4y - 16 = 0$

Sol:r=5 C(-3,1) v(3,4) $3x + 4y - 20 = 0; 3x + 4y + 30 = 0$

Ejercicio 3. POSICIÓN RELATIVA Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA

3.1. Una circunferencia de centro O(-3,2) es tangente al eje de ordenadas.



a) Calcula la ecuación de la circunferencia en forma desarrollada

b) Obtén los puntos de corte de la circunferencia con la recta y=4.

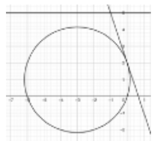
c) Represéntalas gráficamente

Sol: $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$;$x = -3 \pm \sqrt{5}$

3.2. Dadas la circunferencia C y la recta r: $\begin{cases} C: x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0 \\ r: 3x + y - 2 = 0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación de la circunferencia en forma reducida, indica su centro y su radio.

b) Estudia la posición relativa entre recta y circunferencia, calculando los puntos de corte entre ambas si los hay.



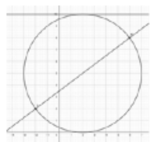
c) Estudia la posición relativa entre la circunferencia y la recta y=5.

d) Representa gráficamente la circunferencia y ambas rectas.

Sol: $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 10$*, tangente corte (0,2), exterior*

3.3. Dadas la circunferencia C y la recta r: $\begin{cases} C: x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0 \\ r: 3x - 4y + 14 = 0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación de la circunferencia en forma reducida, indica su centro y su radio.



b) Estudia la posición relativa entre recta y circunferencia, calculando los puntos de corte entre ambas si los hay.

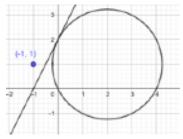
c) Estudia la posición relativa entre la circunferencia y la recta y=10.

d) Representa gráficamente la circunferencia y ambas rectas.

Sol: $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$*, diámetro corte (-2,2) y (6,8), tangente*

3.4. Una circunferencia de centro O(2,1) es tangente a la recta de ecuación

$r : 2x - y + 2 = 0$



a) Calcula el radio de la circunferencia C. *Sol:* $r = \sqrt{5}$

b) Obtén la ecuación de la circunferencia en forma desarrollada.

Sol: $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

c) Obtén las coordenadas del punto de tangencia.

Sol: $(0,2)$

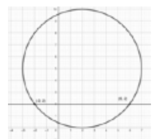
d) Determina la posición relativa del punto (-1,1) respecto a la circunferencia.

Sol: exterior

3.5. a) Obtén en forma desarrollada la ecuación de la circunferencia C que tiene como centro el punto (2, 5) y es tangente al eje de abscisas.

Sol: $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$

b) Calcula los puntos de corte de C con la recta r: y=2.



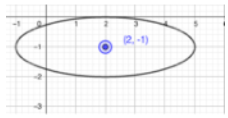
Sol:(-2,2) (6,2)

c) Representa gráficamente la situación.

Ejercicio 4. CÓNICAS

4.1. Dadas las cónicas:

$$\begin{aligned} a &: x^2 + 9y^2 - 4x + 18y + 4 = 0 \\ b &: y^2 - 8x - 2y - 15 = 0 \\ c &: x^2 - 4y^2 + 2x + 24y - 39 = 0 \\ d &: x^2 + y^2 + 8x - 2y + 13 = 0 \end{aligned}$$

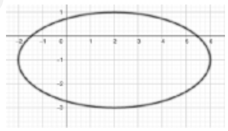


a) Determina el tipo de cónica en cada caso.
b) Obtén la ecuación reducida de la cónica a y obtén e interpreta su excentricidad.
c) Realiza una representación gráfica aproximada de la cónica a.

Sol: a) elipse, parábola, hipérbola, circunferencia, $\frac{(x-2)^2}{9} + (y+1)^2 = 1 \; e \approx 0.943$ *(alargada)*

4.2. Dadas las cónicas:

$$\begin{aligned} a &: x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 4 = 0 \\ b &: x^2 + y^2 + 8x - 2y + 13 = 0 \\ c &: x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 8 = 0 \\ d &: y^2 - 8x - 2y - 15 = 0 \end{aligned}$$

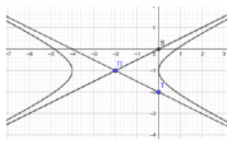


a) Determina el tipo de cónica en cada caso.
b) Obtén la ecuación reducida de la cónica c y obtén e interpreta su excentricidad.
c) Realiza una representación gráfica aproximada de la cónica c

Sol: a) hipérbola, circunferencia, elipse, parábola, $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \; e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{12}}{4} \approx 0.866$ *(alargada)*

4.3. Dadas las cónicas:

$$\begin{aligned} a &: x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 8 = 0 \\ b &: y^2 - 8x - 2y - 15 = 0 \\ c &: x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 4 = 0 \\ d &: x^2 + y^2 + 8x - 2y + 13 = 0 \end{aligned}$$



a) Determina el tipo de cónica en cada caso.
b) Obtén la ecuación reducida de la cónica c y obtén e interpreta su excentricidad.
c) Realiza una representación gráfica aproximada de la cónica c.

Sol: a) elipse, parábola, hipérbola,,circunferencia, $\frac{(x+2)^2}{4} - (y+1)^2 = 1 \; e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.118$ *(cerrada)*

TEMA 7a - INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES. REPASO 4ºESO

Análisis. Funciones. Repaso conceptos básicos.

1. Introducción histórica: de las funciones al análisis.

Las funciones constituyen la base para comprender los modelos matemáticos actuales en prácticamente todas las ciencias. Veamos la evolución histórica que nos ayuda a entender cómo se ha llegado a la forma en que las conocemos hoy.

1.1. Orígenes en la Antigüedad, Edad Media y Renacimiento

Los matemáticos griegos y babilonios ya abordaban, antes de que se formalizase el concepto moderno de función, problemas que hoy interpretaríamos con esta herramienta: las relaciones geométricas y proporcionales en problemas de áreas, volúmenes y progresiones son precursoras de las idea de función como relación entre magnitudes variables. **Arquímedes** anticipó el concepto de límite y de cálculo de áreas por aproximación.

MÉTODO EXHAUSTIVO DE ARQUÍMEDES

Durante la **Edad Media**, los avances se centraron en la resolución de problemas prácticos, como el cálculo de áreas y la astronomía, donde se empezaron a identificar patrones que relacionaban variables.

En el **Renacimiento**, el redescubrimiento de textos clásicos y la expansión del conocimiento en Europa impulsaron el estudio sistemático de estas relaciones matemáticas, sentando las bases para un análisis más formal de las funciones.

1.2. Consolidación del Concepto de Función: nacimiento del cálculo

En el **siglo XVII**, surge una revolución del conocimiento matemático al intentar desarrollar herramientas para el estudio del cambio en fenómenos físicos y naturales, como el movimiento, las fuerzas, etc. **Leibniz** introdujo los términos “función”, “variable”, “constante” y “parámetro” que utilizamos con frecuencia hoy en día. Junto con **Newton**, desarrolló las bases del cálculo diferencial e integral, y, por tanto, de las herramientas para poder estudiar con precisión esos cambios. **Euler**, en el **siglo XVIII**, introduce la notación $f(x)$.

En el **XIX**, **Cauchy** establece los conceptos rigurosos de límite y continuidad (que veremos algo más adelante). Y **Dirichlet**, considerado el padre de las funciones en su sentido actual, define, por fin, una función f como "una regla que asigna a cada número x en un conjunto dado D un número único $f(x)$". Aparecen, de esta forma, las ideas de dominio, imagen, y la caracterización que permite considerar funciones a relaciones que van más allá de las que se pueden expresar con fórmulas.

Con la definición de Dirichlet, y el desarrollo de la teoría de conjuntos de **Cantor**, se generalizan las funciones a relaciones entre objetos no necesariamente numéricos y otros matemáticos como **Bolzano** o **Weierstrass** avanzan en su estudio de forma más completa y rigurosa. Nace así el análisis matemático, uno de los cuatro bloques que trabajamos en bachillerato junto con álgebra, geometría y estadística, y uno de los pilares de la matemática actual para completar y avanzar en el conocimiento matemático puro, y para modelizar y resolver problemas en todas las áreas del conocimiento.

2. Definición de función y notación. Formas de representación.

Se llama **función** f de un conjunto $D = Dom(f)$ (dominio) a un conjunto $I = Im(f)$ (imagen) a una relación que asigna a cada valor $x \in D$ un único valor $f(x) \in I$.

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & I \\ & x & \longrightarrow & f(x) \end{array}.$$

Como nosotros vamos a trabajar con funciones que transforman números reales en otros números reales, ($D \subset \mathbb{R}$ e $I \subset \mathbb{R}$), escribimos:

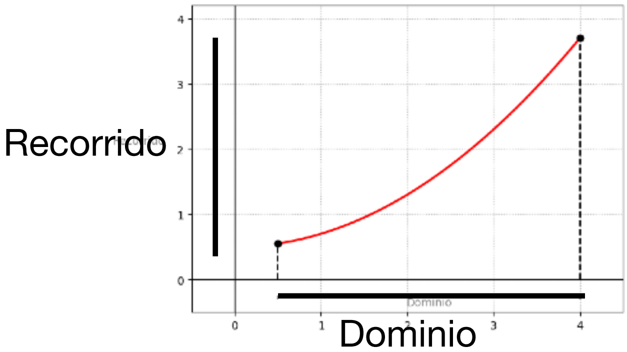
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f(x) \end{array}.$$

x se llama **variable independiente** e $y = f(x)$ **variable dependiente.**

(el valor de y depende del valor de x, que se toma libremente)

(x se representa en el eje de abscisas (horizontal) e y en el de ordenadas (vertical)

El **dominio** $D = Dom(f)$ es el conjunto de valores para los que está definida la función, y la **imagen** $I = Im(f)$ es el conjunto de valores que toma como resultado al aplicarla.



2.1. Formas de representar una función. Ejemplos.

Una función se puede describir de las siguientes maneras:

Expresión Analítica: definida a a través de una fórmula.

Por ejemplo, $f(x) = -x^2 + 1$. A cada valor x le asignamos, calculando, su $f(x)$

$$
\begin{array}{cccc}
f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longrightarrow & f(x) = x^2 + 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
-1 & \longrightarrow & f(-1) = \mathbf{0} & (f(-1) = -(-1)^2 + 1 = \mathbf{0}) \\
0 & \longrightarrow & f(0) = \mathbf{1} & (f(0) = -0^2 + 1 = \mathbf{1}) \\
 & \vdots & & \\
2 & \longrightarrow & f(2) = -\mathbf{3} & (f(2) = -2^2 + 1 = -\mathbf{3})
\end{array}
$$

Tabla de Valores: la asociación de valores se puede expresar en una tabla. Desde una función dada como expresión analítica se puede obtener también una tabla.

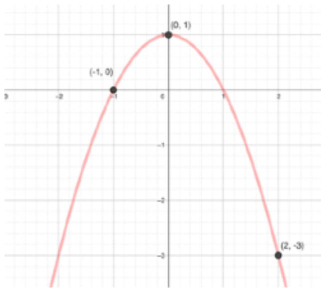
Por ejemplo, de la expresión analítica anterior, se obtiene la siguiente tabla de valores:

x	$f(x)$
-1	0
0	1
2	-3

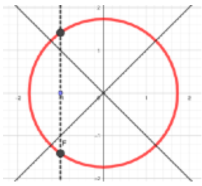
Nota: una tabla de valores cumpliendo la condición de que a cada x se le asigna un único $f(x)$, es también una función aunque no se corresponda con una expresión analítica.

Gráfica: representación en el plano, donde a cada x le corresponde un punto $(x, f(x))$.

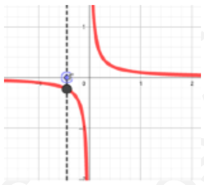
En el ejemplo, asociado a la tabla, representamos los puntos $(x, f(x))$: $(-1,0)$, $(0,1)$, $(2,3)$. Con más puntos, podemos ir dibujando la gráfica de la función (línea roja).



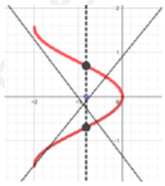
La gráfica, al igual que la tabla, no tiene por qué ser la representación de una fórmula concreta, aunque ese es el caso en el que nos centraremos. Para que se ajuste a la definición (para cada x, un único valor de $f(x)$), no se consideran funciones aquellas gráficas que tengan varios valores en una misma vertical:



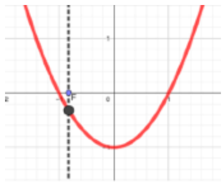
NO ES FUNCIÓN



SÍ ES FUNCIÓN



NO ES FUNCIÓN



SÍ ES FUNCIÓN

2.2. Funciones elementales

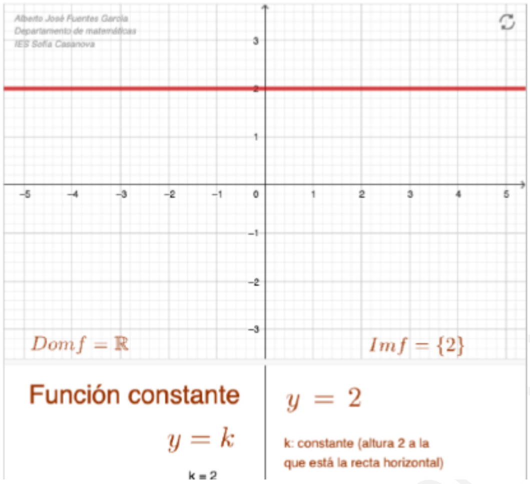
Son las funciones fundamentales con las que construiremos otras más complejas a través de su combinación mediante composición. Es esencial conocerlas profundamente.

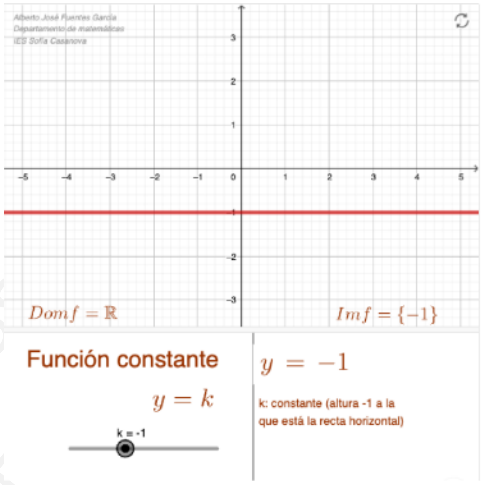
2.2.1. Funciones Polinómicas $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Su dominio siempre es $Dom\ f = \mathbb{R}$

Función constante (grado 0): $f(x) = k \quad Im\ f = \{k\}$

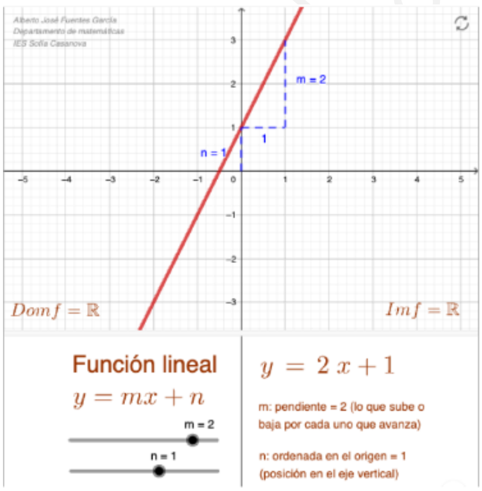
Gráfica: recta horizontal a altura k

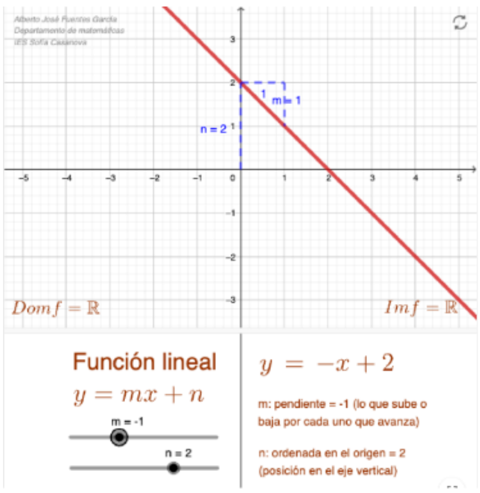




Función lineal (grado 1): $f(x) = mx + n \qquad Im\ f = \mathbb{R}$

Gráfica: recta de pendiente m y ordenada en el origen n (punto $(0,\ n)$)





Se representa muy rápido de forma intuitiva con los puntos $(0,\ n)$ *y* $(1, n+m)$

Pendiente: $m = \dfrac{\text{"lo que sube (o baja)"}}{\text{"lo que avanza"}} = \dfrac{\text{"lo que sube (o baja)"}}{\text{"unidad que avanza"}}$ *(desde un punto de la recta, avanza* $(1,m)$*)*

Función cuadrática (grado 2) $f(x) = ax^2 + bx + c$

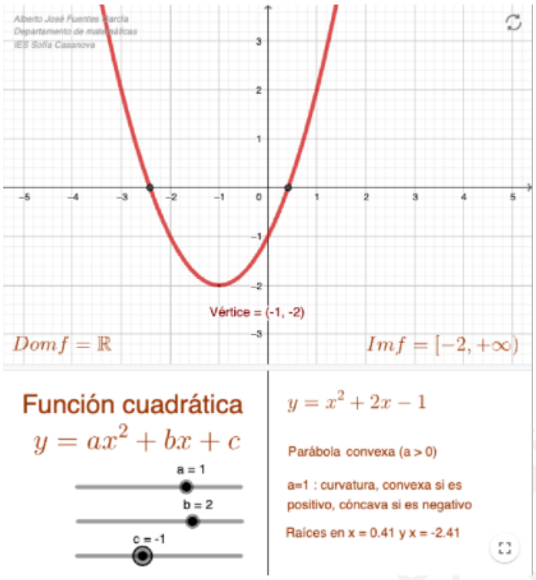
$Dom\ f = \mathbb{R}$ (la imagen va desde el vértice hasta + o - ∞)

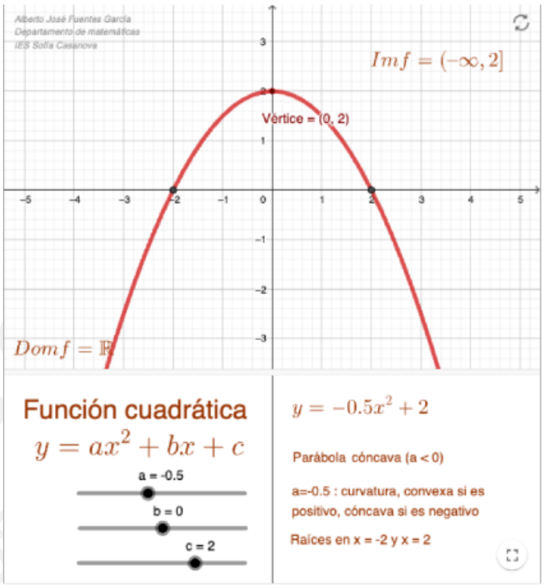
Gráfica: parábola de orientación vertical. Para representarla, se estudia:

- Cortes con los ejes: $\begin{cases} \text{EJE Y}: x = 0 \implies y = c\ (0,c) \\ \text{EJE X}: y = 0 \implies \text{resolver } ax^2 + bx + c = 0 \end{cases}$

- Vértice en $x_v = \dfrac{-b}{2a}$ (el valor y_v se calcula sustituyendo en $f(x_v)$)

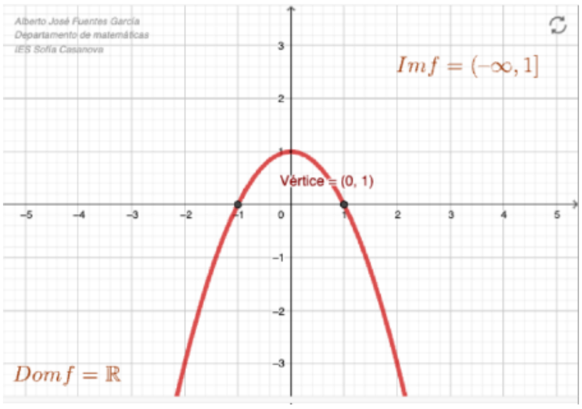
- Curvatura: $\begin{cases} \text{cóncava si } a < 0\ (\cap) \\ \text{convexa si } a > 0\ (\cup) \end{cases}$





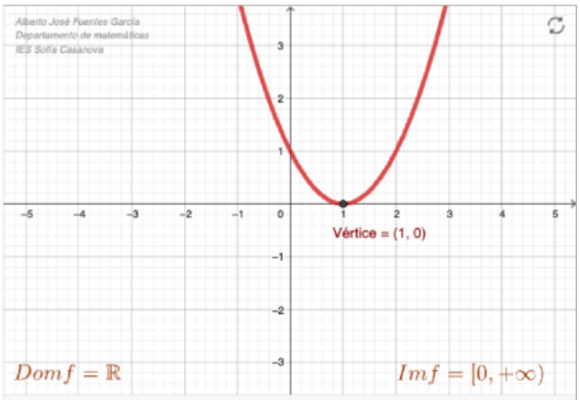
Muchas de las parábolas que aparecen en ejercicios de bachillerato se pueden representar fácilmente mediante traslaciones de las funciones $y = x^2$ e $y = -x^2$

$f(x) = -x^2 + 1$



TRASLACIÓN VERTICAL +1 DE $-x^2$

$f(x) = (x-1)^2$

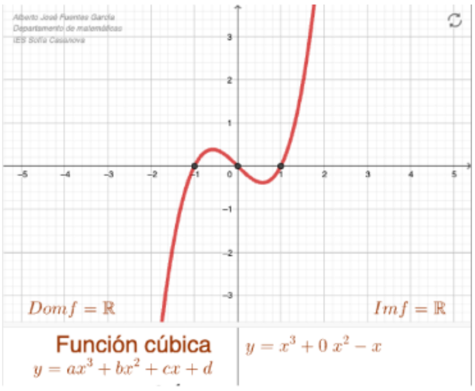


TRASLACIÓN HORIZONTAL +1 DE x^2

Funciones polinómicas (grado ≥ 3)

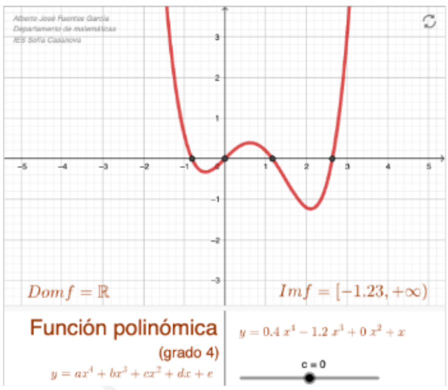
A medida que subimos el grado del polinomio, veremos que se forman ondulaciones adicionales. Esto permite aproximar, mediante funciones polinómicas sencillas, otras funciones mucho más complejas (Series de Taylor, exceden el nivel del bachillerato).

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$



FUNCIÓN CÚBICA

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

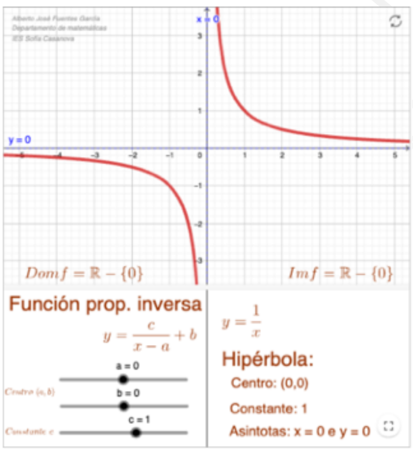


FUNCIÓN POLINÓMICA DE GRADO 4

2.2.2. Funciones Racionales

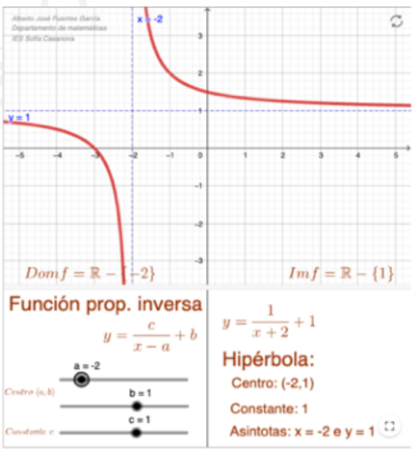
Son aquellas cuya expresión es un cociente de polinomios. Aparecen huecos en el dominio (aquellos puntos que anulan el denominador). En esos puntos habrá asíntotas verticales (rectas verticales a las que se acerca la función).

$$f(x) = \frac{a}{x}$$



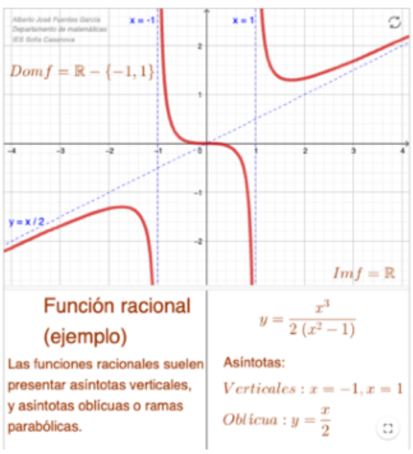
FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA CON $a > 0$ (HIPÉRBOLA) SI $a < 0$ CAMBIAN DE SENTIDO (LO QUE ESTÁ DEBAJO DEL EJE PASA ARRIBA, Y VICEVERSA)

$$f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$$



TRASLACIÓN -2H +1V DE $f(x) = 1/x$ (HIPÉRBOLA)

$$f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 2}$$



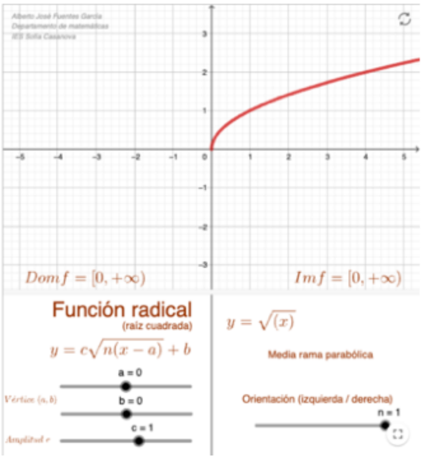
FUNCIÓN RACIONAL GENERAL, CON VARIAS ASÍNTOTAS. APRENDEREMOS A REPRESENTARLAS ESTE CURSO

2.2.3. Funciones Radicales $f(x) = \sqrt[n]{x}$

Tienen x dentro de una raíz. Las de índice par no pueden contener valores negativos, por lo que hay que estudiar su dominio (en las de índice impar el dominio es $\mathbb{R}$).

La gráfica de $f(x) = x^2$ es media rama parabólica (la parábola entera no será función con orientación horizontal)

$f(x) = \sqrt{x}$

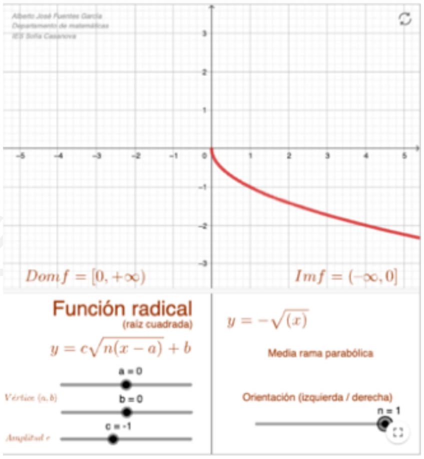


LA FUNCIÓN RADICAL BÁSICA

$f(x) = \sqrt{-x}$

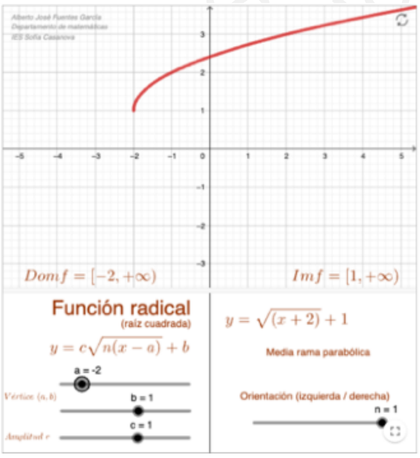
SI CAMBIA EL SIGNO A X, CAMBIA ORIENTACIÓN (VA A LA IZQUIERDA)

$f(x) = -\sqrt{x}$



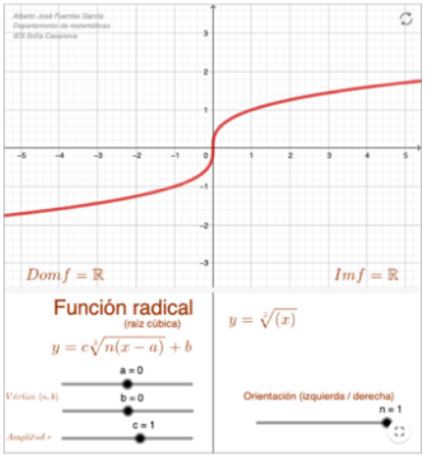
SI DELANTE DE LA RAÍZ HAY UN MENOS, ES LA RAMA INFERIOR

$f(x) = \sqrt{x+2} + 1$



TRASLACIÓN -2H +1V DE $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$



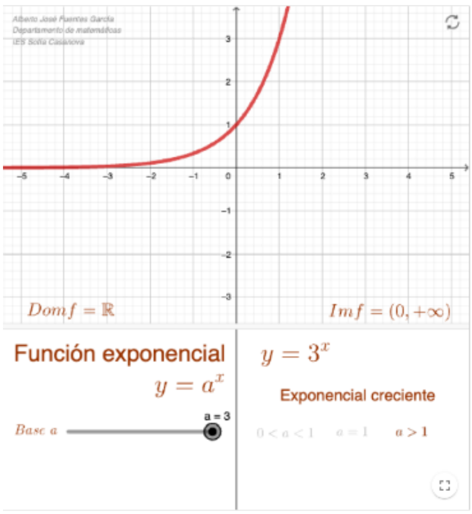
RAÍZ CÚBICA

2.2.4. Función exponencial $\quad f(x) = a^x \quad a > 0,\ a \neq 1$

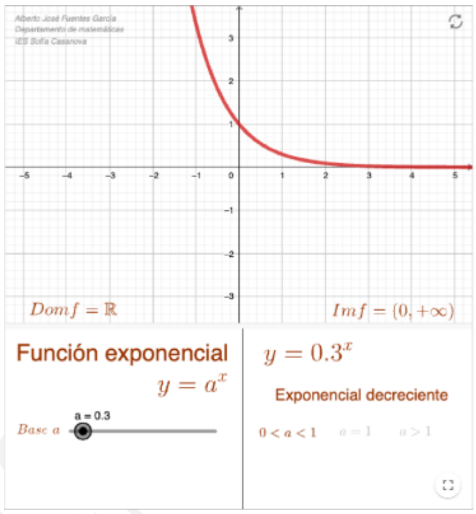
Tienen x en el exponente, con base a numérica. Se caracteriza por un fuerte crecimiento para los valores de x positivos y asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ (si $a > 1$).

Si $0 < a < 1$ cambia la orientación. El dominio es $\mathbb{R}$, y la imagen $(0, +\infty)$.

$f(x) = a^x,\ a > 1$



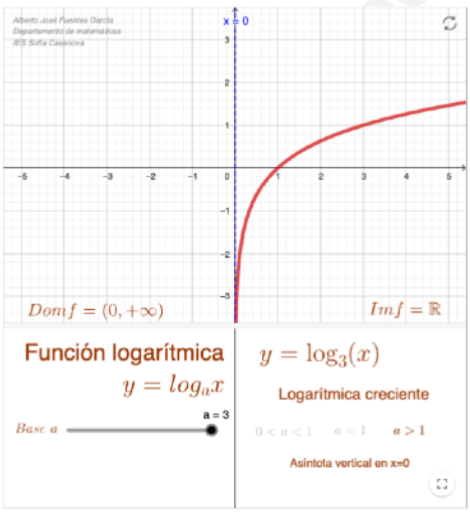
$f(x) = a^x,\ 0 < a < 1$



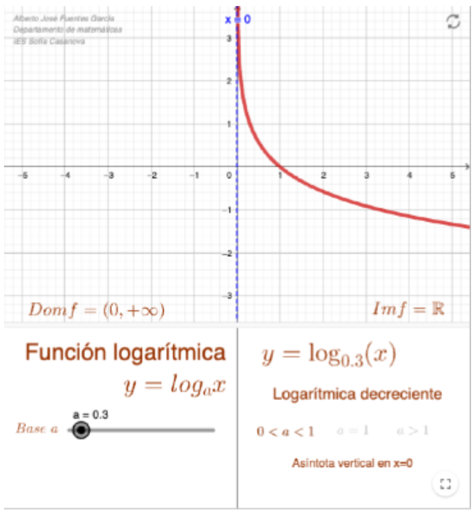
2.2.5. Función logarítmica $\quad f(x) = \log_a x \quad a > 0,\ a \neq 1$

Tiene una asíntota vertical en $x = 0$. Solo existe logaritmo de números positivos, por lo que el dominio es $(0, +\infty)$, la imagen es $\mathbb{R}$.

$f(x) = \log_a x,\ a > 1$



$f(x) = \log_a x,\ 0 < a < 1$



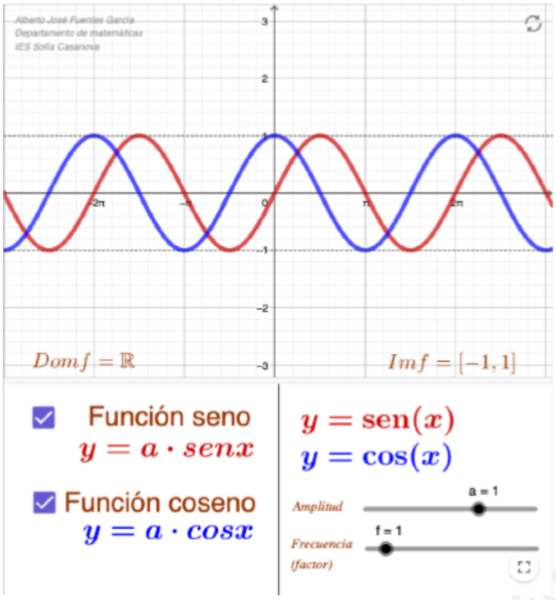
Nota: no confundir con la radical. Se distingue porque la logarítmica tiene asíntota, mientras que la radical acaba de forma abrupta en el vértice.

2.2.6. Funciones trigonométricas

Se caracterizan por ser funciones periódicas (se repite la gráfica cada cierto intervalo).

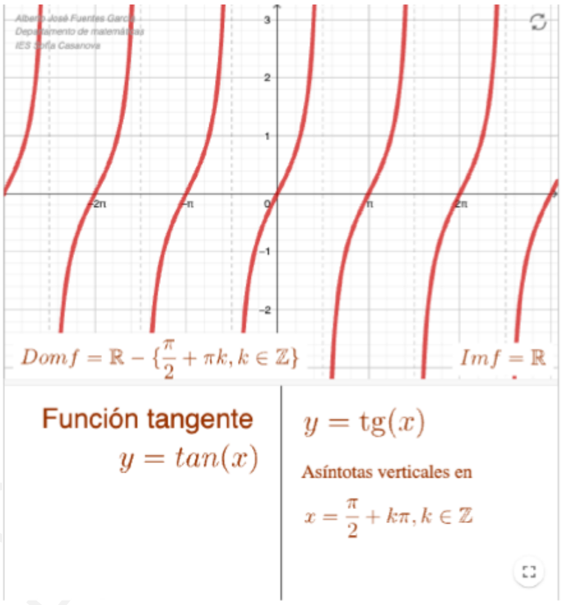
La unidad angular usada en funciones son los radianes.

$f(x) = \sin x \quad f(x) = \cos x, T = 2\pi$



FUNCIONES SENO Y COSENO, SU GRÁFICA ES UNA ONDA, POR LO QUE ES EL MODELO MATEMÁTICO DE ELECTROMAGNETISMO, ONDAS SONORAS, ONDAS GRAVITACIONALES…

$f(x) = \tan x, T = \pi$



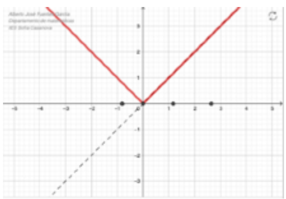
NO EXISTE CUANDO EL COSENO SE ANULA ($\pi/2 + k\pi$), TIENE ASÍNTOTAS VERTICALES

2.3. Variaciones de las funciones elementales

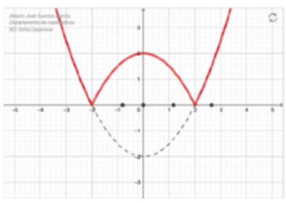
2.3.1. Valor absoluto

El valor absoluto de un número lo convierte en positivo si era negativo. En funciones, eso se traduce en que el valor absoluto de una función, hace que "rebote" sobre el eje X, de modo que se dibuja siempre en la parte superior.

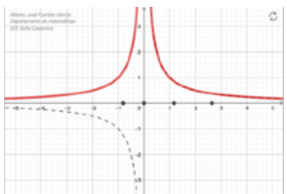
$f(x) = |x|$



$f(x) = |x^2/2 - 2|$



$f(x) = |1/x|$



$f(x) = |\sqrt{x} - 1|$

Nota: $y = |x|$ es el primer ejemplo de función no derivable, porque hace un "codo". Veremos que la derivada mide la pendiente, y en los codos hay un cambio brusco de pendiente (de -1 a 1 en $|x|$).

2.3.2. Traslaciones, amplificaciones y contracciones

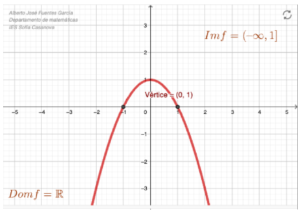
Ya hemos visto como se pueden representar funciones trasladadas de las elementales.

Traslación horizontal a hacia la derecha: todas las x deben aparecer como $(x - a)$.

Traslación horizontal a hacia la izquierda: todas las x deben aparecer como $(x + a)$.

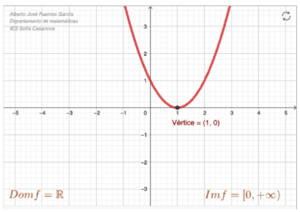
Traslación vertical b hacia arriba: $y = f(x) + b$ (hacia abajo $f(x) - b$)

$f(x) = -x^2 + 1$



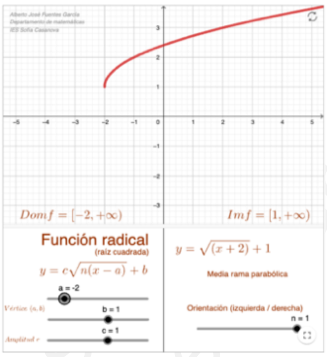
TRASLACIÓN VERTICAL +1 DE $-x^2$

$f(x) = (x - 1)^2$



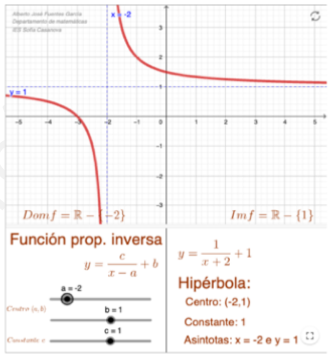
TRASLACIÓN HORIZONTAL +1 DE x^2

$f(x) = \sqrt{x + 2} + 1$



TRASLACIÓN -2H +1V DE $f(x) = \sqrt{x}$

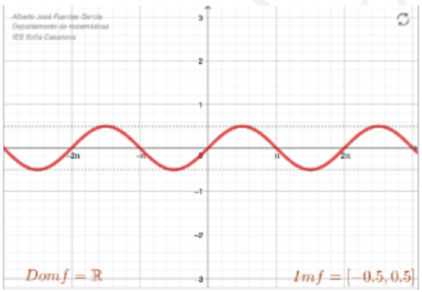
$f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$



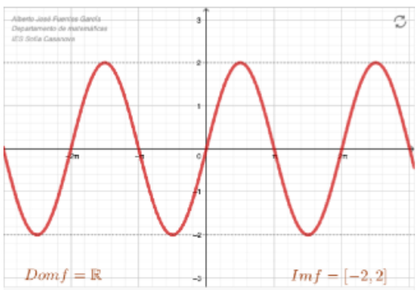
TRASLACIÓN -2H +1V DE $f(x) = 1/x$ (HIPÉRBOLA)

También se puede amplificar o contraer una función multiplicándola por un coeficiente: $y = c \cdot f(x)$. Si $c > 1$ se amplifica (toma valores mayores), si $0 < c < 1$ se contrae.

$f(x) = 0{,}5 \sin x$

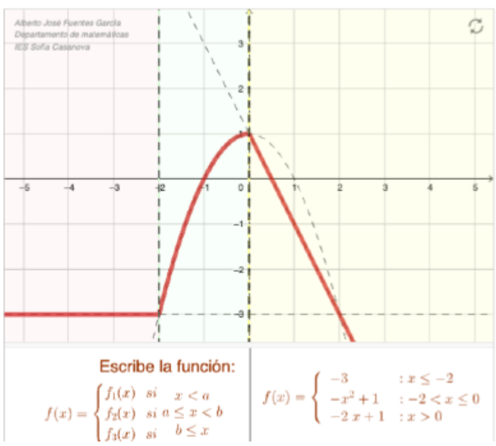


$f(x) = 2 \sin x$



2.3.3. Funciones a trozos

Las funciones a trozos se representan a partir de las funciones elementales, en los intervalos en los que se definen. Solo hay que identificar los cortes entre los distintos trozos, y, si es necesario, dar valor en esos cortes. Por ejemplo:



2.4. Estudio del dominio de una función

Para estudiar el dominio de una función cualquiera, tendremos en cuenta lo aprendido de las funciones elementales. Fijándonos en los casos en los que el dominio no es $\mathbb{R}$:

- **Hay x en denominadores** -> Resolver la ecuación $denominador = 0$ y excluir las soluciones del dominio *(la tangente está incluida, el coseno está en el denominador)*
- **Hay raíces de índice par** -> Resolver la inecuación $radicando \geq 0$
- **Hay logaritmos con x como argumento** -> Resolver la inecuación $argumento \geq 0$

NOTA: Para las raíces pares, no existen aquellas de negativos. Para los logaritmos, no existen aquellas de negativos ni de cero.

Ejemplos:

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \implies Dom\ f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \implies Dom\ g = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$h(x) = \sqrt[4]{x^2-2x} \implies x^2 - 2x \geq 0 \implies Dom\ h = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

$$i(x) = \ln(x-2) \implies x - 2 > 0 \implies Dom\ i = (2, +\infty)$$

Si ocurren varias situaciones de las citadas al mismo tiempo, deberemos estudiar por separado cada una de ellas, y quedarnos con el dominio más restrictivo, la intersección de los dominios obtenidos de cada una de ellas (eliminamos del dominio valores que hacen cero el denominador, que hagan negativas las raíces pares y que hagan cero o negativo los logaritmos).

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x} \implies \begin{cases} \text{raíz: } [-2, +\infty) \\ \text{denominador : } \mathbb{R} - \{0\} \end{cases} \xrightarrow{\cap \text{ intersección}} Dom\ f = [-2, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{x+2}{\log(x-1)} \implies \begin{cases} \text{log: } (1, +\infty) \\ \text{denominador: } \log(x-1) \neq 0 \implies x \neq 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} Dom\ g = (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

2.5. Tasa de variación media (T.V.M.)

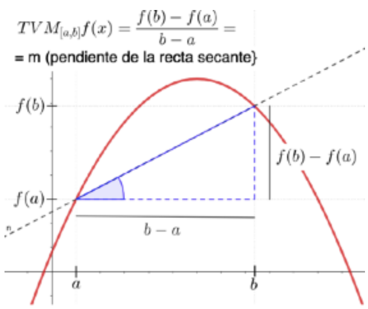
Dada una función $f(x)$ la tasa de variación media (TVM) de f en el intervalo $[a, b]$ es:

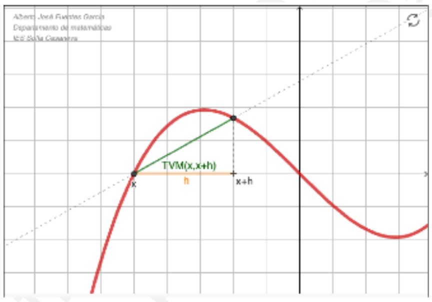
$$\text{TVM}_{[a,b]}f = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si llamamos h a lo que se avanza desde $a = x_0$ hasta $b = x_0 + h$, queda:

$$\text{TVM}_{[x_0,x_0+h]}f = \frac{f(x_0 + h) - f(x_o)}{h} = \frac{\text{"lo que sube (o baja)"}}{\text{"lo que avanza"}}$$

Se observa que es una pendiente, la pendiente de la secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.





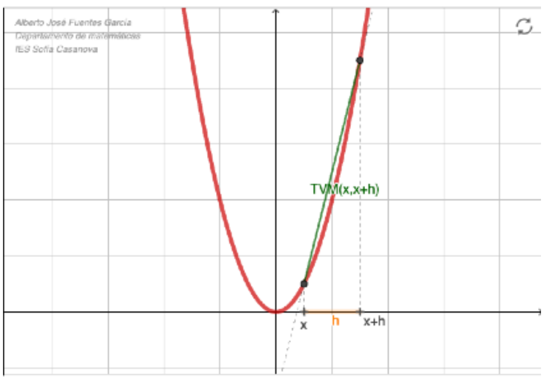
LA TVM EN [-5,-2] ES LA PENDIENTE DEL SEGMENTO VERDE.

[INTERACTIVO: TVM Y DERIVADA]

[VÍDEO EXPLICATIVO: TVM Y DERIVADA]

La TVM representa el cambio medio de una función. Un buen ejemplo es la velocidad media (que se obtiene, por ejemplo, en un radar de tramo en tráfico). Más adelante veremos que cuando el intervalo se hace infinitamente pequeño, aparece la idea de derivada como medida del cambio instantáneo (velocidad instantánea, radar fijo en el ejemplo).

Ejemplo: $f(x) = x^2$ $\qquad TVM_{[1,3]}f = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3^2 - 1^2}{2} = \frac{8}{2} = 4$



VEMOS COMO LA PENDIENTE ENTRE LOS PUNTOS (1,1) Y (3,9) ES 4, EL VALOR DE LA TVM

TEMA 7a - EJERCICIOS. REPASO 4ºESO

Análisis. Funciones. Repaso conceptos básicos.

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 5}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)\cdot(x-1)}$

c) $f(x) = x^2 - 3x + 5$

d) $f(x) = 2x - 5$

e) $f(x) = \sqrt{2x - 6}$

f) $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x}}$

g) $f(x) = 2^x$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$

i) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 27}{\sqrt{2x - 6}}$

j) $f(x) = \sqrt{-x + 4}$

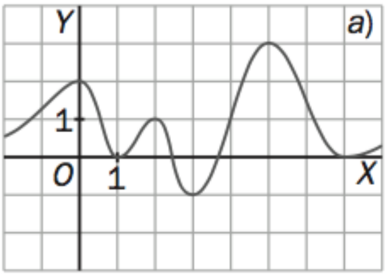
k) $f(x) = \log_5(2x + 4)$

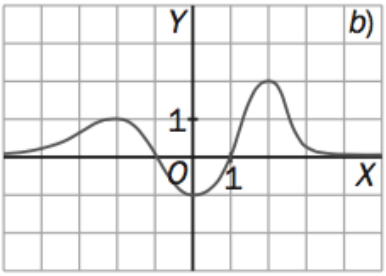
l) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 3}}{x^1 - 1}$

m) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 9}$

n) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

2. Dadas las siguientes gráficas:





a)Obtén dominio y recorrido

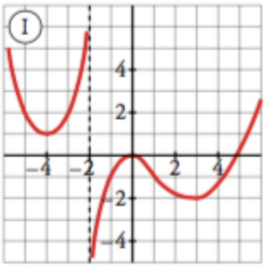
b) Di si son continuas o discontinuas, y en el segundo caso, dónde se encuentran las discontinuidades.

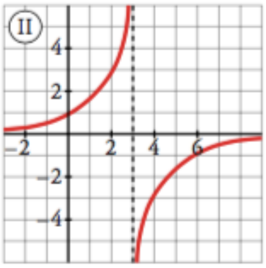
c) Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

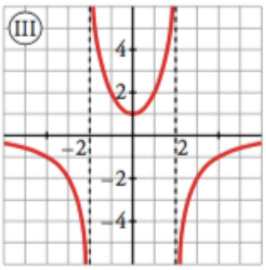
d) Indica si existen máximos y mínimos y dónde se encuentran.

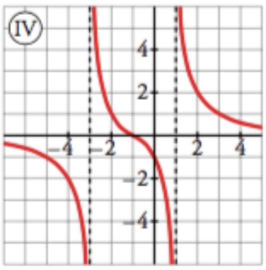
e) Señala si se observa alguna tendencia cuando x tiende a infinito, y si las funciones son periódicas o no.

f) Obtén la TVM de la función a) en los intervalos [0,1], [0,3], [2,5] y [1,5]







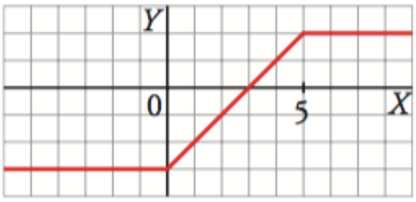


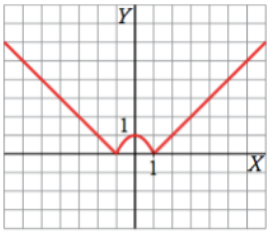
3. A) Representa las siguientes funciones definidas a trozos:

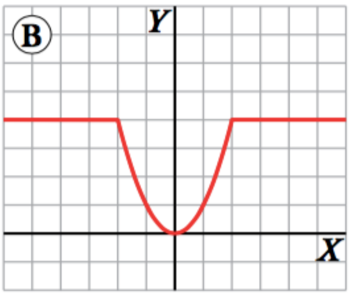
A1) $f(x)=\begin{cases} -3 & si \quad x\le -2 \\ -x^2+1 & si \quad -2<x\le 0 \\ -2x+1 & si \quad 0<x \end{cases}$

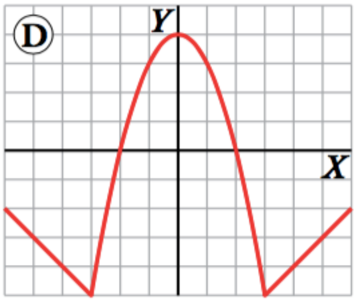
A2) $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & si \quad x\le 1 \\ 4 & si \quad 1<x\le 4 \\ -x+8 & si \quad 0<x \end{cases}$

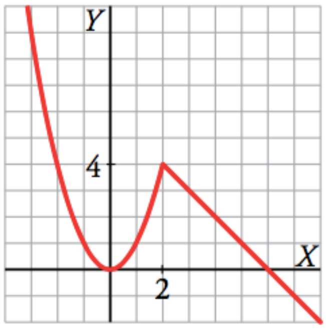
B) Obtén la expresión analítica de las siguientes funciones definidas a trozos:











4. Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas:

$a)\begin{cases} y=-2x+4 \\ y=2x^2-4x \end{cases}$ $\qquad$ $b)\begin{cases} y=-x^2+6x-9 \\ y=\frac{x}{2}-3 \end{cases}$

5. Asocia estas funciones a su gráfica:

1) $y = x^2$

2) $y = 2x^2$

3) $y = 4x^2$

4) $y = \frac{1}{2}x^2$

5) $y = \frac{1}{4}x^2$

6) $y = -x^2$

7) $y = -2x^2$

8) $y = -4x^2$

9) $y = -\frac{1}{2}x^2$

10) $y = -\frac{1}{4}x^2$

11) $y = x^2 - 4$

12) $y = -x^2 - 4$

13) $y = (x+2)^2$

14) $y = (x-2)^2$

15) $y = (x-2)^2 + 4$

16) $y = (x-2)^2 - 4$

17) $y = (x+2)^2 - 4$

18) $y = (x+2)^2 + 4$

19) $y = -(x+2)^2$

20) $y = -(x-2)^2$

21) $y = -(x-2)^2 + 4^2$

22) $y = \sqrt{x}$

23) $y = \sqrt{x-2}$

24) $y = \sqrt{x+2}$

25) $y = \sqrt{x} + 1$

26) $y = \sqrt{x} - 1$

27) $y = \sqrt{4x}$

28) $y = -\sqrt{4x}$

29) $y = -\sqrt{x}$

30) $y = \sqrt{-x}$

31) $y = \sqrt{-x} - 1$

32) $y = -\sqrt{-x} - 1$

33) $y = \frac{-8}{x}$

34) $y = \frac{2}{x}$

35) $y = \frac{1}{x}$

36) $y = \frac{1}{x} + 2$

37) $y = \frac{1}{x} - 2$

38) $y = \frac{1}{x-3}$

39) $y = \frac{1}{x+3}$

40) $y = \frac{1}{x-3} + 2$

41) $y = \frac{1}{x-3} - 2$

42) $y = \frac{1}{x+3} - 2$

43) $y = \frac{1}{x+3} + 2$

44) $y = -\frac{1}{x}$

45) $y = -\frac{1}{x-3} - 2$

46) $y = -\frac{1}{x+3} - 2$

47) $y = 2^x$

48) $y = -2^x$

49) $y = 0{,}5^x$

50) $y = -0{,}5^x$

51) $y = 10^x$

52) $y = 0{,}1^x$

53) $y = \log_2 x$

54) $y = \log_2 -x$

55) $y = \log_{10} x$

56) $y = -\log_{10} x$

57) $y = |x^2 - 4|$

58) $y = |\frac{1}{x}|$

59) $y = |-\sqrt{x} + 1|$

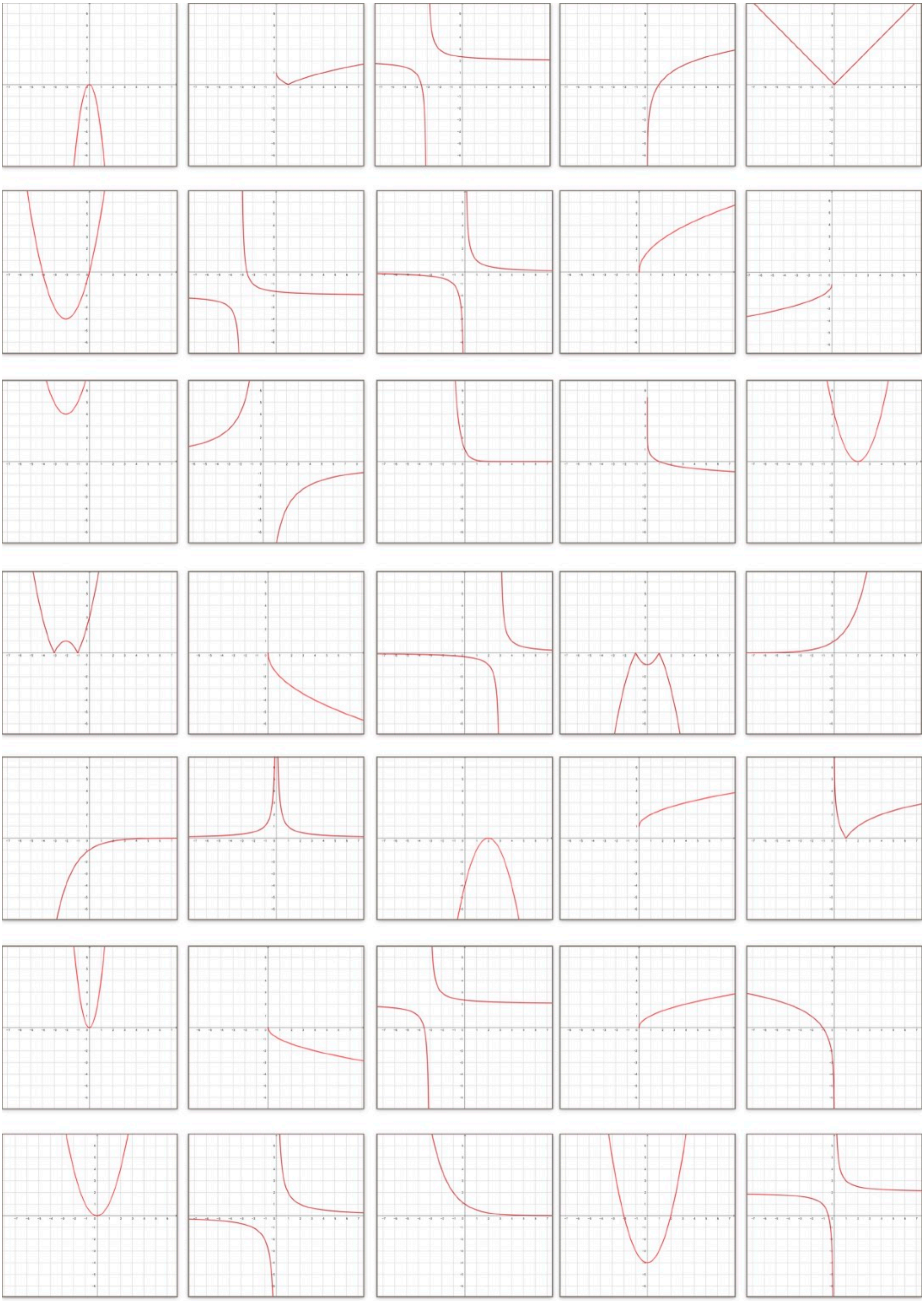
60) $y = |x|$

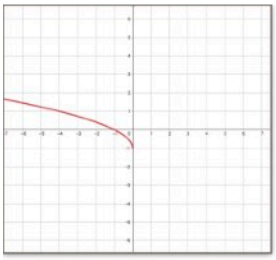
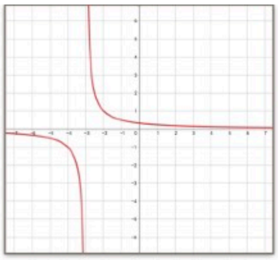
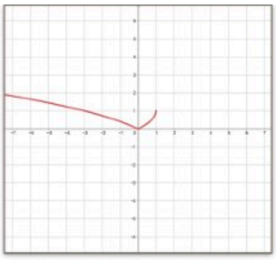
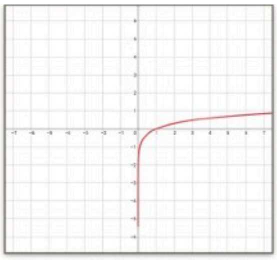
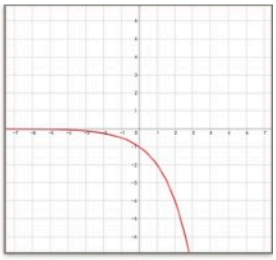
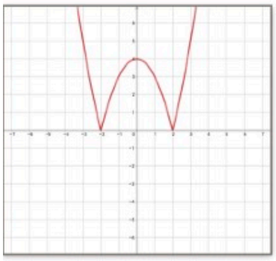
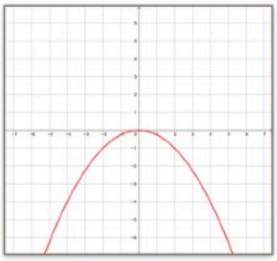
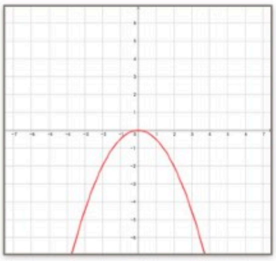
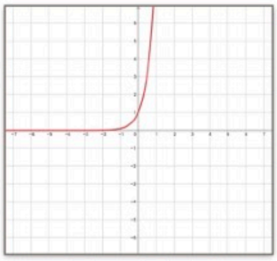
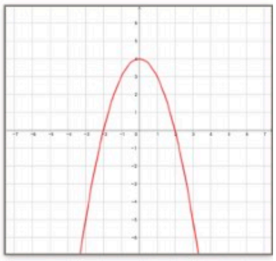
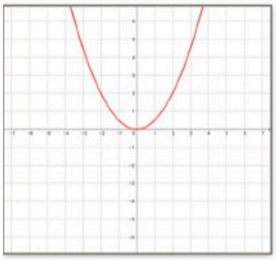
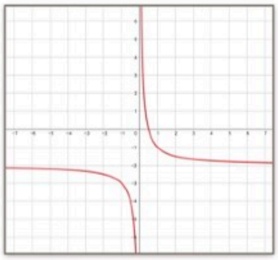
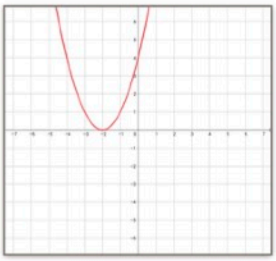
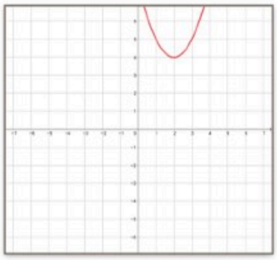
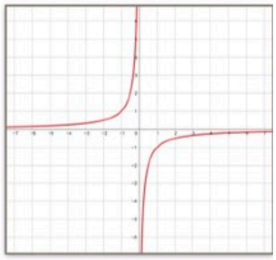
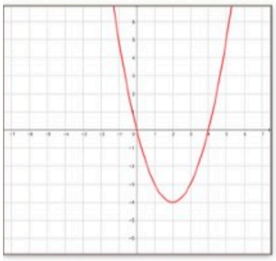
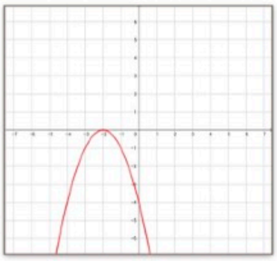
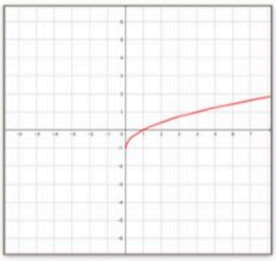
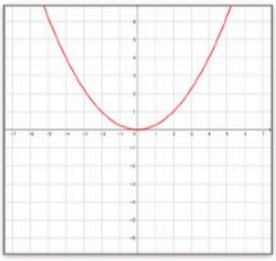
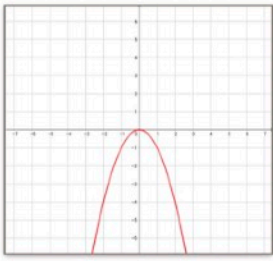
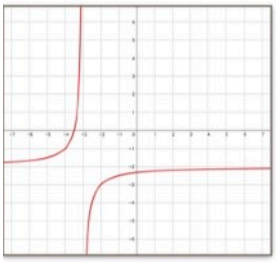
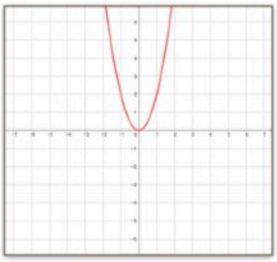
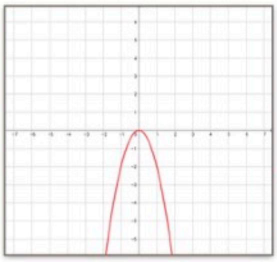
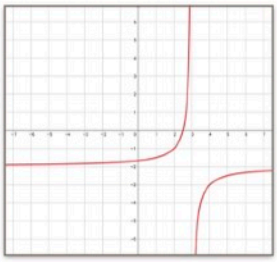
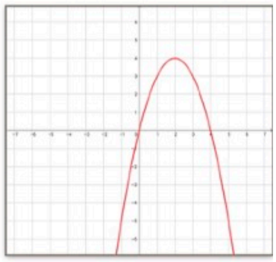
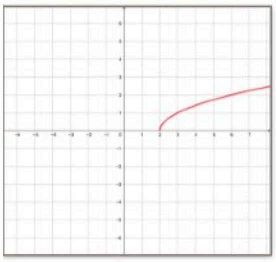
61) $y = -|x^2 - 1|$

62) $y = |\log_2 x|$

63) $y = |(x+2)^2 - 1|$

64) $y = |-\sqrt{-(x-1)} + 1|$



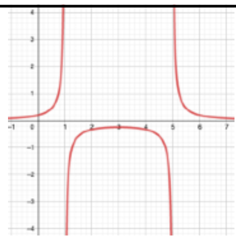



























SOLUCIONES DETALLADAS - EJERCICIO 1

Dejo las soluciones con explicaciones de los ejercicios del boletín de repaso de funciones de 4º de ESO. También adjunto las gráficas aunque no se pidan en todos los ejercicios, para que vayáis acostumbrando la vista, ya que uno de los objetivos fundamentales es dominar la representación gráfica y ganar intuición para saber de forma aproximada cómo es una función sin gastar demasiado tiempo. En cursiva están las explicaciones didácticas, no es necesario que las escribáis (tampoco pasa nada si lo hacéis).

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

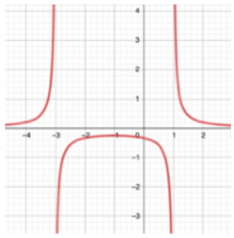
a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 5}$



No hay dominio de una función cuando el denominador es cero. Hay un denominador con "x", por lo que tenemos que evaluar para qué valores de "x" ese denominador se anula.

$$x^2 - 6x + 5 \neq 0 \implies x \neq 1 \,, x \neq 5 \implies \mathbf{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{\mathbf{1, 5}\}$$

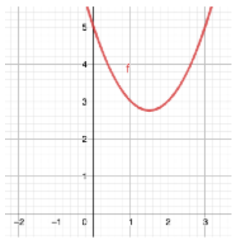
b). $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)\cdot(x-1)}$



Al igual que en a), hay un denominador con "x", por lo que tenemos que evaluar para qué valores de "x" ese denominador se hace cero. El denominador es un polinomio factorizado, así que podemos saber directamente sus raíces (soluciones de P(x)=0)

$$(x+3)\cdot(x-1) \neq 0 \implies x \neq -3 \,, x \neq 1 \implies \mathbf{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{\mathbf{-3, 1}\}$$

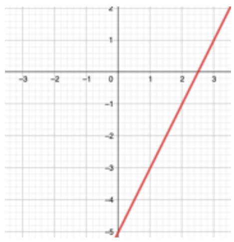
c) $f(x) = x^2 - 3x + 5$



Esto es polinomio de grado dos, función cuadrática, su gráfica es una parábola y su dominio son todos los reales (no hay ni denominadores con x, ni raíces, ni logaritmos).

$$\mathbf{Dom(f)} = \mathbb{R}$$

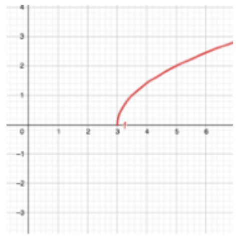
d) $f(x) = 2x - 5$



Función lineal, de pendiente 2 y ordenada en el origen –5. Es una recta y su dominio son todos los reales, como con todas las polinómicas.

$$\mathbf{Dom(f)} = \mathbb{R}$$

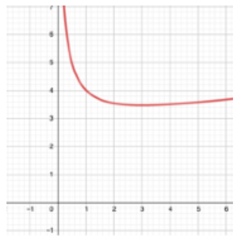
e) $f(x) = \sqrt{2x - 6}$



Función radical de índice par. No existen cuando el discriminante (lo de dentro de la raíz) es negativo. Por lo tanto hay que resolver una inecuación (discriminante mayor o igual que cero):

$$2x - 6 \geq 0 \implies 2x \geq 6 \implies x \geq 3 \implies \mathbf{Dom(f)} = [\mathbf{3}, +\infty)$$

f) $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x}}$



Se juntan dos cuestiones a tener en cuenta, una raíz y x en el denominador. Por haber raíz, el discriminante tiene que ser mayor o igual que cero, pero por estar en el denominador, tampoco puede valer cero así que la desigualdad es estricta:

$$x > 0 \implies \mathbf{Dom(f)} = (\mathbf{0}, +\infty)$$

g) $f(x) = 2^x$

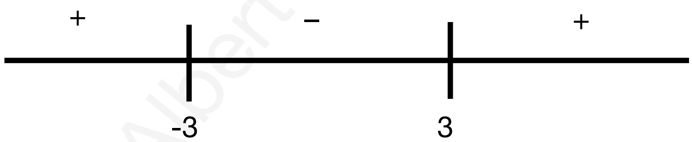
Es una función exponencial de base mayor que uno, tenéis que conocer su representación gráfica (ese famoso crecimiento exponencial), y su dominio son todos los reales.

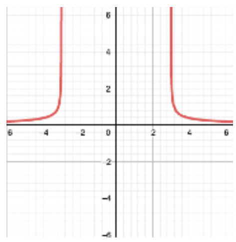
$$\mathbf{Dom(f)} = \mathbb{R}$$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$

Como en el f), hay raíz en denominador, así que hay que resolver una inecuación con desigualdad estricta.

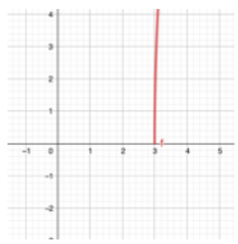
$x^2 - 9 > 0 \implies x^2 > 9 \implies$ *(resolvemos la inecuación de segundo grado)*





$$\implies \mathbf{Dom(f)} = (-\infty\ , -\mathbf{3}) \cup (\mathbf{3}, +\infty)$$

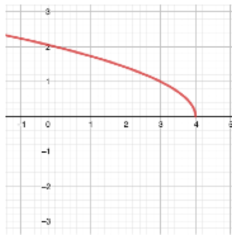
i) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 27}{\sqrt{2x - 6}}$



Parecido al e), pero la raíz está en el denominador, por lo que la desigualdad a resolver es estricta.

$$2x - 6 > 0 \implies 2x > 6 \implies x > 3 \implies \mathbf{Dom(f)} = (\mathbf{3}, +\infty)$$

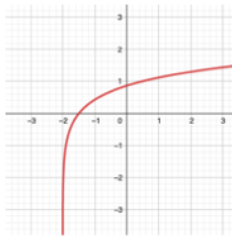
j) $f(x) = \sqrt{-x+4}$



Igual que el e), una raíz de índice par, su discriminante tiene que ser mayor o igual que cero.

$$-x+4 \geq 0 \implies -x \geq -4 \implies x \leq 4 \implies \mathbf{Dom(f) = (-\infty, 4]}$$

k) $f(x) = \log_5(2x+4)$

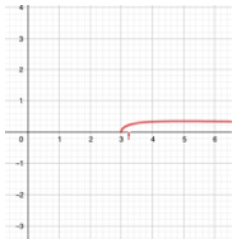


Para los logaritmos, hay que saber que su argumento (lo que tienen dentro), tiene que ser mayor estricto que cero (no existen logaritmos de números negativos ni de cero). Así que resolveremos la inecuación:

$$2x+4 > 0 \implies 2x > -4 \implies x > -2 \implies \mathbf{Dom(f) = (-2, +\infty)}$$

l) **ESTE APARTADO TIENE UNA ERRATA, EL DENOMINADOR DEBERÍA DE SER x^2-1 y no x^1-1 que es lo que está en el boletín. Resuelvo ambos casos:**

l1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x-1}$



Se juntan dos cuestiones a tener en cuenta. (I) En el numerador una raíz, su discriminante debe ser mayor o igual que cero y (II) un denominador con x, cuyo valor no puede ser cero. Hay que estudiar ambas situaciones por separado y tenerlas en cuenta para el resultado.

(I) $x-3 \geq 0 \implies x \geq 3 \implies \mathbf{Dom(f_I) = (3, +\infty)}$

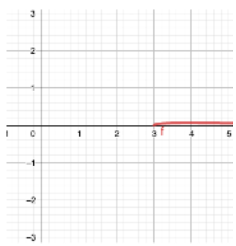
(II) $x-1 \neq 0 \implies x \neq 1 \implies \mathbf{Dom(f_{II}) = \mathbb{R} - \{1\}}$

Intersecamos (I) y (II) y obtenemos:

$$\mathbf{Dom(f) = Dom(f_I) \cap Dom(f_{II}) = (3, +\infty) - \{1\} = (3, +\infty)}$$

(el 1 no está en el intervalo, luego el intervalo queda igual)

l2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2-1}$



Igual que antes, estudiamos por separado: (I) En el numerador una raíz, su discriminante debe ser mayor o igual que cero y (II) un denominador con x, cuyo valor no puede ser cero.

(I) $x-3 \geq 0 \implies x \geq 3 \implies \mathbf{Dom(f_I) = [3, +\infty)}$

(II) $x^2 - 1 \neq 0 \implies x^2 \neq 1 \implies \mathbf{Dom(f_{II}) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}}$

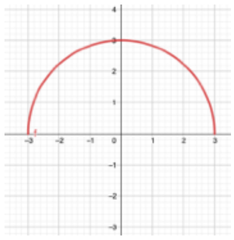
Intersecamos (I) y (II) y obtenemos:

$$\mathbf{Dom(f) = Dom(f_I) \cap Dom(f_{II}) = (3, +\infty) - \{-1, 1\} = (3, +\infty)}$$

(ni el -1 ni el 1 están en el intervalo, luego el intervalo queda igual, si alguno estuvieran habría que quitarlo)

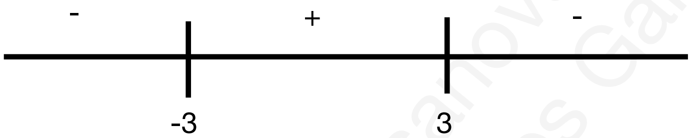
m) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 9}$

Función radical de índice par. No existen cuando el discriminante (lo de dentro de la raíz) es negativo. Por lo tanto hay que resolver una inecuación (discriminante mayor o igual que cero):



$-x^2 + 9 \geq 0 \implies -x^2 \geq -9 \implies x^2 \leq 9 \implies$

(resolvemos la inecuación de segundo grado)

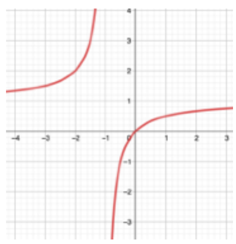


$\implies \mathbf{Dom(f) = [-3, 3]}$

(curiosidad, la gráfica es una semicircunferencia, fijaos que si elevamos al cuadrado la función y cambiamos de lado la x, queda $x^2 + y^2 = 9$, que se corresponde con una circunferencia de centro cero y radio 3)

n) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Hay un denominador con "x", por lo que tenemos que evaluar para qué valores de "x" ese denominador se anula.



$x + 1 \neq 0 \implies x \neq -1 \implies \mathbf{Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}}$

SOLUCIONES DETALLADAS - EJERCICIO 2

Dejo las soluciones con explicaciones de los ejercicios del boletín de repaso de funciones de 4º de ESO.

También adjunto las gráficas aunque no se pidan en todos los ejercicios, para que vayáis acostumbrando la vista, ya que uno de los objetivos fundamentales es dominar la representación gráfica y ganar intuición para saber de forma aproximada cómo es una función sin gastar demasiado tiempo.

En cursiva están las explicaciones didácticas, no es necesario que las escribáis (tampoco pasa nada si lo hacéis).

2. Dadas las siguientes gráficas:

a) Obtén dominio y recorrido

b) Di si son continuas o discontinuas, y en el segundo caso, dónde se encuentran las discontinuidades.

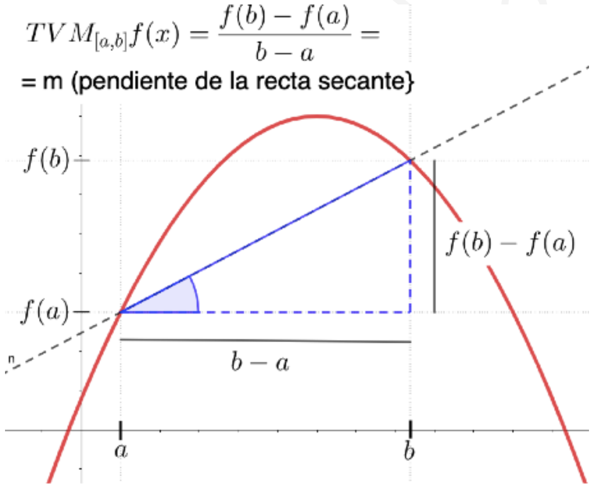
c) Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Indica si existen máximos y mínimos y dónde se encuentran.

e) Señala si se observa alguna tendencia cuando x tiende a infinito, y si las funciones son periódicas o no.

f) Obtén la TVM de la función a) en los intervalos [0,1], [0,3], [2,5] y [1,5]

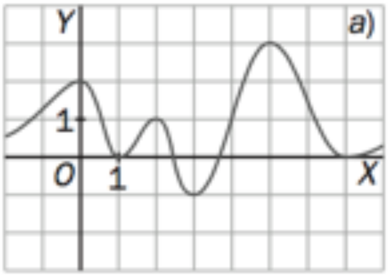
NOTA TEÓRICA



La tasa de variación media de una función f en un intervalo [a,b] se define como:

$$TVM_{[a,b]}f(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(se corresponde con la pendiente de la recta que corta a la función en los puntos (a,b) y (f(a),f(b)), (lo que sube entre lo que avanza)



a) Dominio y recorrido:

$Dom\ f = \mathbb{R}$ (también puede interpretarse (-2, 8))

$Im\ f = [-1,3]$

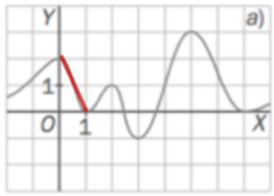
b) Es continua.

c) Monotonía (*siempre se describe como intervalos de x*):
$Creciente: (-\infty,0) \cup (1,\ 2) \cup (3,5) \cup (7, +\infty)$ (*misma consideración que para el dominio*)
$Decreciente: (0,\ 1) \cup (2,\ 3) \cup (5,\ 7)$

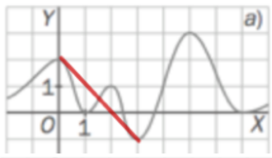
d) Máximos: relativos en x=0 (y=2), x=2 (y=1), absoluto en x=5 (y=3)
Mínimos: relativos en x=1 (y=0), x=7 (y=0), absoluto en x=3 (y=–1)

e) No se perciben tendencias (no vemos asíntotas horizontales, ni queda claro en comportamiento de $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ por la gráfica.
No es periódica.

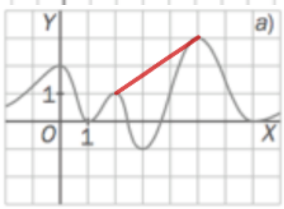
f) $f(0) = 2,\ f(1) = 0,\ f(2) = 1,\ f(3) = -1,\ f(5) = 3$



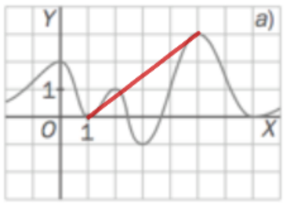
[0,1]: $TVM_{[0,1]}f(x) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{0 - 2}{1} = -2$



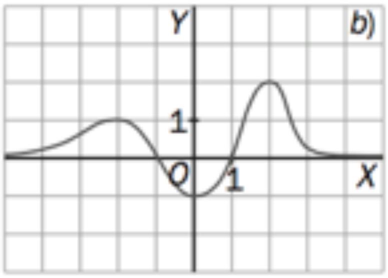
[0,3]: $TVM_{[0,3]}f(x) = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{-1 - 2}{3} = -\dfrac{3}{3} = -1$



[2,5]: $TVM_{[2,5]}f(x) = \dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \dfrac{3 - 1}{3} = \dfrac{2}{3}$



[1,5]: $TVM_{[1,5]}f(x) = \dfrac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \dfrac{3 - 0}{4} = \dfrac{3}{4}$



a) Dominio y recorrido:

$Dom\ f = \mathbb{R}$ (en este caso parece claro que continúa)

$Im\ f = [-1,2]$

b) Es continua.

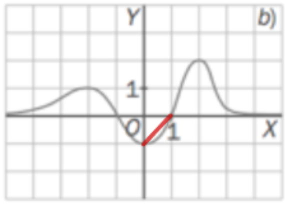
c) Monotonía (*siempre se describe como intervalos de x*):
$Creciente : (-\infty, -2) \cup (0,\ 2)$
$Decreciente : (-2,\ 0) \cup (2,\ +\infty)$

d) Máximos: relativo en x=–2 (y=1), absoluto en x=2 (y=2)
Mínimos: absoluto en x=0 (y=–1)

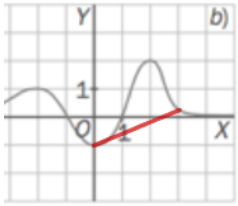
e) Vemos que la gráfica se acerca al eje horizontal tanto hacia la derecha como hacia la izquierda. En términos propios del curso diremos que **tiene una asíntota horizontal (x=0) y que** $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ **(tiende a cero).** No es periódica.

f) Para algunos valores tenemos que hacer una aproximación a ojo:
$f(0) = -1,\ f(1) = 0,\ f(2) = 2,\ f(3) \approx 0'3,\ f(5) \approx 0'1$

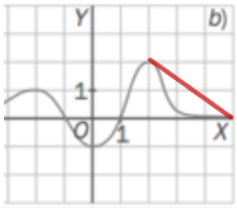
[0,1]: $TVM_{[0,1]}f(x) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{0 - (-1)}{1} = 1$



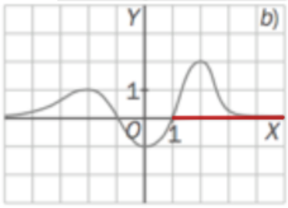
[0,3]: $TVM_{[0,3]}f(x) = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} \approx \dfrac{0'3 - (-1)}{3} \approx -\dfrac{1'3}{3} \approx 0'43$

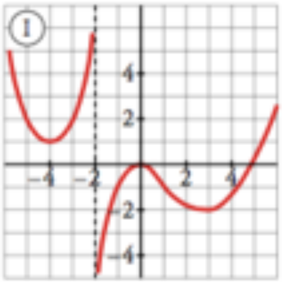


[2,5]: $TVM_{[2,5]}f(x) = \dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \approx \dfrac{0'1 - 2}{3} \approx \dfrac{-1'9}{3} \approx -0'63$



[1,5]: $TVM_{[1,5]}f(x) = \dfrac{f(5) - f(1)}{5 - 1} \approx \dfrac{0'1 - 0}{4} \approx 0$





a) Dominio y recorrido:

$Dom\ f = (-5{,}8, -2) \cup (-2, +\infty)$ (no es muy preciso)

$Im\ f = (-\infty, 5'8)$

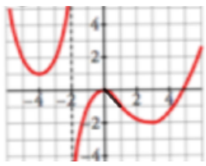
b) Discontinua; discontinuidad de salto infinito en x=–2 (asíntota vertical, $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$).

c) Monotonía (*siempre se describe como intervalos de x*):
$Creciente: (-4, -2) \cup (-2, 0) \cup (3, +\infty)$
$Decreciente: (-5'8, -4) \cup (0, 3)$

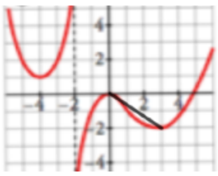
d) Máximos: relativo en x=0 (y=0)
Mínimos: relativos en x=–4 (y=1), x=3 (y=–2)

e) No se perciben tendencias (no vemos asíntotas horizontales, parece que hay una rama parabólica: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$).
No es periódica.
.

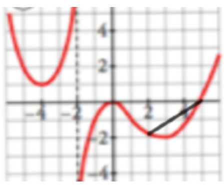
f) Para algunos valores tenemos que hacer una aproximación a ojo:
$f(0) = 0,\ f(1) = -1,\ f(2) \approx -1'8,\ f(3) = -2,\ f(5) \approx 0$



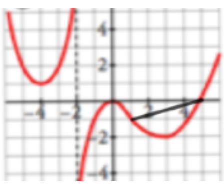
[0,1]: $TVM_{[0,1]} f(x) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{-1 - 0}{1} = -1$



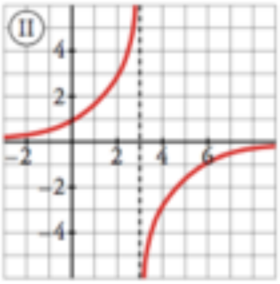
[0,3]: $TVM_{[0,3]} f(x) = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{-2 - 0}{3} = -\dfrac{2}{3}$



[2,5]: $TVM_{[2,5]} f(x) = \dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \approx \dfrac{0 - (-1'8)}{3} \approx \dfrac{1'8}{3} \approx 0'6$



[1,5]: $TVM_{[1,5]} f(x) = \dfrac{f(5) - f(1)}{5 - 1} \approx \dfrac{0 - (-1)}{4} \approx \dfrac{1}{4}$



a) Dominio y recorrido:

$$Dom\ f = \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty,\ 3) \cup (3, +\infty)$$

$$Im\ f = \mathbb{R} - \{0\}$$

b) Discontinua; discontinuidad de salto infinito en x=3 (asíntota vertical, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$).

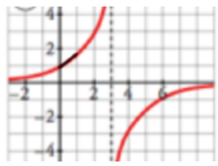
c) Monotonía (*siempre se describe como intervalos de x*):
$Creciente$: en todo el dominio $(-\infty,\ 3) \cup (3, +\infty)$
$Decreciente$: no decrece.

d) Máximos: no tiene
Mínimos: no tiene

e) Vemos que la gráfica se acerca al eje horizontal tanto hacia la derecha como hacia la izquierda. En términos propios del curso diremos que **tiene una asíntota horizontal (x=0) y que** $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ **(tiende a cero).** No es periódica.

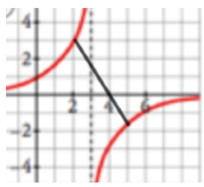
f) Para algunos valores tenemos que hacer una aproximación a ojo:
$f(0) = 1,\ f(1) \approx 1'6,\ f(2) = 3,\ \nexists f(3),\ f(5) \approx -1'6$

[0,1]: $TVM_{[0,1]}f(x) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \approx \dfrac{1'6 - 1}{1} \approx 0'6$

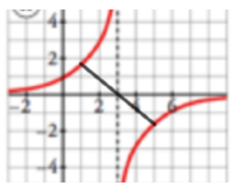


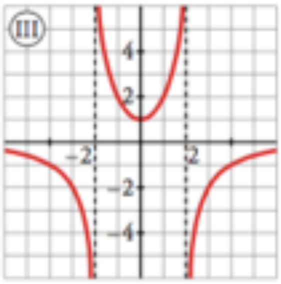
[0,3]: $\nexists f(3)$

[2,5]: $TVM_{[2,5]}f(x) = \dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \approx \dfrac{-1'6 - 3}{3} \approx -\dfrac{-4'6}{3} \approx -1'53$



[1,5]: $TVM_{[1,5]}f(x) = \dfrac{f(5) - f(1)}{5 - 1} \approx \dfrac{-1'6 - 1'6}{4} \approx -\dfrac{3'2}{4} \approx -0'8$





a) Dominio y recorrido:

$$Dom\ f = \mathbb{R} - \{-2{,}2\} = (-\infty,\ -2) \cup (-2,\ 2) \cup (2, +\infty)$$

$$Im\ f = (-\infty,\ 0) \cup [1, +\infty)$$

b) Discontinua; discontinuidad de salto infinito en x=–2 y x=2 (asíntotas verticales

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty).$$

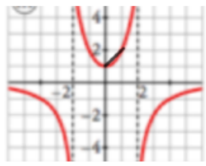
NO SE PREGUNTA, PERO LLAMA LA ATENCIÓN SIMETRÍA PAR (EJE Y)

c) Monotonía (*siempre se describe como intervalos de x*):
$Creciente$: si x>0 $\implies$ $(0,\ 2) \cup (2, +\infty)$
$Decreciente$: si x<0 $\implies$ $(\infty,\ -2) \cup (-2,\ 0)$.

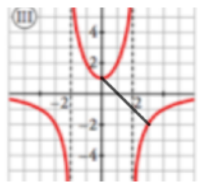
d) Máximos: no tiene.
Mínimos: relativo en x=0 (y=1).

e) Vemos que la gráfica se acerca al eje horizontal tanto hacia la derecha como hacia la izquierda. En términos propios del curso diremos que **tiene una asíntota horizontal (x=0) y que** $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ **(tiende a cero).** No es periódica.

f) Para algunos valores tenemos que hacer una aproximación a ojo:
$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ \nexists f(2),\ f(3) = -2,\ f(5) \approx -0'5$

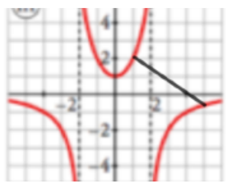


[0,1]: $TVM_{[0,1]}f(x) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{2-1}{1} = 1$

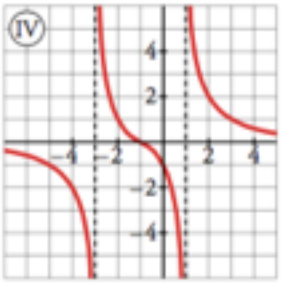


[0,3]: $TVM_{[0,3]}f(x) = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{-2-1}{3} = -\dfrac{3}{3} = -1$

[2,5]: $\nexists f(2)$



[1,5]: $TVM_{[1,5]}f(x) = \dfrac{f(5) - f(1)}{5 - 1} \approx \dfrac{-0'5-2}{4} \approx -\dfrac{2'5}{4} \approx -0'625$



a)Dominio y recorrido:

$$Dom\ f = \mathbb{R} - \{-3,1\} = (-\infty,\ -3) \cup (-3,\ 1) \cup (1, +\infty)$$

$$Im\ f = \mathbb{R}$$

b) Discontinua; discontinuidad de salto infinito en x=–3 y x=1 (asíntotas verticales

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty).$$

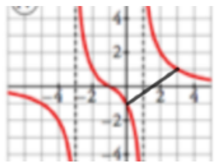
c) Monotonía (*siempre se describe como intervalos de x*):
$Creciente$: no crece
$Decreciente$: en todo el dominio $\implies \mathbb{R} - \{-3,1\}$.

d) Máximos: no tiene. Mínimos: no tiene.

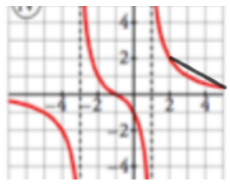
e) Vemos que la gráfica se acerca al eje horizontal tanto hacia la derecha como hacia la izquierda. En términos propios del curso diremos que **tiene una asíntota horizontal (x=0) y que** $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ **(tiende a cero)**. No es periódica.

f) Para algunos valores tenemos que hacer una aproximación a ojo:
$f(0) = -1,\ \nexists f(1),\ f(2) = 2,\ f(3) = 1,\ f(5) \approx 0'3$

[0,1]: $\nexists f(1)$



[0,3]: $TVM_{[0,3]}f(x) = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{1 - (-1)}{3} = \dfrac{2}{3}$



[2,5]: $TVM_{[2,5]}f(x) = \dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \approx \dfrac{0'3 - 2}{3} \approx -\dfrac{1'7}{3} \approx -0'57$

[1,5]: $\nexists f(1)$

SOLUCIONES DETALLADAS - EJERCICIO 3

Dejo las soluciones con explicaciones de los ejercicios del boletín de repaso de funciones de 4º de ESO.

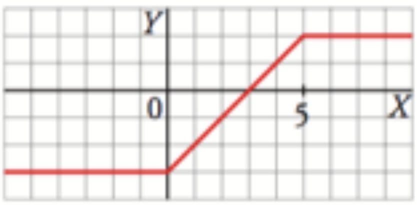
También adjunto las gráficas aunque no se pidan en todos los ejercicios, para que vayáis acostumbrando la vista, ya que uno de los objetivos fundamentales es dominar la representación gráfica y ganar intuición para saber de forma aproximada cómo es una función sin gastar demasiado tiempo.

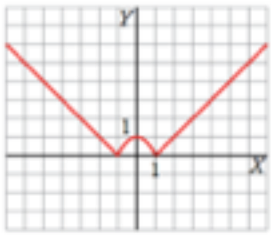
En cursiva están las explicaciones didácticas, no es necesario que las escribáis (tampoco pasa nada si lo hacéis).

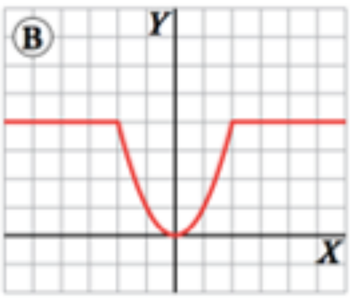
3. Representa las siguientes funciones definidas a trozos:

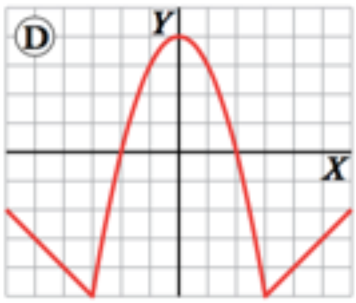
A1) $f(x) = \begin{cases} -3 & si \quad x \leq -2 \\ -x^2+1 & si \quad -2 < x \leq 0 \\ -2x+1 & si \quad 0 < x \end{cases}$ **A2)** $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & si \quad x \leq 1 \\ 4 & si \quad 1 < x \leq 4 \\ -x+8 & si \quad 4 < x \end{cases}$

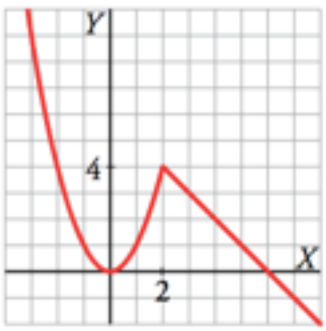
B) Obtén la expresión analítica de las siguientes funciones definidas a trozos:











A1) $f(x) = \begin{cases} -3 & si \quad x \leq -2 \\ -x^2+1 & si \quad -2 < x \leq 0 \\ -2x+1 & si \quad 0 < x \end{cases}$

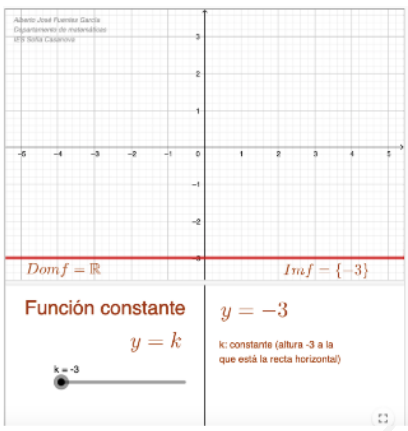
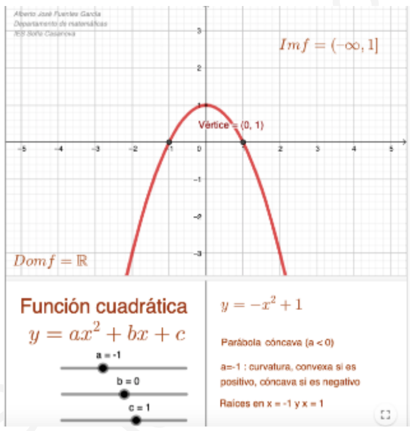
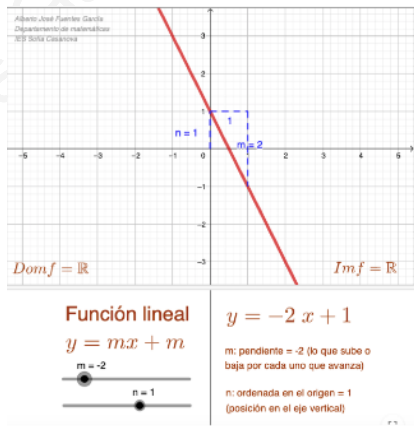
Vemos que hay 3 trozos:

Hasta x=–2 es $f_1(x) = -3$, una función constante (recta horizontal a altura –3)

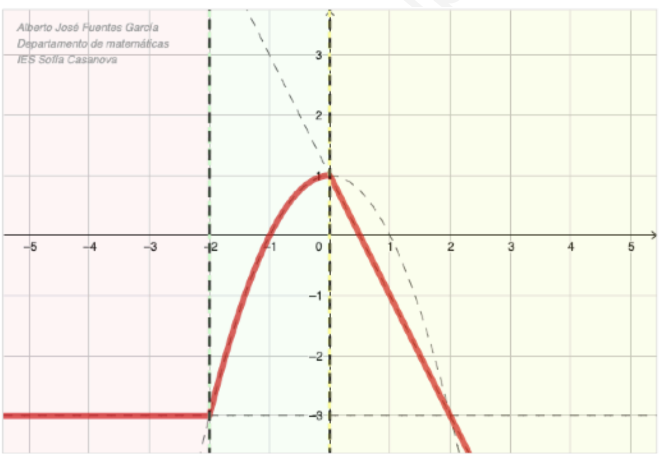
Entre –2 y 0 es $f_2(x) = -x^2 + 1$, una función cuadrática (parábola). La razonamos desde la gráfica de $y = x^2$. Por ser el coeficiente a=–1, sabemos que es cóncava, y por ser el término independiente +1, sabemos que está desplazada una unidad hacia arriba.

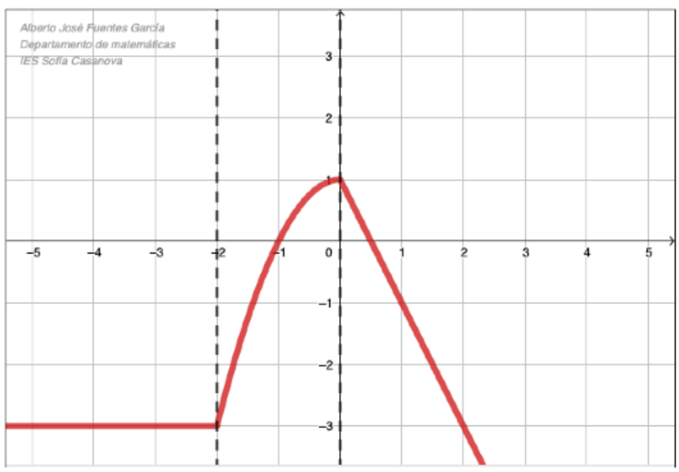
A partir de x=0 es $f_3(x) = -2x + 1$, función lineal (recta). Sabemos que su pendiente es –2 (baja dos por cada unidad que avanza) y su ordenada en el origen es 1, (una unidad sobre el centro de coordenadas en el eje vertical).

Con toda esta información, sabemos como son las gráficas por separado:

f1: Hasta x=–2	f2: x entre –2 y 0	f3: A partir de x=0
		

Combinamos en una sola gráfica atendiendo los distintos intervalos de definición *(muestro dos gráficas una coloreada y con el rastro de las funciones, y otra más limpia, sin colores ni rastros)*:





A2) $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & si \quad x \le 1 \\ 4 & si \quad 1 < x \le 4 \\ -x+8 & si \quad 4 < x \end{cases}$

Vemos que hay 3 trozos:

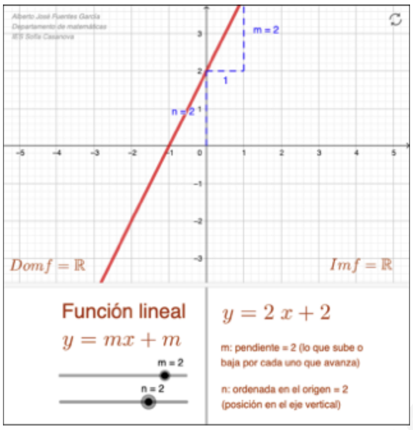
Hasta x=1 es es $f_1(x) = 2x + 2$, función lineal (recta). Sabemos que su pendiente es 2 (sube dos por cada unidad que avanza) y su ordenada en el origen es 2, (dos unidades sobre el centro de coordenadas en el eje vertical).

Entre 1 y 4 es $f_2(x) = 4$, una función constante (recta horizontal a altura 4).

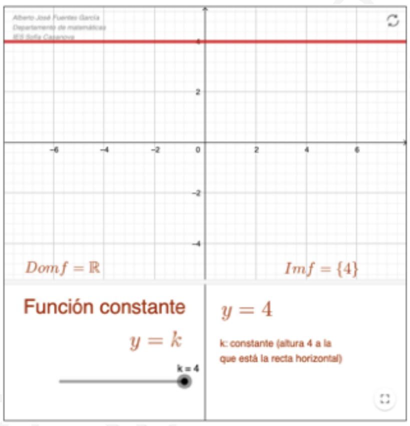
A partir de x=4 $f_3(x) = -x + 8$, función lineal (recta). Sabemos que su pendiente es –1 (baja uno por cada unidad que avanza) y su ordenada en el origen es 8, (ocho unidades sobre el centro de coordenadas en el eje vertical)

Con toda esta información, sabemos como son las gráficas por separado:

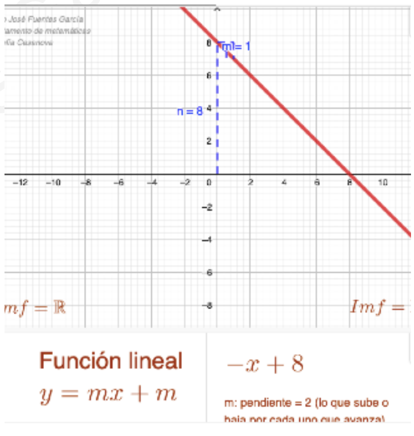
f1: Hasta x=1



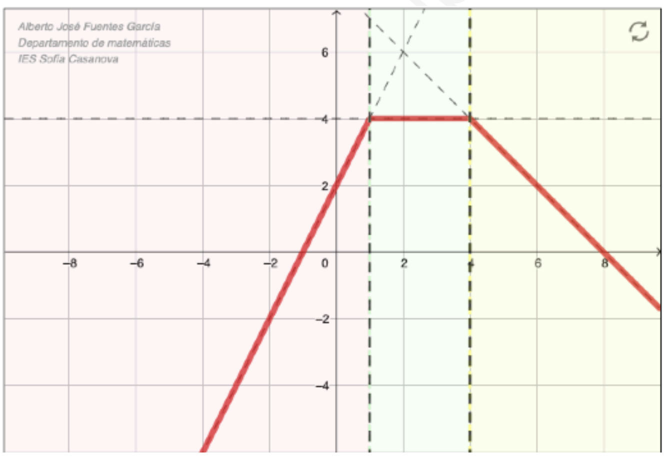
f2: x entre 1 y 4

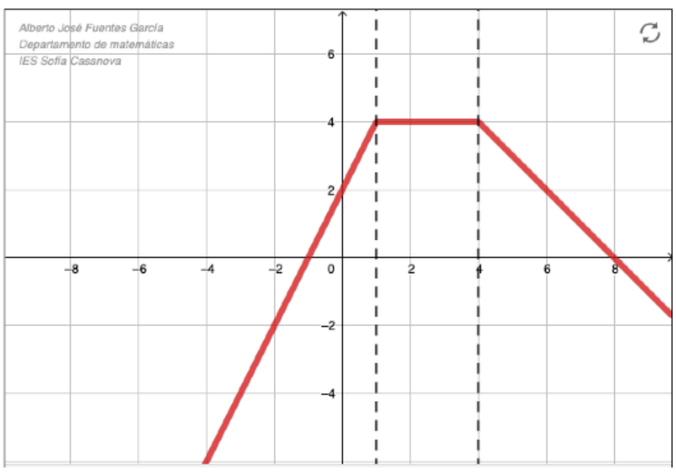


f3: A partir de x=4

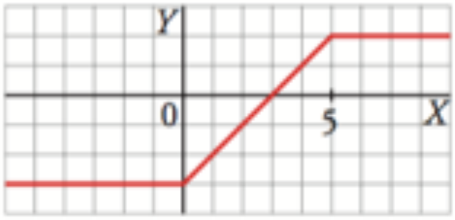


Combinamos en una sola gráfica atendiendo los distintos intervalos de definición *(muestro dos gráficas una coloreada y con el rastro de las funciones, y otra más limpia, sin colores ni rastros)*:





B1)



2. Identificamos los trozos. El primero es hasta x=0, el segundo entre x=0 y x=5 y el tercero desde x=5. Así podemos escribir:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lcc} & si & x \leq 0 \\ & si & 0 < x \leq 5 \\ & si & 5 < x \end{array} \right.$$

2. Obtenemos las funciones para cada trozo:

2.1. $Si \;\; x < 0 \implies f_1(x)$ es una **recta horizontal** a altura –3, luego es la **función constante** $f_1(x) = -3$.

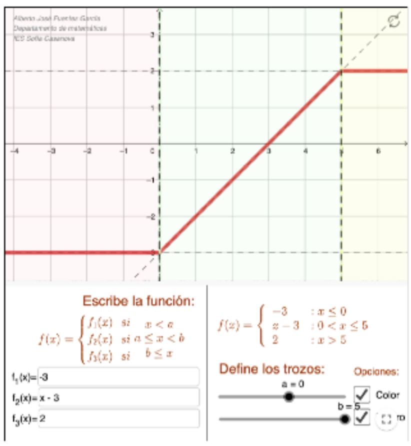
2.2. $Si \;\; 0 \leq x < 5 \implies f_2(x)$ es una **recta de pendiente m=1** (sube uno por cada uno que avanza) y **ordenada en el origen n=–3**, luego es la función lineal $f_2(x) = x - 3$.

2.3. $Si \;\; 5 < x \implies f_3(x)$ es una **recta horizontal a altura 2**, luego es la **función constante** $f_3(x) = 2$.

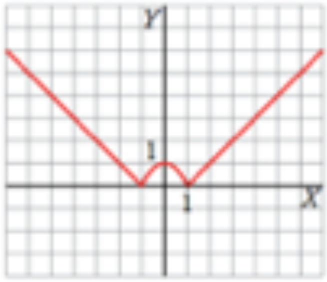
Así que la expresión analítica de la función es:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} -3 & si & x \leq 0 \\ x-3 & si & 0 < x \leq 5 \\ 2 & si & 5 < x \end{array} \right.$$

Comprobamos:



B2)



1. Identificamos los trozos. El primero es hasta x=-1, el segundo entre x=-1 y x=1 y el tercero desde x=1. Así podemos escribir:

$$f(x) = \begin{cases} & si \quad x \leq -1 \\ & si \quad -1 < x \leq 1 \\ & si \quad 1 < x \end{cases}$$

2. Obtenemos las funciones para cada trozo:

2.1. $Si \;\; x < -1 \implies f_1(x)$ es una **recta de pendiente m=–1** (baja uno por cada uno que avanza) y ordenada en el origen n=–1, se puede ver de dos modos:

- Forma intuitiva: si prolongamos la recta, vemos que tocaría al eje vertical en el –1,
- Calculando con ecuación punto pendiente (punto (–1,0) pendiente –1):

$y - 0 = -1 \cdot (x + 1)$

De cualquier forma sale la función lineal $f_1(x) = -x - 1$.

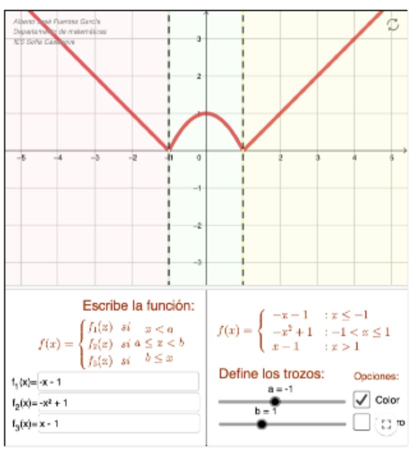
2.2. $Si \;\; -1 \leq x < 1 \implies f_2(x)$ es una **parábola cóncava** (función cuadrática con a negativo). Partimos de la parábola convexa de referencia, $y = -x^2$, la desplazamos una unidad hacia arriba y obtenemos $f_2(x) = -x^2 + 1$.

2.3. $Si \;\; 1 < x \implies f_3(x)$ es una **recta de pendiente m=1** (sube uno por cada uno que avanza) y ordenada en el origen n=–1 (razonar como en 2.1): $f_3(x) = x - 1$

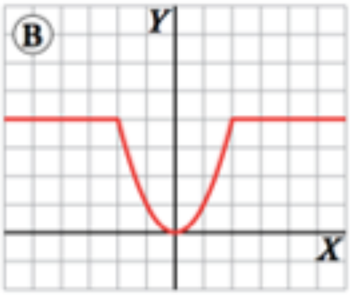
Así que la expresión analítica de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & si \quad x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & si \quad -1 < x \leq 1 \\ x - 1 & si \quad 1 < x \end{cases}$$

Comprobamos:



B3)



1. Identificamos los trozos. El primero es hasta x=-2, el segundo entre x=-2 y x=2 y el tercero desde x=2. Así podemos escribir:

$$f(x) = \begin{cases} & si \quad x \leq -2 \\ & si \quad -2 < x \leq 2 \\ & si \quad 2 < x \end{cases}$$

2. Obtenemos las funciones para cada trozo:

2.1. $Si \;\; x < -2 \implies f_1(x)$ es una **recta horizontal** a altura 4, luego es la **función constante** $f_1(x) = 4$.

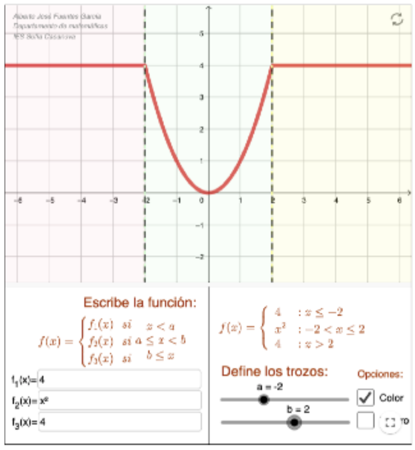
2.2. $Si \;\; -1 \leq x < 1 \implies f_2(x)$ es una **parábola convexa**, la más sencilla $f_2(x) = x^2$.

2.3. $Si \;\; 2 < x \implies f_3(x)$ es una **recta horizontal** a altura 4, luego es la **función constante** $f_3(x) = 4$.

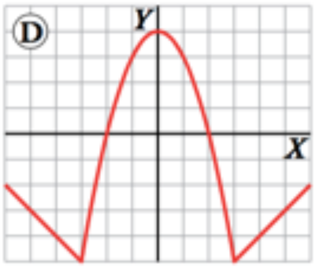
Así que la expresión analítica de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & si \quad x \leq -2 \\ x^2 & si \quad -2 < x \leq 0 \\ 4 & si \quad 2 < x \end{cases}$$

Comprobamos:



B4)



1. Identificamos los trozos. El primero es hasta x=-3, el segundo entre x=-3 y x=3 y el tercero desde x=3. Así podemos escribir:

$$f(x) = \begin{cases} & si \quad x \leq -3 \\ & si \quad -3 < x \leq 3 \\ & si \quad 3 < x \end{cases}$$

2. Obtenemos las funciones para cada trozo:

2.1. $Si \;\; x < -3 \implies f_1(x)$ es una **recta de pendiente m=–1** (baja uno por cada uno que avanza) y ordenada en el origen n=–8, se puede ver de dos modos:

- Forma intuitiva: si prolongamos la recta, vemos que tocaría al eje vertical en el –8,
- Calculando con ecuación punto pendiente (punto (–3,-5) pendiente –1):

$y + 5 = -1 \cdot (x + 3)$

De cualquier forma sale la función lineal $f_1(x) = -x - 8$.

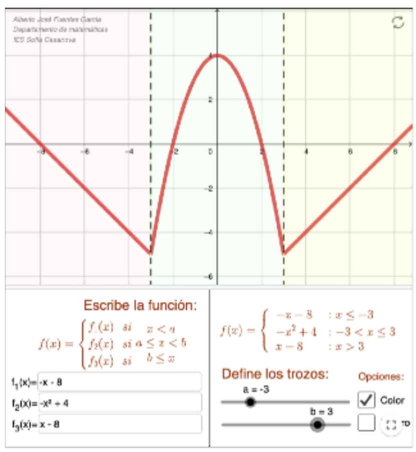
2.2. $Si \;\; -1 \leq x < 1 \implies f_2(x)$ es una **parábola cóncava** (función cuadrática con a negativo). Partimos de la parábola convexa de referencia, $y = -x^2$, la desplazamos cuatro unidades hacia arriba y obtenemos $f_2(x) = -x^2 + 4$.

2.3. $Si \;\; 3 < x \implies f_3(x)$ es una **recta de pendiente m=1** (sube uno por cada uno que avanza) y ordenada en el origen n=–8 (razonar como en 2.1): $f_3(x) = x - 8$

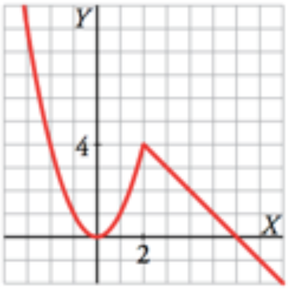
Así que la expresión analítica de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 8 & si \quad x \leq -3 \\ -x^2 + 4 & si \quad -3 < x \leq 3 \\ x - 8 & si \quad 3 < x \end{cases}$$

Comprobamos:



B5)



1. Identificamos los trozos. El primero es hasta x=2 y el segundo desde x=2. Así podemos escribir:

$$f(x) = \begin{cases} & si \quad x \leq 2 \\ & si \quad 2 < x \end{cases}$$

2. Obtenemos las funciones para cada trozo:

2.1. $Si \ \ x < 2 \implies f_1(x)$ es una **parábola convexa** (función cuadrática con a positivo), la más sencilla $f_2(x) = x^2$.

2.2. $Si \ \ 2 < x \implies f_2(x)$ es una **recta de pendiente m=–1** (baja uno por cada uno que avanza) y ordenada en el origen n=6, se puede ver de dos modos:

- Forma intuitiva: si prolongamos la recta, vemos que tocaría al eje vertical en el 6,
- Calculando con ecuación punto pendiente (punto (2,4) pendiente –1):

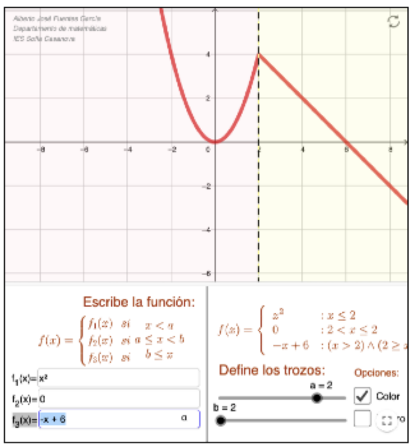
$y - 4 = -1 \cdot (x - 2)$

De cualquier forma sale la función lineal $f_1(x) = -x + 6$.

Así que la expresión analítica de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq 2 \\ -x + 6 & si \quad 2 < x \end{cases}$$

Comprobamos:



BOLETÍN DE REPASO PARA 1°BACHILLERATO: EJERCICIOS DE FUNCIONES 4°ESO

SOLUCIONES DETALLADAS - EJERCICIO 4

Dejo las soluciones con explicaciones de los ejercicios del boletín de repaso de funciones de 4º de ESO.

También adjunto las gráficas aunque no se pidan en todos los ejercicios, para que vayáis acostumbrando la vista, ya que uno de los objetivos fundamentales es dominar la representación gráfica y ganar intuición para saber de forma aproximada cómo es una función sin gastar demasiado tiempo.

En cursiva están las explicaciones didácticas, no es necesario que las escribáis (tampoco pasa nada si lo hacéis).

3. Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas:

a) $f(x) = \begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = 2x^2 - 4x \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} y = -x^2 + 6x - 9 \\ y = \frac{x}{2} - 3 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} y = -2x+4 \\ y = 2x^2 - 4x \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

Simplemente hay que resolver el sistema de ecuaciones no lineal, *y la forma en la que se escriben las funciones, nos invita a usar igualación (o reducción) para que se vaya la y*.

$$\begin{cases} y = -2x+4 \\ y = 2x^2 - 4x \end{cases} \Longrightarrow -2x+4 = 2x^2 - 4x \Longrightarrow 0 = 2x^2 - 2x - 4 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 0 = x^2 - x - 2$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado ($x = 2$ y $x = -1$) y obtenemos los valores de y correspondientes: $\begin{cases} si\ \ x = 2 \Longrightarrow y = -2 \cdot 2 + 4 = 0 \\ si\ \ x = -1 \Longrightarrow y = -2 \cdot (-1) + 4 = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (2,\ 0) \\ (-1{,}6) \end{cases}$

RESOLUCIÓN GRÁFICA

$y = -2x + 4$ es una recta de pendiente –2 y ordenada en el origen 4; *eso es suficiente para representarla aproximadamente, pero mejor lo completamos en una tabla de valores al menos con el corte con el eje X (si y=0, x=4/2=2, el punto es el (2, 0))*:

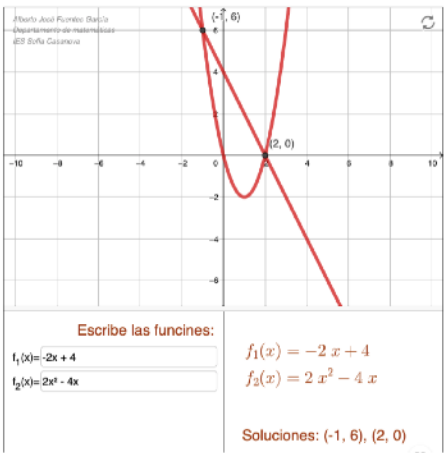
X	Y
0	4 (n)
1	2
2	0

$y = 2x^2 - 4x$ es una función cuadrática con a>0, luego es parábola convexa (∪).

Vértice: $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2 \cdot 2} = 1 \Longrightarrow y = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = -2 \Longrightarrow V(1. -2)$

Damos valores a la izquierda y a la derecha del vértice, y representamos en la misma gráfica:

X	Y
-1	6
0	0
1	**-2 (V)**
2	0
3	6



Según vemos en la gráfica, las funciones se cortan en los puntos (–1,6) y (2,0)

b) $f(x) = \begin{cases} y = -x^2 + 6x - 9 \\ y = \frac{x}{2} - 3 \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

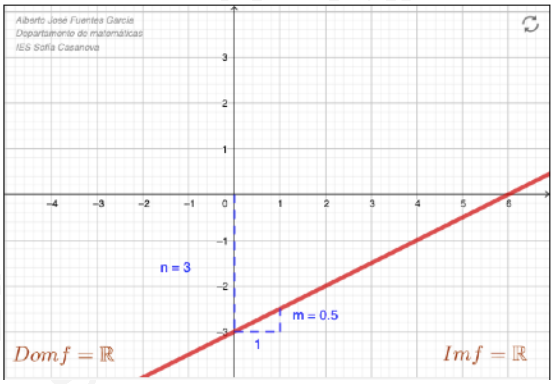
Simplemente hay que resolver el sistema de ecuaciones no lineal, *y la forma en la que se escriben las funciones, nos invita a usar igualación (o reducción) para que se vaya la y.*

$$\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 9 \\ y = \frac{x}{2} - 3 \end{cases} \implies -x^2 + 6x - 9 = \frac{x}{2} - 3 \implies 2x^2 - 11x + 12 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado ($x = \dfrac{3}{2}$ y $x = 4$) y obtenemos los valores de y correspondientes: $\begin{cases} si\ \ x = \frac{3}{2} \implies y = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4} = -2'25 \\ si\ \ x = 4 \implies y = 2 - 3 = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} (\frac{3}{2},\ -\frac{9}{4}) \\ (4, -1) \end{cases}$

RESOLUCIÓN GRÁFICA

$y = \dfrac{x}{2} - 3$ es una recta de pendiente –1/2 y ordenada en el origen –3; *eso es suficiente para representarla aproximadamente, pero mejor lo completamos en una tabla de valores al menos con el corte con el eje X (si y=0, x=6, el punto es el (6, 0)):*



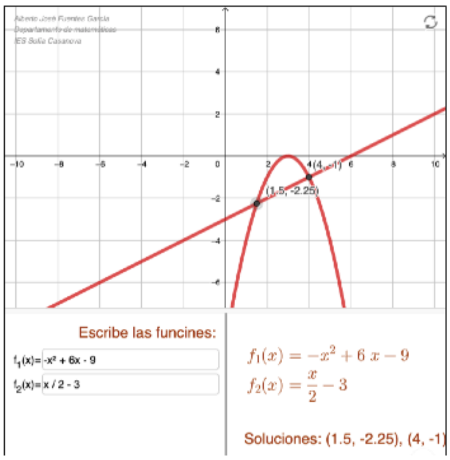
X	Y
0	-3 (n)
2	-2
4	-1
6	0

$y = -x^2 + 6x - 9$ es una función cuadrática con a<0, luego es parábola cóncava (∩).

Vértice: $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2 \cdot (-1)} = 3 \implies y = -3^2 + 6 \cdot 3 - 9 = 0 \implies V(3. -0)$

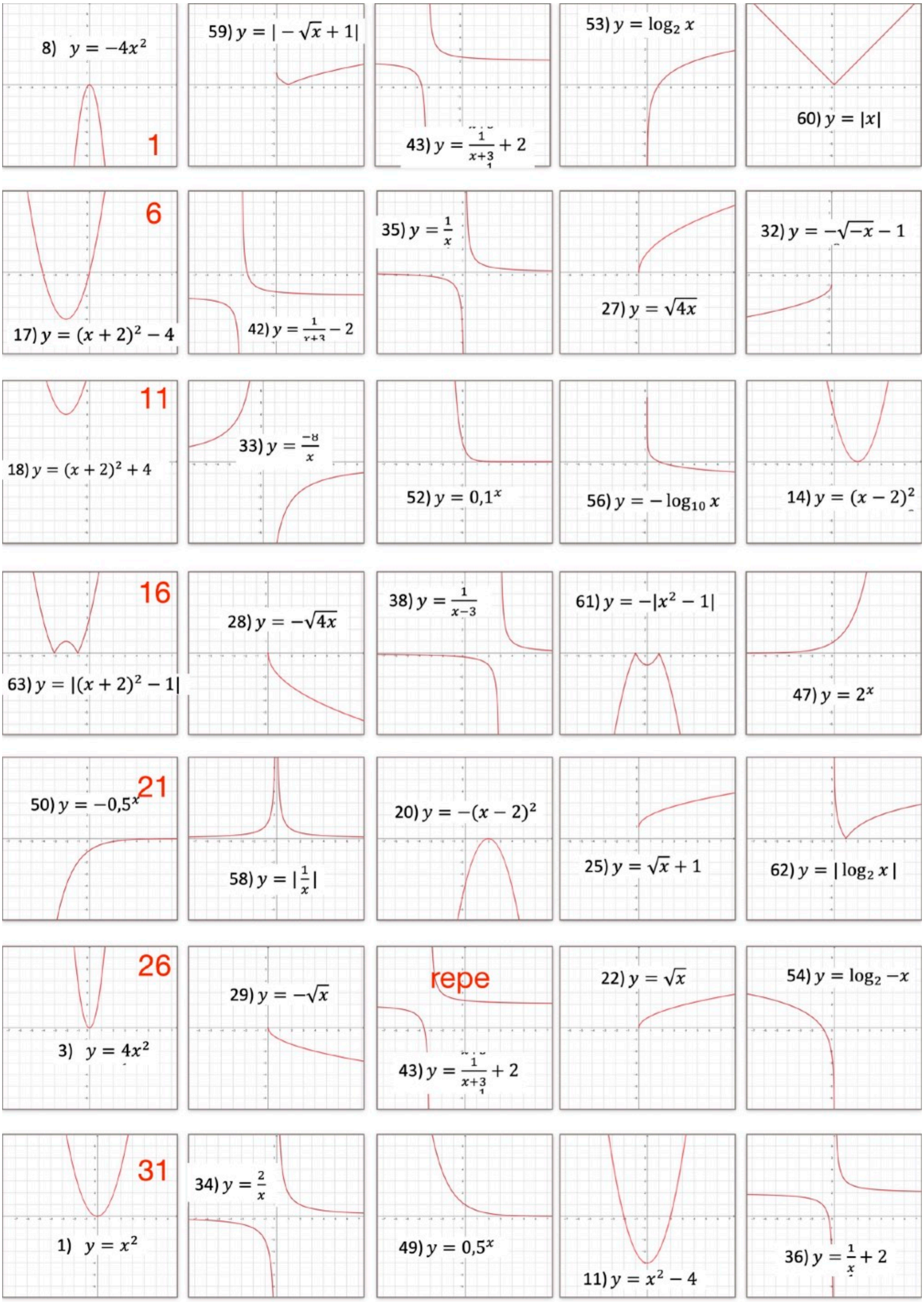
Damos valores a la izquierda y a la derecha del vértice, y representamos en la misma gráfica:

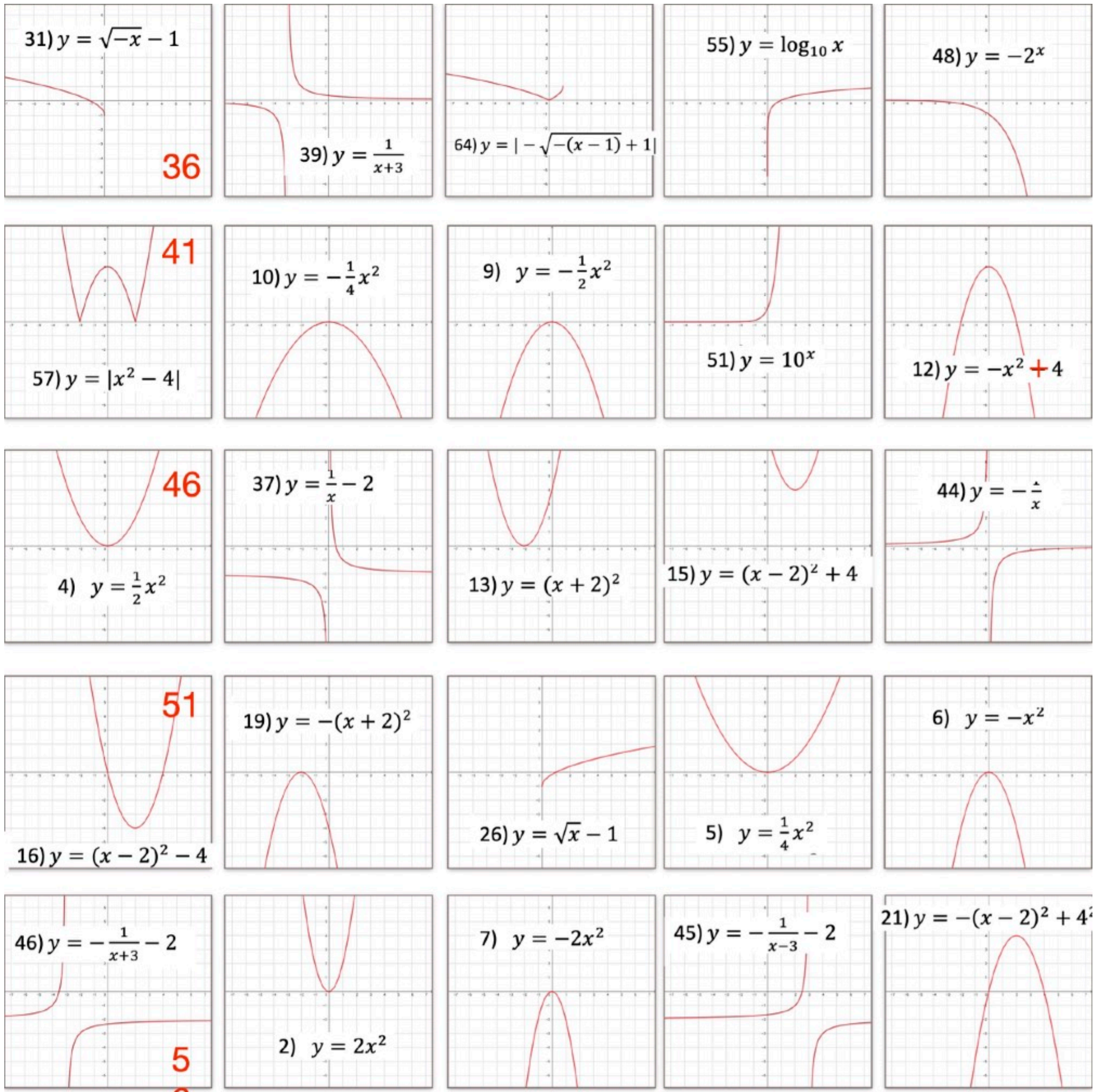
X	Y
1	-4
2	-1
3	**0 (V)**
4	-1
5	-4

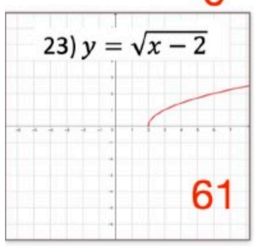


Según vemos en la gráfica, las funciones se cortan en los puntos (1'5, –2'25) y (4, –1)

SOLUCIONES EJERCICIO 5







quedan sin asignar

24) $y = \sqrt{x+2}$ 40) $y = \frac{1}{x-3} + 2$

30) $y = \sqrt{-x}$ 41) $y = \frac{1}{x-3} - 2$