Modelo A - 1av1ex: referencia, puede haber alguna modificación (Puntuación total: 10 puntos)
Se dan algunos ejemplos simplificados como referencia en estos modelos.

Ejercicio 1: Límites y Continuidad/Derivabilidad (2,5 puntos)

- a) (0,75 puntos) Cálculo de un límite con L'Hôpital (una o varias veces) y/o involucre funciones trigonométricas/exponenciales/logarítmicas (con o sin parámetro)

- b) (0,75 puntos) Cálculo de un límite que requiera estrategias específicas (1^∞, 0^0, ∞^0, 0·∞, ∞-∞ con logaritmos, nºe o cálculo de parámetro, resta de raíces (conjugado), operaciones algebraicas...).

- c) (1 punto) Dada una función f(x) a trozos con parámetros. Hallar parámetros para continuidad y/o derivabilidad en todo R o punto específico.
  Este apartado puede modificarse/combinarse con teoría si cae TVM

Ejercicio 2: Aplicaciones de la Derivada (2,5 puntos)

- a) (1,25 puntos) **(Cálculo de Parámetros/tangentes/normal/otros datos funcionales):** Dada una función, calcular parámetros con condiciones sobre inflexión, extremos, tangentes u obtención de rectas tangentes, normales...
  - *Ejemplo: $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Inflexión en $x=1$, tangente $y=-2x+3$. Calcular a,b,c.*
  - *Ejemplo: Dada $f(x) = x/(x-1)$, hallar la ecuación de la recta tangente que es paralela a $2x+y=0$.*

  - b) (1,25 puntos) Problema de optimización (geométrico, funcional, contextual…).

Ejercicio 3: Teoremas Fundamentales y sus Aplicaciones (3 puntos)

- a) b)(0,5 puntos) Definición de derivada en un punto e interpretación geométrica/Enunciado de Teorema Fundamental (Bolzano, Rolle o Valor Medio).

- c) (0,5 puntos) Interpretación geométrica del teorema enunciado.

- d) (1,5 puntos) Aplicaciones de Bolzano y/o Rolle (existencia y/o unicidad de raíz/corte (función resta h(x)=f(x)-g(x)) o TVM encontrando punto que verifica.

Ejercicio 4: Representación Gráfica de Funciones (2 puntos)

- Estudio y representación gráfica (Racional, con log/exp...). Dominio, simetrías, cortes con ejes, asíntotas (V, H, O), monotonía y extremos y (a veces) curvatura y puntos de inflexión.

Notas Generales Adicionales (para todo el trimestre)

1. **Valor Absoluto:** Procurar incluir en algún examen transformando en función a trozos.
2. **Expresiones Trigonométricas:** Procurar incluir en contextos diversos (razones de ángulos conocidos, uso de radianes, expresiones/ecuaciones sencillas...).
3. **En límites/continuidad:** A veces, para que el límite sea un valor específico, se toma el valor parámetro m/a que genere una indeterminación Ej. (m-2)/0, continuamos con m=2).
4. **Tipos de Problemas en Optimización:** Variar contextos. Algunos ejemplos:
   ***Geométricas 2D/funcionales**: Rectángulo de área máx. inscrito en curva/región; triángulo de área máx.; distancia mínima entre punto y curva; dimensiones de una página para que el área impresa sea máx. con márgenes fijos (o superficie mínima de papel para un área impresa dada con márgenes), perímetro mínimo dada área.…**Geométricas 3D:** Caja (con/sin tapa) de volumen máx./superficie mín./coste mín. con material dado (ej: recortando esquinas de una plancha rectangular/cuadrada para hacer una caja); cilindro de volumen máx. **División de cantidades**: Dividir un número en sumandos para optimizar un producto/suma de cuadrados; dividir un alambre para formar dos o más figuras geométricas (ej: cuadrado y círculo, cuadrado y triángulo equilátero) y optimizar suma/diferencia de áreas. **Costes/Beneficios/Otros**: Minimizar coste de material/ construcción; maximizar beneficio; ángulo de visión máximo a un cuadro/pantalla.*

Modelo B - 1av2ex: referencia, puede haber alguna modificación (Puntuación total: 10 puntos)

Ejercicio 1: Límites, Continuidad y Derivabilidad (1,5 puntos)

- a) (0,75 puntos) Cálculo de un límite con/sin parámetro que requiera L'Hôpital (una o varias veces) y/o involucre funciones trigonométricas/exponenciales/logarítmicas, o que sea de tipo 0^0, ∞^0, 1^∞ (requiriendo logaritmos, nºe u otras estrategias).
  - *Ejemplo: Hallar 'a' para que lim $(\ln(x+1) - a\cdot\sin(x) + x\cdot\cos(3x)) / x^2$ sea finito y calcular el límite.*
- b) (0,75 puntos) Estudio de continuidad y/o derivabilidad de una función definida a trozos con parámetros, o con valor absoluto.
  - *Ejemplo: Sea $f(x) = 2x|x-4|$. Estudia su continuidad y derivabilidad o verifica TVM*
  - *Ejemplo: Calcula a,b,c para que $f(x)=\{ax^2+bx+c$ si $x\leq0$; $x+\ln(1+x^2)$ si $x>0\}$ sea continua, derivable y tenga extremo en $x=-2$ (como en pág. 8, 2022-2023, aunque este es de "1er examen", el tipo de problema es aplicable).*

Ejercicio 2: Aplicaciones de la Derivada (2,5 puntos)

- a) (0,75 - 1 punto) Dada una función, determinar parámetros con condiciones sobre extremos, inflexión, tangentes.
  - *Ejemplo: $f(x)=2x^3-x^2+cx+d$. Tangente en $P(1,-2)$ es $y=5x-7$. Hallar c y d.*
- b) (0,75 - 1 punto) Problema de optimización. *(Ya comentado en modelo A)*

- c) (0,75 - 1 punto) Ejercicio sobre aspectos de la representación gráfica:
  - Dibujar una gráfica con una serie de condiciones dadas (límites, asíntotas, monotonía, curvatura, valores de la función).
  - Dada una función, hallar sus asíntotas y/o estudiar su monotonía y extremos, y/o su curvatura y puntos de inflexión.
  - *Ejemplo: Sea $f(x) = \ln(x)/x$. Halla su dominio, sus asíntotas y la monotonía.*
  - *Ejemplo: Dibujar gráfica con propiedades dadas*

Ejercicio 3: Teoremas Fundamentales del Cálculo Diferencial (1,5 puntos)

- a) (0,75 puntos) Enunciar Teoremas de Rolle y/o Valor Medio del cálculo diferencial y/o Bolzano y/o, o def. derivada o continuidad. Se puede pedir interpretación geométrica.
- b) (0,75 puntos) Aplicación de uno de los teoremas:
  - Bolzano: Demostrar existencia de raíz/corte entre funciones (posiblemente con unicidad usando Rolle/monotonía).
  - Rolle/TVM: Verificar hipótesis y calcular el valor o valores 'c'.
  - *Ejemplo: Enunciado e interpretación de Bolzano. Dadas $f(x)=x^3$ y $g(x)=3-x$, ¿se cortan en [0,2]? Demuestra corte es único.*
  - *Ejemplo: Explique si $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ en [0,1] está en las hipótesis del TVM. En caso de que lo esté, calcule 'c'.*

Ejercicio 4: Cálculo de Integrales Indefinidas (4,5 puntos)

- a) (0,5 puntos) Definición de función primitiva / integral indefinida.
- b) Resolver las siguientes integrales (distribuir 4 puntos entre 4-5 integrales):
  - b1) (0,5 puntos) Inmediata (potencial, logarítmica, exponencial, trigonométrica directa, arcoseno) o cambio sencillo.
  - b2) (0,5 puntos) Inmediata con cambio de variable, o transformable a potencial, o de tipo arcotangente (completar cuadrados).
  - b3) (0,75 puntos) Integral con cambio "raíces que estorban".
  - b4) (0,75 puntos) Integral por partes.
  - b5) (0,75 puntos) Otra integral por partes.
  - b6) (0,75 puntos) Integral racional (división, raíces reales simples/múltiples) con descomposición en fracciones simples.

Ejercicio 1. PUNTUACIÓN: 1+1 = 2 puntos.

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x + e^{-x} - 1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$

b) Calcula, si existe, el valor de m para que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(x) - mx^2}{e^{x^2} - cos(2x)} = -1$

Ejercicio 2. PUNTUACIÓN: 1 + 0,5 = 1,5 puntos.

a) Calcula los valores de a y b para que la función f cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en cualquier intervalo $[1, m]$, $m > e$.

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln x & si \quad 0 < x \leq e \\ bx & si \quad x > e \end{cases}$$

b) Definición de derivada de una función en un punto.

Ejercicio 3. PUNTUACIÓN: 1+0,75+0,75 = 2,5 puntos.

a) Enuncia el teorema de Bolzano y explica su interpretación geométrica.
b) Dadas las funciones $f(x) = x^5$ y $g(x) = 3 - x$, ¿podemos afirmar que las gráficas de ambas funciones se cortan en algún punto del intervalo [0,2]?
c) Demuestra, usando el teorema de Rolle, que las funciones del apartado b) no se cortan en más de un punto en el intervalo [0,2].

Ejercicio 4. PUNTUACIÓN: 1+1 = 2 puntos.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$ en el punto en el que sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

b) De entre todos los rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes, y un vértice sobre la gráfica de $f(x) = 8 - 2x^2$, determina los vértices del que tiene mayor área.

Ejercicio 5. PUNTUACIÓN: 2 puntos.

Dibuja la gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)}$ estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos.

Ejercicio 1. PUNTUACIÓN: 1+1 = 2 puntos.

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to \infty} (3^x + 1)^{\frac{2}{x-1}}$

c) Calcula, si existe, el valor de m para que $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos^2 x}{mx^2 - \sin(x^2)} = 2$

Ejercicio 2. PUNTUACIÓN: 1 + 0,5 = 1,5 puntos.

a) Calcula el valor de a para que la función f cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en cualquier intervalo.

$$f(x) = \frac{x - a}{1 + |x - 1|}$$

b) Definición de continuidad en un punto.

Ejercicio 3. PUNTUACIÓN: 0.75+1+0,75 = 2,5 puntos.

a) Dadas las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2 - x$, usa el Teorema de Bolzano para demostrar que las gráficas de ambas funciones se cortan en algún punto en [0,2].
b) Enuncia el teorema de Rolle y da su interpretación geométrica.
c) Demuestra, usando el teorema de Rolle, que las funciones del apartado b) no se cortan en más de un punto en el intervalo [0,2].

Ejercicio 4. PUNTUACIÓN: 1+1 = 2 puntos.

a) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcula los valores de $a,\ b,\ c,\ d$ sabiendo que tiene un punto de inflexión en (0, 2) y es tangente a la recta y = –2x–2 en en (1, –4).
b) Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido por la gráfica de $f(x) = 6 - \dfrac{x^2}{6}$ y la recta y=0.

Ejercicio 5. PUNTUACIÓN: 1,5 puntos.

Dibuja la gráfica de $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x}$ estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos e mínimos relativos.

Ejercicio 1. PUNTUACIÓN: 0,75+0,5+1,25 = 2,5 puntos.

a) Calcula m para que $\lim_{x \to 0} \left(\frac{mx^2 - 1 + \cos x}{\sin(x^2)} \right) = 0$ b) Calcula $\lim_{x \to 0^+} x^x$

c) Calcula los valores de $a,\ b$ y c para que $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & si \quad x \leq 0 \\ x + \ln(1 + x^2) & si \quad x > 0 \end{cases}$ sea continua y derivable en $\mathbb{R}$ y tenga un extremo relativo en $x = -2$.

Ejercicio 2. PUNTUACIÓN: 1,25+1,25 = 2,5 puntos.

a) Dada $g(x) = ax^4 + bx + c$, calcula los valores de $a,\ b,\ c$ para que $g(x)$ tenga en el punto $(1,\ -1)$ un mínimo relativo y la recta tangente a la gráfica de $g(x)$, en $x = 0$, sea paralela a la recta $y = 4x$.

b) Se quiere construir un acuario con forma de paralelepípedo recto, con tapa y base cuadradas. La tapa es de metacrilato, la base es de un material metálico, y las caras verticales, de cristal.
El metacrilato tiene un precio de 15 €/m^2, el material metálico de 90 €/m^2, y el cristal, de 25 €/m^2. Con un presupuesto de 1260 €, ¿cuál es el volumen máximo del acuario que se puede construir con estas características?

Ejercicio 3. PUNTUACIÓN: 0,5+1+0,75+0,75 = 3 puntos.

a) Definición de continuidad de una función en un punto.
b) Enuncia el teorema de Bolzano y explica su interpretación geométrica.
c) Dada la función $f(x) = x^3 + x - 1$, ¿podemos afirmar que la gráfica de la función corta al eje X en algún punto del intervalo [0,2]?
d) Demuestra, usando el teorema de Rolle, que la función del apartado b) tiene una única raíz en el intervalo [0,2].

Ejercicio 4. PUNTUACIÓN: 2 puntos.

Dibuja la gráfica de $f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 2}$ estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos.

Ejercicio 1. PUNTUACIÓN: 0,75+0,5+1,25 = 2,5 puntos.

a) Calcula a para que $\lim_{x\to 0}\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{a}{x^2}} = 2$ b) Calcula $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x - 1}{1+2x-e^{2x}}$

c) Dada $f(x) = \begin{cases} a(x^2-9)+\frac{bx}{3}-b & si \quad x<3 \\ \ln b(x-2) & si \quad x \geq 3 \end{cases}$, calcula los valores de los parámetros reales a y b para que sea derivable en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2. PUNTUACIÓN: 1,25+1,25 = 2,5 puntos.

a) Sea $f(x) = x^4 + Ax^2 + Bx + C$. Obtener los valores de A, B y C para que en el punto de abscisa $x = 0$ la recta tangente a la gráfica de f sea $y = 2x - 1$ y en el punto de abscisa $x = 1$ la recta tangente a la gráfica de f sea horizontal. El extremo situado en el punto de abscisa $x = 1$, ¿es máximo o mínimo?

b) Se dispone de una plancha de cartón cuadrada cuyo lado mide 1,2 metros. Determínense las dimensiones de la caja (sin tapa) de volumen máximo que se puede construir, recortando un cuadrado igual a cada esquina de la plancha y doblando adecuadamente para unir las aristas resultantes de los cortes.

Ejercicio 3. PUNTUACIÓN: 1+0,5+0,75+0,75 = 3 puntos.

a) Definición e interpretación geométrica de derivada de una función en un punto.

b) Enuncia el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial.

c) Sea la función $f(x) = x^3 - 2x + 5$. Aplica el teorema del Valor Medio para decir si existe algún punto en el que la pendiente de la tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$. Determina, si existen, las abscisas de los puntos donde se cumpla el teorema.

d) Sabemos que $f(x) = x^3 - 2x + 5$ tiene al menos una raíz en el intervalo [-3,-1]. Demuestra, usando el teorema de Rolle, que la raíz es única.

Ejercicio 4. PUNTUACIÓN: 2 puntos.

Dibuja la gráfica de $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$ estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos.

Ejercicio 1. PUNTUACIÓN: 0,75+0,5+1,25 = 2,5 puntos.

a) Calcula $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x}$ b) Calcula $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$

c) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{k - xe^x}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$,

¿Cuál es el valor de k que hace que f sea continua en $x = 0$ para cualquier valor de b?

¿Para qué valores de b y k es f derivable en $x = 0$?

Ejercicio 2. PUNTUACIÓN: 1,25+1,25 = 2,5 puntos.

a) La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tiene como tangente en el punto de inflexión $(1,0)$, la recta $y = -3x + 3$, y además presenta un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula el valor de los parámetros a, b, c y d.

b) Una ventana normanda consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo. De entre todas las ventanas normandas de perímetro 10 m, halla las dimensiones del marco de la de área máxima.

Ejercicio 3. PUNTUACIÓN: 0,5+0,5+0,75+1,25 = 3 puntos.

a) Definición de derivada de una función en un punto.

b) Enunciado del Teorema de Rolle. c) Interpretación gráfica del Teorema de Rolle.

d) Demuestra, utilizando los teoremas de Rolle y Bolzano, que las gráficas de las funciones $f(x) = 2x^3$ y $g(x) = 1 - x$ se cortan en un único punto en el intervalo $(0,1)$

Ejercicio 4. PUNTUACIÓN: 2 puntos.

Dibuja la gráfica de $f(x) = 2x + (2x)^{-1}$ estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos.

Ejercicio 1. PUNTUACIÓN: 0,5+0,5 = 1 punto.

Calcula los siguientes límites: a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - \cos(x-1)}{(\ln x)^2}$ b) $\lim_{x \to 0} \left(\cos(2x)\right)^{\frac{3}{x^2}}$

Ejercicio 2. PUNTUACIÓN: 1 punto.

Representa gráficamente la función $f(x) = x + e^{-x}$ calculando dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, curvatura y puntos de inflexión.

Ejercicio 3. PUNTUACIÓN: 0,75+1 = 1,75 puntos.

a) Comprueba si la función $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [2, 4] y en el intervalo [–1, 3]. Determina, si es posible en alguno de los dos intervalos, el punto en el que la recta tangente a la curva es paralela al eje X.

b) Con un alambre de 1 metro, se construyen dos figuras, un cuadrado y una circunferencia. Calcula la longitud de cada uno de los trozos en los que queda dividido el alambre para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea mínima.

Ejercicio 4. PUNTUACIÓN: 0,5+0,75+0,5 = 1,75 puntos.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} mx & si \quad x < 1 \\ ax^2 + bx + 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a, b y m para que la función sea continua y derivable en $x = 1$ y tenga un extremo relativo en $x = 3$.

b) Enunciado e interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo diferencial.

c) Para el caso $a = 1$, $b = -6$ y $m = -4$ calcula, si existe, un punto c en el intervalo $(0, 5)$ tal que la recta tangente a la gráfica de c en dicho punto sea paralela al segmento que une los puntos $(0, 0)$, $(5, -4)$.

Ejercicio 5. PUNTUACIÓN: 0,5+1,5+2,5 = 4,5 puntos.

a) Definición de integral indefinida. (0,5 puntos)

b) Resuelve: (0,5 integrales b, c1 y c2, 0,75 integrales c3 y c4)

b1) $\displaystyle\int \frac{8x}{\sqrt{1 - 9x^4}}\, dx$ b2) $\displaystyle\int x\sqrt{x - 1}\, dx$ b3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x^3} + 2x^2}{\sqrt[3]{x}}\, dx$

c1) $\displaystyle\int x \sin x\, dx$ c2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}\, dx$ c3) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$ c4) $\displaystyle\int \frac{3x - 2}{x^3 - x^2}\, dx$

Ejercicio 1. PUNTUACIÓN: 0,5+0,5= 1 punto.

a) Calcula $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2(1-2x)}{x - 2x^2 - \sin x} \right)$

b) Calcula a para que $f(x) = \begin{cases} a & si \;\; x < 0 \\ 1 + xe^{-x} & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$ sea continua en x=0 y estudiar la derivabilidad.

Ejercicio 2. PUNTUACIÓN: 0,75+0,75 = 1,5 puntos.

a) Calcula los valores de a y b para que la función $f(x) = ax^2 + bx \cdot \ln x$ tenga un punto de inflexión en el punto (1,2). Para esos valores de a y b, calcula el dominio y los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$.

b) Halla la asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1}$

Ejercicio 3. PUNTUACIÓN: 0,75+0,75= 1,5 puntos.

a) Dada la función $f(x) = 2\cos(x) + |x-1|$, calcula $f'(0)$, y obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.

b) Se desea construir una caja sin tapa superior. Para ello, se usa una lámina de cartón rectangular, de 15 cm de ancho por 24 cm de largo, doblándola después de recortar un cuadrado de iguales dimensiones en cada esquina. Indicar cuáles son las dimensiones de la caja que hacen máximo su volumen.

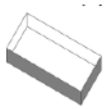


Figura 1

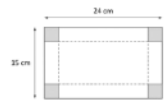


Figura 2

Ejercicio 4. PUNTUACIÓN: 0,75+0,75= 1,5 puntos.

a) Enunciado e interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio de Lagrange.
b) Aplicar, si es posible, el Teorema del Valor Medio a la función $g(x) = x^2 + x$ en el intervalo [1, 2], y calcular, en tal caso, un punto de dicho intervalo en el que $g'(x)$ tome el valor predicho por el Teorema del Valor Medio.

Ejercicio 5. PUNTUACIÓN: 0,5+1,5+2,5 = 4,5 puntos.

a) Definición de integral indefinida. (0,5 puntos)

b) Resuelve: (0,5 integrales b1, b2, b3, c1 y c2, 0,75 integrales c3 y c4)

b1) $\displaystyle\int e^x(2x-1)\,dx$ b2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3}\,dx$ c1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{5x^3}}{3x}\,dx$

c2) $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,dx$ c3) $\displaystyle\int x^2 \ln x\,dx$ c4) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^3+2x^2+x}\,dx$

Ejercicio 1. PUNTUACIÓN: 0,5+0,5= 1 punto.

a) Halla a para que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(x+1)-a\cdot sin x + x\cos(3x)}{x^2}\right)$ sea finito y calcula el limite.

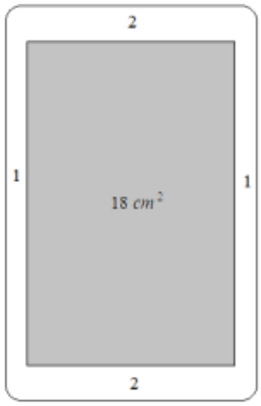
b) Sea la función $f(x)=2x|x-4|$. Estudia su continuidad y derivabilidad.

Ejercicio 2. PUNTUACIÓN: 0,75+0,75 = 1,5 puntos.

a) Calcula el valor de los parámetros c y d para que la función $f(x)=2x^3-x^2+cx+d$, tiene como recta tangente en el punto $P(1,-2)$ la recta de ecuación $y=5x-7$

b) Sea la función $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Halla su dominio, sus asíntotas y la monotonía.

Ejercicio 3. PUNTUACIÓN: 0,75+0,75= 1,5 puntos.



a) Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x)=4x^3-2x+1$ y que son perpendiculares a la recta $x+y-2=0$.

b) Se quiere fabricar un smartphone con una pantalla LCD de $18\ cm^2$. Los bordes superior e inferior han de tener $2\ cm$ cada uno, y los bordes laterales $1\ cm$. Calcular las dimensiones del teléfono para que la superficie del mismo sea mínima.

Ejercicio 4. PUNTUACIÓN: 1+0,5= 1,5 puntos.

a) Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Bolzano. Dadas las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=3-x$, ¿se puede afirmar que sus gráficas se cortan en algún punto del intervalo [0,2]?
b) Demuestra, usando el teorema de Rolle, que el punto de corte es único.

Ejercicio 5. PUNTUACIÓN: 0,5+1+3 = 4,5 puntos.

a) Definición de integral indefinida. (0,5 puntos)

b) Resuelve: (0,5 integrales b1, b2, 0,75 c1, c2, c3 y c4)

b1) $\int \sin x\cdot\sin(\cos x)\,dx$ b2) $\int \frac{1}{5x^2+9}\,dx$ c1) $\int \frac{\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

c2) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$ c3) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ c4) $\int \frac{2x^2+6x-4}{x^3+4x^2+4x}\,dx$

Ejercicio 1. PUNTUACIÓN: 0,75+0,75= 1,5 punto.

a) Calcule el valor de $a \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ para que se verifique el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \left(1 - \sin^2(x)\right)^{\frac{a}{x^2}} = 2.$$

b) Calcula a, b, c, para que $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & si\ \ x \leq 0 \\ x + ln(1 + x^2) & si\ \ x > 0 \end{cases}$ sea continua y

derivable en $\mathbb{R}$ y tenga un extremo relativo en $x = -2$.

Ejercicio 2. PUNTUACIÓN: 0,75+0,75+1 = 2,5 puntos.

a) Sea $f(x) = x^4 + Ax^2 + Bx + C$. Obtener los valores de A, B y C para que en el punto de abscisa $x = 0$ la recta tangente a la gráfica de f sea $y = 2x - 1$ y en el punto de abscisa $x = 1$ la recta tangente a la gráfica de f sea horizontal. El extremo situado en el punto de abscisa $x = 1$, ¿es máximo o mínimo?

b) Dibuje la gráfica de una función f continua en el intervalo $(0, 4]$ tal que:

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, $\quad f(1) = 0$, $\quad f(4) = 0$, $\quad f'' < 0$ en el intervalo $(0,2)$,

$f'' > 0$ en el intervalo $(3,4)$ y f es constante en el intervalo $(2,3)$.

c) De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x + 3y = 6$ y otro en el origen de coordenadas, determine los vértices del que tiene mayor área.

Ejercicio 3. PUNTUACIÓN: 0,75+0,75=1,5 puntos.

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.

b) Explique si $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio do cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de este.

Ejercicio 4. PUNTUACIÓN: 0,5+1+3 = 4,5 puntos.

a) Definición de integral indefinida. (0,5 puntos)

b) Resuelve: (0,5 integrales b1, b2, 0,75 c1, c2, c3 y c4)

b1) $\displaystyle\int (\sin x)^5 \cdot \cos x \, dx$

b2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2} \, dx$

c1) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} \, dx$

c2) $\displaystyle\int \frac{x^2}{e^x} \, dx$

c3) $\displaystyle\int x \left(\ln x - 1\right) \, dx$

c4) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x} \, dx$