

O exame consta de **4 preguntas de resposta obrigatoria, puntuadas cada unha con 2,5 puntos**: a primeira sen apartados optativos e as tres seguintes con posibilidade de elección entre apartados.

PREGUNTA 1. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE. (2,5 puntos)

CONTEXTO

Algunhas probas médicas resultan ser «positivas» ou «negativas». Se a proba fose infalible, «positiva» indicaría que a persoa examinada ten a enfermidade en cuestión; «negativa» indicaría que non a ten. Unha guionista está escribindo, para unha coñecida plataforma de *streaming*, unha historia que ten lugar nun país imaxinario. Explica no seu guión que, para detectar unha rara enfermidade que afecta a 1 de cada 10000 persoas, unha empresa farmacéutica logra desenvolver unha proba que resulta ser moi fiable, pois soamente 1 de cada 100 persoas libres da enfermidade obtén un resultado positivo, e soamente 2 de cada 100 persoas que padecen a enfermidade obteñen resultados negativos. Di tamén que os detalles que revelan o deseño da proba están protexidos por varios sistemas de seguridade, e que, o 9 de agosto de 2024, a clave que permite abrir o último deses sistemas é o número 219, que se calculou, especificamente para ese día, do seguinte xeito:

clave = n.º de ríos cuxa lonxitude en metros comeza co dígito 9,
de entre os 2000 máis longos do país = 219.

Pouco antes de entregar o seu guión, xórdenlle dúbidas acerca da verosimilitude das súas cifras, conque decide compartilas cunha amiga matemática. Esta dille que lle responderá despois de ter calculado as seguintes probabilidades:

- P_1 = a probabilidade de que unha persoa cunha proba positiva teña a enfermidade.
- P_2 = a probabilidade de que unha persoa cunha proba negativa teña a enfermidade.
- P_3 = a probabilidade de que 219 ríos ou máis teñan unha lonxitude en metros cuxo primeiro dígito sexa o 9. Con relación a este punto, a amiga matemática observa que, en moitos conxuntos de datos reais, os primeiros díxitos non se distribúen de xeito uniforme, senón que seguen a chamada lei de Benford, a cal afirma que a probabilidade de que un número comece co dígito d é $p = \log_{10}(1 + 1/d)$. Por elo, suporá que a probabilidade de que un río teña unha lonxitude en m cuxo primeiro dígito sexa o 9 é $p = 0.0458$.

Responda estes tres apartados: 1.1., 1.2. e 1.3.

1.1. Calcule P_1 e P_2 . Entenda que os únicos resultados posibles da proba son «positivo» ou «negativo».

(0,5 + 0,5 = 1 punto)

1.2. Calcule P_3 . **(1 punto)**

1.3. En función dos valores de P_1 , P_2 e P_3 , dea ao menos un motivo polo cal a guionista debería modificar algunha das súas cifras. Non é necesario que diga cales deberían ser esas modificacións nin como deberían ser efectuadas. **(0,5 puntos)**

PREGUNTA 2. NÚMEROS E ÁLXEBRA. (2,5 puntos)

Responda un destes dous apartados: 2.1. ou 2.2.

2.1. Responda os dous subapartados seguintes, considerando este sistema lineal:

$$\begin{cases} (m+1)x & + & z & = & 1, \\ (m+1)x & + & y & + & z & = & m+1, \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m. \end{cases}$$

2.1.1. Discuta o sistema en función do valor do parámetro real m . **(2 puntos)**

2.1.2. Se é posible, resólvao no caso $m = 0$. **(0,5 puntos)**

2.2. Responda os dous subapartados seguintes:

2.2.1. Calcule A se $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

2.2.2. Se $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ é invertible, obteña os valores de x , y e z sabendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ e que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Enténdase que I é a matriz identidade. **(1,5 puntos)**

PREGUNTA 3. ANÁLISE. (2,5 puntos)

Responda un destes dous apartados: **3.1.** ou **3.2.**

3.1. Responda os dous subapartados seguintes:

3.1.1. Enuncie os teoremas de Rolle e do valor medio do cálculo diferencial. **(1,25 puntos)**

3.1.2. Explique se $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, está ou non nas hipóteses do teorema do valor medio do cálculo diferencial. En caso de que o estea, calcule un valor c para o cal se cumpra a tese dese teorema. **(0,75 + 0,5 = 1,25 puntos)**

3.2. Responda os dous subapartados seguintes:

3.2.1. Calcule mediante cambio de variable as seguintes integrais:

3.2.1.1. $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx$. **(0,5 puntos)**

3.2.1.2. $\int (\ln x)/x \, dx$. **(0,5 puntos)**

3.2.2. Calcule $\int (\ln x)/x \, dx$ empregando o método de integración por partes. Logo, obteña algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x)/x \, dx = 3/2$. **(1 + 0,5 = 1,5 puntos)**

PREGUNTA 4. XEOMETRÍA. (2,5 puntos)

Responda un destes dous apartados: **4.1.** ou **4.2.**

4.1. Responda os dous subapartados seguintes:

4.1.1. Considéranse $\pi: ax + y + z = 1$, onde a é un parámetro real, e $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$.

4.1.1.1. Estude a posición relativa do plano π e a recta r en función de a . **(0,5 puntos)**

4.1.1.2. Obteña o valor de a que fai que π e r sexan perpendiculares. **(0,5 puntos)**

4.1.1.3. Razoe se r pode estar contida en π ou non. **(0,5 puntos)**

4.1.2. Se π é o plano de ecuación $-3x + y + z = 1$, diga que valor debe tomar o parámetro real b para que a recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ estea contida en π . **(1 punto)**

4.2. Responda os dous subapartados seguintes, onde π é o plano de ecuación $2x - y + z = 1$:

4.2.1. Calcule a distancia de π ao punto de corte das rectas

$r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$. **(1,25 puntos)**

4.2.2. Obteña o punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π . **(1,25 puntos)**

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

PREGUNTA 1. Números e Álgebra. (2 puntos)

Sexan A e B dúas matrices tales que $A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Calcule A^2 .
- Calcule a matriz X que satisfai a igualdade $A^2X - (A + B)^T = 3I - 2X$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e $(A + B)^T$ a trasposta de $(A + B)$.

PREGUNTA 2. Números e Álgebra. (2 puntos)

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema:
$$\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3, \\ 2mx + 3my + 2z = 5, \\ (m-4)y + mz = m. \end{cases}$$

PREGUNTA 3. Análise. (2 puntos)

- Enuncie os teoremas de Rolle e de Bolzano.
- Calcule $\int x^3 e^{x^2}$.

PREGUNTA 4. Análise. (2 puntos)

Calcule os seguintes límites:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$.

PREGUNTA 5. Xeometría. (2 puntos)

- Considérese o plano $\pi: 4x + 2y + bz = 2$ e a recta $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-c}{2} = \frac{z-3}{4}$, onde b e c son parámetros reais. Calcule os valores que teñen que tomar b e c para que a recta r estea contida en π .
- Calcule a distancia do punto $P(1,3,1)$ ao plano $\pi': 4x + 2y - 4z = 2$.

PREGUNTA 6. Xeometría. (2 puntos)

- Considérense os puntos $Q(-1,3,-5)$, $R(3,1,0)$ e $S(0,1,2)$. Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que contén a Q , R e S .
- Obteña as ecuacións paramétricas e a ecuación continua da recta que pasa polo punto $P(3,-1,-1)$ e sexa perpendicular ao plano $\pi: 4x + 23y + 6z - 35 = 0$.

PREGUNTA 7. Estatística e Probabilidade. (2 puntos)

Sabendo que $P(A) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{1}{2}$.

- Supostos que A e B son sucesos independentes, calcule $P(A \cup B)$ e $P(\bar{A} | (\bar{A} \cup \bar{B}))$.
 - Supostos que A e B son sucesos incompatibles, calcule $P(A \cup B)$ e $P(\bar{A} | (\bar{A} \cup \bar{B}))$.
- (Nota: $\bar{A}$ e $\bar{B}$ son os sucesos contrarios ou complementarios de A e B , respectivamente).

PREGUNTA 8. Estatística e Probabilidade. (2 puntos)

Unha máquina que distribúe auga en botellas bota unha cantidade de auga que segue unha distribución normal con media igual a 500 mililitros e desviación típica igual a 4 mililitros.

- Se eliximos ao azar unha das botellas, cal é a probabilidade de que leve entre 499 e 502 mililitros?
- Cal é a cantidade de auga, en mililitros, excedida polo 97,5% destas botellas?

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

PREGUNTA 1. Números y Álgebra. (2 puntos)

Sean A y B dos matrices tales que $A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Calcule A^2 .
- Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A^2X - (A + B)^T = 3I - 2X$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A + B)^T$ la traspuesta de $(A + B)$.

PREGUNTA 2. Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3, \\ 2mx + 3my + 2z = 5, \\ (m-4)y + mz = m. \end{cases}$$

PREGUNTA 3. Análisis. (2 puntos)

- Enuncie los teoremas de Rolle y de Bolzano.
- Calcule $\int x^3 e^{x^2}$.

PREGUNTA 4. Análisis. (2 puntos)

Calcule los siguientes límites:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$.

PREGUNTA 5. Geometría. (2 puntos)

- Considérese el plano $\pi: 4x + 2y + bz = 2$ y la recta $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-c}{2} = \frac{z-3}{4}$, donde b y c son parámetros reales. Calcule los valores que tienen que tomar b y c para que la recta r esté contenida en π .
- Calcule la distancia del punto $P(1,3,1)$ al plano $\pi': 4x + 2y - 4z = 2$.

PREGUNTA 6. Geometría. (2 puntos)

- Considérense los puntos $Q(-1,3,-5)$, $R(3,1,0)$ y $S(0,1,2)$. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a Q , R y S .
- Obtenga las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(3,-1,-1)$ y sea perpendicular al plano $\pi: 4x + 23y + 6z - 35 = 0$.

PREGUNTA 7. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Sabiendo que $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$.

- Suponiendo que A y B son sucesos independientes, calcule $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A} | (\bar{A} \cup \bar{B}))$.
 - Suponiendo que A y B son sucesos incompatibles, calcule $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A} | (\bar{A} \cup \bar{B}))$.
- (Nota: $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son los sucesos contrarios o complementarios de A y B , respectivamente).

PREGUNTA 8. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Una máquina que distribuye agua en botellas echa una cantidad de agua que sigue una distribución normal con media igual a 500 mililitros y desviación típica igual a 4 mililitros.

- Si elegimos al azar una de las botellas, ¿cuál es la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros?
- ¿Cuál es la cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97,5% de estas botellas?

ABAU 2024
CONVOCATORIA ORDINARIA
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

Só puntúan cinco das oito preguntas.

1. Números e Álgebra (2 puntos)

a) **0.75** puntos

b) **1.25** puntos

2. Números e Álgebra (2 puntos)

0.5 por resolver $\det A = 0$, **0.5** polo estudo de cada un dos tres casos

Nota: Se o resolve por Gauss, **1.25** por chegar ao sistema triangular equivalente, **0.25** por cada un dos tres casos

3. Análise (2 puntos)

a) **1** punto

b) **1** punto

4. Análise (2 puntos)

a) **1** punto

b) **1** punto

5. Xeometría (2 puntos)

a) **1.25** puntos

b) **0.75** puntos

6. Xeometría (2 puntos)

a) **1** punto

b) **1** punto

7. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

a) **1** punto

b) **1** punto

8. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

a) **1** punto

b) **1** punto

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

PREGUNTA 1. Números e Álgebra. (2 puntos)

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$, dea resposta aos dous apartados seguintes:

- Calcule os valores de x e y que fan que A conmute con todas as matrices antisimétricas X de orde 2, é dicir, que fan que se cumpra a igualdade $AX = XA$ para toda matriz antisimétrica X de orde 2.
- Se $x = -1$ e $y = 1$, calcule a matriz M que satisfai a igualdade $2M = A^{-1} - AM$.

PREGUNTA 2. Números e Álgebra: (2 puntos)

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema:
$$\begin{cases} 2x + y + z = m, \\ x - y + 2z = 2m, \\ mx + 3z = m. \end{cases}$$

PREGUNTA 3. Análise. (2 puntos)

Dada a función $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{k - xe^x}{x} & \text{se } x > 0, \end{cases}$ pídesse responder ás seguintes cuestións:

- Cal é o valor de k que fai que f sexa continua en $x = 0$ para calquera valor de b ?
- Para que valores de b e k é f derivable en $x = 0$?

PREGUNTA 4. Análise. (2 puntos)

Determine o valor do número positivo a que fai que a área da rexión encerrada pola recta $y = -2x$ e a parábola $y = ax^2 + 4x$ sexa igual a 9 unidades cadradas.

PREGUNTA 5. Xeometría. (2 puntos)

Considérense o plano $\pi: x + 2y - 2z = 0$ e a recta r que pasa polos puntos $A(2,1,2)$ e $B(0,1,1)$. Pídesse:

- Estudar a posición relativa da recta r e o plano π .
- Obter a ecuación implícita ou xeral do plano que contén r e é perpendicular a π .

PREGUNTA 6. Xeometría. (2 puntos)

Sexan r a recta que pasa polos puntos $A(-1,3,-5)$ e $B(1,2,-5)$ e π o plano que pasa polo punto $C(5,0,1)$ e é perpendicular a r . Pídense as ecuacións paramétricas de r , a ecuación implícita ou xeral de π e o punto de corte de r con π .

PREGUNTA 7. Estatística e Probabilidade. (2 puntos)

Nunha determinada colonia de corvos mariños, cada ovo que se pon ten un 13% de probabilidades de ser infértil. Se se observa a posta de 7 ovos, calcule a probabilidade de que entre eles haxa polo menos 2 infértiles.

PREGUNTA 8. Estatística e Probabilidade. (2 puntos)

A durabilidade dun determinado aparato electrónico segue unha distribución normal de media 20000 horas e desviación típica 2500 horas.

- Se eliximos ao azar un destes aparatos, cal é a probabilidade de que dure menos de 17000 horas?
- Cal é a durabilidade, en horas, excedida polo 98,5% destes aparatos?

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

PREGUNTA 1. Números y Álgebra. (2 puntos)

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$, dé respuesta a los dos apartados siguientes:

- a) Calcule los valores de x e y que hacen que A conmute con todas las matrices antisimétricas X de orden 2, es decir, que hacen que se cumpla la igualdad $AX = XA$ para toda matriz antisimétrica X de orden 2.
- b) Si $x = -1$ e $y = 1$, calcule la matriz M que satisface la igualdad $2M = A^{-1} - AM$.

PREGUNTA 2. Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} 2x + y + z = m, \\ x - y + 2z = 2m, \\ mx + 3z = m. \end{cases}$$

PREGUNTA 3. Análisis. (2 puntos)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{k - xe^x}{x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$ se pide responder a las siguientes cuestiones:

- a) ¿Cuál es el valor de k que hace que f sea continua en $x = 0$ para cualquier valor de b ?
- b) ¿Para qué valores de b y k es f derivable en $x = 0$?

PREGUNTA 4. Análisis. (2 puntos)

Determine el valor del número positivo a que hace que el área de la región encerrada por la recta $y = -2x$ y la parábola $y = ax^2 + 4x$ sea igual a 9 unidades cuadradas.

PREGUNTA 5. Geometría. (2 puntos)

Considérense el plano $\pi: x + 2y - 2z = 0$ y la recta r que pasa por los puntos $A(2,1,2)$ y $B(0,1,1)$. Se pide:

- a) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π .
- b) Obtener la ecuación implícita o general del plano que contiene a r y es perpendicular a π .

PREGUNTA 6. Geometría. (2 puntos)

Sean r la recta que pasa por los puntos $A(-1,3,-5)$ y $B(1,2,-5)$ y π el plano que pasa por el punto $C(5,0,1)$ y es perpendicular a r . Se piden las ecuaciones paramétricas de r , la ecuación implícita o general de π y el punto de corte de r con π .

PREGUNTA 7. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

En una determinada colonia de cormoranes, cada huevo que se pone tiene un 13% de probabilidades de ser infértil. Si se observa la puesta de 7 huevos, calcule la probabilidad de que entre ellos haya por lo menos 2 infértiles.

PREGUNTA 8. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

La durabilidad de un determinado aparato electrónico sigue una distribución normal de media 20000 horas y desviación típica 2500 horas.

- a) Si elegimos al azar uno de estos aparatos, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 17000 horas?
- b) ¿Cuál es la durabilidad, en horas, excedida por el 98,5% de estos aparatos?

ABAU 2024
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

Só puntúan cinco das oito preguntas.

1. Números e Álgebra (2 puntos)

a) 1 punto

b) 1 punto

2. Números e Álgebra (2 puntos)

0,5 por resolver $\det A = 0$, **0,5** polo estudo dos rangos, **0,5** polo estudo de cada un dos dous casos. Nota: Se o resolve por Gauss, **1** por chegar ao sistema triangular equivalente, **0,5** polas conclusións de cada un dos dous casos

3. Análise (2 puntos)

a) 1 punto

b) 1 punto

4. Análise (2 puntos)

0,5 polo cálculo dos límites de integración, **0,5** por establecer á área, **0,5** polo cálculo da integral, **0,5** polo cálculo de “a”

5. Xeometría (2 puntos)

a) 1 punto

b) 1 punto

6. Xeometría (2 puntos)

0,5 polas ecuacións paramétricas, **0,5** pola formulación da ecuación xeral do plano, **0,25** por calcular “D”, **0,25** por calcular lambda, **0,5** por calcular o punto de corte

7. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

0,5 por identificar a binomial, **0,5** pola formulación da probabilidade pedida, **1** punto polo cálculo

8. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

a) 1 punto

b) 1 punto

$$1. A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.a) A + 2B - (A + B) = B.$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

$$(A + B) - B = A.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.b) A^2X - (A + B)^T = 3I - 2X.$$

$$(A^2 + 2I)X = 3I + (A + B)^T.$$

$$X = (A^2 + 2I)^{-1}(3I + (A + B)^T).$$

Temos que $(A^2 + 2I) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ polo que:

- $\det(A^2 + 2I) = 18.$
- $(A^2 + 2I)^{-1} = (1/18) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}^T = (1/18) \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$

Por outro lado

$$3I + (A + B)^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Polo tanto, a matriz X pedida é a seguinte:

$$X = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 24 & -15 \\ -6 & 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & m+2 & 1 & 3 \\ 2m & 3m & 2 & 5 \\ 0 & m-4 & m & m \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} m & m+2 & 1 & 3 \\ 0 & m-4 & 0 & -1 \\ 0 & m-4 & m & m \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} m & m+2 & 1 & 3 \\ 0 & m-4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & m & m+1 \end{array} \right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3, \\ (m-4)y = -1, \\ mz = m+1. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{m+1}{m}, \quad y = -\frac{1}{m-4}, \quad x = \frac{3 - z - (m+2)y}{m}.$$

- Se $m = 0$, o sistema é incompatible, porque a terceira ecuación queda $0 = 1$.
- Se $m = 4$, o sistema é incompatible, porque a segunda ecuación queda $0 = -1$.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{pmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ m \end{array}, \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} m & m+2 \\ 2m & 3m \end{vmatrix} = m(m-4)$ e $\begin{vmatrix} 3m & 2 \\ m-4 & m \end{vmatrix} = 3m^2 - 2m + 8$ non se anulan á vez, tense que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\det A = \begin{vmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{vmatrix} = 3m^3 + 2m^2 - 8m - 2m^2 + 8m - 2m^3 - 4m^2 = m^3 - 4m^2 = m^2(m-4) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0, 4\}.$$

Discusión:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$: $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que o sistema é compatible determinado.
- Caso $m = 0$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 0 \end{array}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -20 + 24 = 4 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible.
- Caso $m = 4$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 8 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 4 \end{array}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 96 - 80 - 32 = 16 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible.

3.

a)

Teorema de Rolle: Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) , e tal que $f(a) = f(b)$, entón existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema de Bolzano: Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo, é dicir $f(a) \cdot f(b) < 0$, entón existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

b)

Tomando

$u = x^2$	$du = 2x dx,$
$dv = x e^{x^2} dx$	$v = \frac{1}{2} e^{x^2}$

Temos que

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C = \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C. \end{aligned}$$

4.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1+x}}{\sin x + x \cos x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{1}{2}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x e^{\sin x} - e^x}{2x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x e^{\sin x} + \cos x e^{\sin x} \cos x - e^x}{2} = \frac{0+1-1}{2} = 0.$$

onde L'H indica o uso da regra de L'Hôpital para tratar indeterminacións do tipo $\frac{0}{0}$. Falando con rigor, o que asegura a regra de L'Hôpital é que o primeiro límite existe e vale $\frac{1}{2}$ (ou 0) porque o último existe e vale $\frac{1}{2}$ (ou 0).

5.

a)

Temos o plano $\pi: 4x + 2y + bz = 2$ e a recta $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-c}{2} = \frac{z-3}{4}$.

Para que a recta estea contida no plano, $\vec{n}_\pi(4,2,b)$ o vector normal a π ten que ser perpendicular a $\vec{d}_r = (3,2,4)$, polo tanto tería que cumprirse que $\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = 0$. De aquí,
 $\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = 12 + 4 + 4b = 0$ polo que $b = -4$.

No caso de que $b = -4$, o plano π e a recta r son paralelos. Para que a recta estea contida no plano, o punto $A(2,c,3)$ polo que pasa a recta debe pertencer ao plano. Temos entón substituíndo na ecuación do plano:

$$\pi: 4x + 2y - 4z = 2$$

$$4 \times 2 + 2 \times c - 4 \times 3 = 2$$

Polo que $c = 3$

b)

Se $P(x_0, y_0, z_0)$ e $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, a distancia de P a π é

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Polo que neste caso, a distancia de $P(1,3,1)$ a $\pi': 4x + 2y - 4z - 2 = 0$ é igual a:

$$d(P, \pi') = \frac{|4 \times 1 + 2 \times 3 - 4 \times 1 - 2|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{4}{\sqrt{36}} = \frac{2}{3}$$

6.

a)

Dados os puntos $Q(-1,3,-5)$, $R(3,1,0)$ e $S(0,1,2)$, π pasa por $Q(-1,3,-5)$ e está xerado por, $\overrightarrow{QR}(4,-2,5)$ e $\overrightarrow{QS}(1,-2,7)$.

$$\text{Logo } \pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z+5 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z+5 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -14x - 14 - 8z - 40 + 5y - 15 + 2z + 10 + 10x + 10 - 28y + 84 =$$

$$= -4x - 23y - 6z + 35 \Rightarrow \pi: 4x + 23y + 6z - 35 = 0.$$

b)

Recta que pasa polo punto $P(3,-1,-1)$ e perpendicular ao plano $\pi: 4x + 23y + 6z - 35 = 0$.

Entón temos que $\vec{d}_r = (4,23,6)$. Entón as ecuacións paramétricas da recta son:

$$r: \begin{cases} x = 3 + 4\lambda, \\ y = -1 + 23\lambda, \\ z = -1 + 6\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

A ecuación continua da recta é:

$$r: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{23} = \frac{z+1}{6}$$

7.

Sabendo que $P(A) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{1}{2}$.

a)

Supostos que A e B son independentes, temos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

$$P(\bar{A} | (\bar{A} \cup \bar{B})) = \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \frac{1 - P(A)}{1 - P(A \cap B)} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{2}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{4}{5}.$$

b)

Supostos que A e B son incompatibles, temos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

$$P(\bar{A} | (\bar{A} \cup \bar{B})) = \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \frac{1 - P(A)}{1 - P(A \cap B)} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - 0} = \frac{2}{3}.$$

8. X = “Cantidad de auga que a máquina distribúe en botellas”.

$$X \rightarrow N(500,4) \Rightarrow Z = \frac{X - 500}{4} \rightarrow N(0,1).$$

a)

$$\begin{aligned} P(499 < X < 502) &= P\left(\frac{499 - 500}{4} < Z < \frac{502 - 500}{4}\right) = P(-0,25 < Z < 0,5) \\ &= P(Z < 0,5) - P(Z < -0,25) \approx 0,6915 - 0,4013 = \mathbf{0,2902}. \end{aligned}$$

$$(*) P(Z < -0,25) = P(Z > 0,25) = 1 - P(Z < 0,25) = 1 - 0,5987 = 0,4013$$

b)

Pídesse a tal que $P(X > a) = 0,975$.

$$P(X > a) = P\left(Z > \frac{a - 500}{4}\right) = 0,975$$

A probabilidade só pode maior que 0,5 se $\frac{a-500}{4} < 0$. Logo

$$P\left(Z > \frac{a - 500}{4}\right) = P\left(Z < \frac{500 - a}{4}\right) = 0,975,$$

de onde, empregando a táboa,

$$\frac{500 - a}{4} \approx 1,96,$$

$$500 - a \approx 7,84$$

e, finalmente,

$$\mathbf{a \approx 492,16 \text{ mililitros.}}$$

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$.

1.a) As matrices antisimétricas de orde 2 son da forma $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Agora,

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ -\alpha y & \alpha x \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y \\ -\alpha & -\alpha \end{pmatrix},$$

así que debe cumprirse

$$[-\alpha = \alpha x; \alpha = \alpha y; -\alpha y = -\alpha; \alpha x = -\alpha] \forall \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [x = -1; y = 1].$$

1.b) Se $x = -1$ e $y = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$2M = A^{-1} - AM \Leftrightarrow (2I + A)M = A^{-1} \Leftrightarrow M = (2I + A)^{-1}A^{-1}.$$

- $\det A = 1 + 1 = 2$.
- $A^{-1} = (1/2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = (1/2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- $2I + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det(2I + A) = 9 + 1 = 10$.
- $(2I + A)^{-1} = (1/10) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^T = (1/10) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Polo tanto, a matriz pedida é a seguinte:

$$M = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 & 2m \\ m & 0 & 3 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2m \\ 2 & 1 & 1 & m \\ m & 0 & 3 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - mF_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2m \\ 0 & 3 & -3 & -3m \\ 0 & m & 3 - 2m & m - 2m^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/3)F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2m \\ 0 & 1 & -1 & -m \\ 0 & m & 3 - 2m & m - 2m^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - mF_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2m \\ 0 & 1 & -1 & -m \\ 0 & 0 & 3 - m & m - m^2 \end{pmatrix}.$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2m, \\ y - z = -m, \\ (3 - m)z = m - m^2. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{m - m^2}{3 - m}, \quad y = z - m, \quad x = y - 2z + 2m.$$

- Se $m = 3$, o sistema é incompatible, porque a terceira ecuación queda $0 = -6$.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 0 & 3 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 & 2m \\ m & 0 & 3 & m \end{pmatrix}, \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 2m + m - 3 = 3m - 9 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

Discusión:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que o sistema é compatible determinado.

- **Caso $m = 3$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 18 + 9 - 3 = 18 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible.

$$3. f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{k - xe^x}{x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

3.a) Continuidade:

$$f(0) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + bx - 1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k - xe^x}{x} = \begin{cases} -\infty & \text{se } k < 0, \\ -1 & \text{se } k = 0, \\ \infty & \text{se } k > 0. \end{cases}$$

Logo f é continua en $x = 0$ para calquera valor de b se, e só se, $k = 0$.

3.b) Derivabilidade:

É necesario que $k = 0$, co cal $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{se } x \leq 0, \\ -e^x & \text{se } x > 0. \end{cases}$

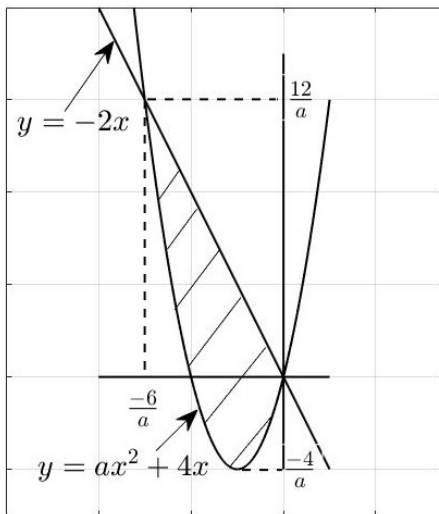
$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b & \text{se } x < 0, \\ -e^x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + b) = b,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-e^x) = -1.$$

Logo f é derivable en $x = 0$ se, e só se, $b = -1$ e $k = 0$.

4. $y = ax^2 + 4x$, $[y' = 2ax + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2/a]$, $y'' = 2a > 0$. Parábola convexa con vértice en $x = -2/a$.



Puntos de corte:

$$ax^2 + 4x = -2x \Leftrightarrow ax^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(ax + 6) = 0,$$

de onde $x \in \{-6/a, 0\}$.

Ademais, pola convexidade, a recta está por riba da parábola.

- Tense que cumprir

$$\int_{-6/a}^0 (-2x - ax^2 - 4x) dx = 9,$$

-

$$\int_{-6/a}^0 (-2x - ax^2 - 4x) dx = \int_{-6/a}^0 (-ax^2 - 6x) dx =$$

$$\left[-a \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_{-6/a}^0 = \frac{a}{3} \left(-\frac{6}{a} \right)^3 + 3 \left(-\frac{6}{a} \right)^2 = -\frac{72}{a^2} + \frac{108}{a^2} = \frac{36}{a^2}.$$

Por último,

$$\frac{36}{a^2} = 9 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2,$$

xa que $a > 0$.

5. $\pi: x + 2y - 2z = 0$, r recta que pasa por $A(2,1,2)$ e $B(0,1,1)$.

5.a) Posición relativa de r e π :

$\vec{n}_\pi(1,2,-2)$ vector normal a π ; $\vec{d}_r = \overrightarrow{BA}(2,0,1)$ vector director de r .

Como $\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = 2 - 2 = 0$, ou ben $r \subset \pi$, ou ben $r \parallel \pi$ (sobreentendendo $r \not\subset \pi$).

Posto que $2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 0$, $A \in \pi$, polo que $r \subset \pi$.

5.a) SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$[A \in \pi, B \in \pi] \Rightarrow r \subset \pi.$$

5.b) Ecuación implícita do plano que contén a r e é perpendicular a π :

Se chamamos π^* ao plano pedido, π^* pasa por $A(2,1,2)$ e está xerado por $\vec{n}_\pi(1,2,-2)$ e por $\vec{d}_r(2,0,1)$. Logo

$$\pi^*: \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-2) - 4(y-1) - 4(z-2) - (y-1) \\ = 2x - 4 - 4y + 4 - 4z + 8 - y + 1 = 2x - 5y - 4z + 9.$$

$$\pi^*: 2x - 5y - 4z + 9 = 0.$$

6.

- A recta r pasa por $A(-1, 3, -5)$, e o seu vector director é $\vec{d}_r = \overrightarrow{AB}(2, -1, 0)$. Logo

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda, \\ y = 3 - \lambda, \\ z = -5, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- O plano π pasa por $C(5, 0, 1)$, e o seu vector normal é $\vec{n}_\pi = \vec{d}_r(2, -1, 0)$. Logo

$$\pi: 2(x - 5) - y = 0$$

ou

$$\pi: 2x - y - 10 = 0.$$

- Punto de corte de r e π :

$$2(-1 + 2\lambda) - (3 - \lambda) - 10 = -2 + 4\lambda - 3 + \lambda - 10 = 5\lambda - 15 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3.$$

Logo o punto de corte é $P(-1 + 2 \cdot 3, 3 - 3, -5) = P(5, 0, -5)$.

7. $X =$ “n.º de ovos infértiles, de entre os 7”.

$X \rightarrow B(n, p)$, con $n = 7$ e $p = 0.13$ (logo $q = 1 - p = 0.87$).

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\}.$$

- $P(X = 0) = \binom{7}{0} (0.13)^0 (0.87)^7 = (0.87)^7 \approx 0.3773$.
- $P(X = 1) = \binom{7}{1} (0.13)^1 (0.87)^6 = 7 (0.13) (0.87)^6 \approx 0.3946$.

$$P(X \geq 2) \approx 1 - \{0.3773 + 0.3946\} = 1 - 0.7719 = \mathbf{0.2281}.$$

8. X = “durabilidade en horas dun aparato”.

$$X \rightarrow N(20000, 2500) \Rightarrow Z = \frac{X - 20000}{2500} \rightarrow N(0, 1).$$

8.a)

$$P(X < 17000) = P\left(Z < \frac{-3000}{2500}\right) = P(Z < -1.2) = P(Z > 1.2) = 1 - P(Z \leq 1.2) \approx \\ 1 - 0.8849 = \mathbf{0.1151}.$$

8.b) Pídese d tal que $P(X > d) = 0.985$.

$$P(X > d) = P\left(Z > \frac{d - 20000}{2500}\right)$$

só pode maior que 0.5 se $\frac{d - 20000}{2500} < 0$. Logo

$$P\left(Z > \frac{d - 20000}{2500}\right) = P\left(Z < \frac{20000 - d}{2500}\right) = 0.985,$$

de onde, empregando a táboa,

$$\frac{20000 - d}{2500} \approx 2.17,$$

$$20000 - d \approx 5425$$

e, finalmente,

$$\mathbf{d \approx 14575 \text{ horas.}}$$

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra:

Despexe a matriz X da ecuación $XA = A + XB$, se A e B son matrices cadradas tales que $A - B$ é invertible. Logo, calcule X se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = (A^2 - A - I)^{-1}$, onde I é a matriz identidade de orde 2.

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores de m , o sistema
$$\begin{cases} mx + (2 + m^2)y & = 1 + m, \\ my - z & = 1, \\ mx + 2y + (2m - 4)z & = 5. \end{cases}$$

3. Análise:

a) Se $f(x) = ae^x + b$, diga que valores deben ter a e b para que se cumpran $f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.

b) Estude se a función $f(x) = x + \sin x$ ten extremos ou puntos de inflexión no intervalo $(0, 2\pi)$, diga onde están en caso de que existan e esboce a gráfica de f nese intervalo.

4. Análise:

Calcule a área da rexión determinada polas desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Faga un esbozo gráfico da rexión. **Nota:** $\ln x$ é o logaritmo neperiano de x .

5. Xeometría:

a) Obteña as ecuacións paramétricas da recta r que pasa polos puntos $P(2, -1, 0)$ e $Q(3, 0, 0)$ e a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $R(0, 4, -2)$ e é paralelo aos vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$ e $\vec{v}(2, 1, -2)$.

b) Calcule o ángulo agudo que forma a recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ co plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

6. Xeometría:

a) Calcule o punto simétrico de $P(2, -1, 0)$ con respecto ao plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

b) Estude a posición relativa das rectas $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ e $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade:

a) Calcule as catro probabilidades $P(A)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(A|B)$ e $P(B|A)$ sabendo que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ e $P(A) = 2P(B)$. **Nota:** $\bar{B}$ é o suceso contrario ou complementario de B .

b) Nun coñecido congreso, o 60% dos científicos inscritos participan *online* e o resto asisten en persoa. Ademais, o 65% dos inscritos son europeos e o 80% dos que asisten en persoa tamén o son. Se se elixe ao azar a un dos inscritos, calcule a probabilidade de que sexa europeo e, á vez, participe *online*; logo, a de que participe *online* se se sabe que é europeo.

8. Estatística e Probabilidade:

a) Nunha certa zona húmida, a probabilidade de que un cabezolo chegue a ra adulta é do 2%. Se se escollen ao azar 2500 deses cabezolos, cal é a probabilidade de que polo menos 55 deles cheguen a ras adultas?

b) Para conceder bolsas de estudo, un organismo valora os méritos presentados e asigna a cada candidato unha puntuación que indica máis méritos canto maior é o seu valor. Este ano, a puntuación segue unha distribución normal de media 100 e desviación típica 20, e tómase a decisión de conceder a bolsa ao 5% mellor do conxunto de solicitantes. Que puntuación é preciso alcanzar para obter a bolsa?

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

Despeje la matriz X de la ecuación $XA = A + XB$, si A y B son matrices cuadradas tales que $A - B$ es invertible. Luego, calcule X si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (A^2 - A - I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores de m , el sistema
$$\begin{cases} mx + (2 + m^2)y & = 1 + m, \\ my - z & = 1, \\ mx + 2y + (2m - 4)z & = 5. \end{cases}$$

3. Análisis:

- a) Si $f(x) = ae^x + b$, diga qué valores deben tener a y b para que se cumplan $f(0) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.
- b) Estudie si la función $f(x) = x + \sin x$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0, 2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de f en ese intervalo.

4. Análisis:

Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Haga un esbozo gráfico de la región. **Nota:** $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

5. Geometría:

- a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2, -1, 0)$ y $Q(3, 0, 0)$ y la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0, 4, -2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$ y $\vec{v}(2, 1, -2)$.
- b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ con el plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

6. Geometría:

- a) Calcule el punto simétrico de $P(2, -1, 0)$ con respecto al plano $\pi: x + z + 2 = 0$.
- b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ y $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad:

- a) Calcule las cuatro probabilidades $P(A)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(A|B)$ y $P(B|A)$ sabiendo que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ y $P(A) = 2P(B)$. **Nota:** $\bar{B}$ es el suceso contrario o complementario de B .
- b) En un conocido congreso, el 60% de los científicos inscritos participan *online* y el resto asisten en persona. Además, el 65% de los inscritos son europeos y el 80% de los que asisten en persona también lo son. Si se elige al azar a uno de los inscritos, calcule la probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe *online*; luego, la de que participe *online* si se sabe que es europeo.

8. Estadística y Probabilidad:

- a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?
- b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra:

a) Calcule A se $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Se $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ é invertible, obteña os valores de x , y e z sabendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ e que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Enténdase que I é a matriz identidade.

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema
$$\begin{cases} (m+1)x & + & z & = & 1, \\ (m+1)x & + & y & + & z & = & m+1, \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m. \end{cases}$$

3. Análise:

a) Enuncie os teoremas de Rolle e do valor medio do cálculo diferencial.

b) Explique se $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ está ou non nas hipóteses do teorema do valor medio do cálculo diferencial. En caso de que o estea, calcule un valor c para o cal se cumpra a tese dese teorema.

4. Análise:

a) Calcule mediante cambio de variable as integrais $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx$ e $\int (\ln x)/x \, dx$.

b) Calcule $\int (\ln x)/x \, dx$ empregando o método de integración por partes. Logo, obteña algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x)/x \, dx = 3/2$.

5. Xeometría:

a) Considérense o plano $\pi: ax + y + z = 1$, onde a é un parámetro real e a recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estude a posición relativa de π e r en función de a e obteña o valor de a que fai que π e r sexan perpendiculares. Por último, razoe se r pode estar contida en π ou non.

b) Se $\pi: -3x + y + z = 1$, diga que valor ten que tomar b para que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ estea contida en π .

6. Xeometría:

Considérese o plano $\pi: 2x - y + z = 1$. Pídesese:

a) Calcular a distancia de π ao punto de corte das rectas $r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

b) Obter o punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π .

7. Estatística e Probabilidade:

a) Calcule $P(A|B)$ se $B \subset A$. Logo, se $P(C) = 0.5$ e $P(D) = 0.6$, explique se C e D poden ser incompatibles. Por último, obteña $P(E \cup F)$ e $P(E \cap \bar{F})$ se E e F son independentes, $P(E) = 0.3$ e $P(F) = 0.2$.

b) Tírase un dado sete veces. Calcule a probabilidade de que saian exactamente dous seis.

8. Estatística e Probabilidade:

Para un determinado grupo de pacientes, a tensión arterial sistólica (medida en mmHg) segue una distribución normal de media 123.6 e desviación típica 17.8. Calcule a probabilidade de que un paciente elixido ao azar teña unha tensión comprendida entre 100 e 120 mmHg. Logo, obteña o valor da tensión que é superado polo 67% dos pacientes.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

a) Calcule A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x , y y z sabiendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} (m+1)x & + & z & = & 1, \\ (m+1)x & + & y & + & z & = & m+1, \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m. \end{cases}$$

3. Análisis:

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.

b) Explique si $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

4. Análisis:

a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx$ y $\int (\ln x)/x \, dx$.

b) Calcule $\int (\ln x)/x \, dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x)/x \, dx = 3/2$.

5. Geometría:

a) Considérense el plano $\pi: ax + y + z = 1$, donde a es un parámetro real, y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estudie la posición relativa de π y r en función de a y obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. Por último, razone si r puede estar contenida en π o no.

b) Si $\pi: -3x + y + z = 1$, diga qué valor tiene que tomar b para que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en π .

6. Geometría:

Considérese el plano $\pi: 2x - y + z = 1$. Se pide:

a) Calcular la distancia de π al punto de corte de las rectas $r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

b) Obtener el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π .

7. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule $P(A|B)$ si $B \subset A$. Luego, si $P(C) = 0.5$ y $P(D) = 0.6$, explique si C y D pueden ser incompatibles. Por último, obtenga $P(E \cup F)$ y $P(E \cap \bar{F})$ si E y F son independientes, $P(E) = 0.3$ y $P(F) = 0.2$.

b) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.

8. Estadística y Probabilidad:

Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123.6 y desviación típica 17.8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superado por el 67% de los pacientes.

ABAU 2023
CONVOCATORIA ORDINARIA
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

Só puntúan cinco das oito preguntas.

As puntuacións parciais que seguen están ligadas a un determinado xeito de resolver os exercicios, pero, nalgúns casos, pode haber outras formas correctas de solucionarlos.

1. Números e Álgebra (2 puntos)

0.75 por despegar X , **0.5** por chegar a $B = -I$, **0.5** por calcular $(A - B)^{-1}$, **0.25** por concluír.

2. Números e Álgebra (2 puntos)

0.5 por resolver $\det A = 0$, **0.5** polo estudo de cada un dos tres casos.

Se se fai por Gauss, **1.25** por chegar ao sistema triangular equivalente, **0.25** por cada un dos tres casos.

3. Análise (2 puntos)

a) **1** punto:

0.25 por ver que $b = -a$, **0.75** por chegar a $a = 3$.

b) **1** punto:

0.5 por comprobar que non hai extremos e que hai un punto de inflexión en $x = \pi$, **0.5** por esbozar a gráfica.

4. Análise (2 puntos)

0.5 pola formulación, **0.5** polo cálculo da primitiva, **0.5** polo resultado, **0.5** polo debuxo da rexión.

5. Xeometría (2 puntos)

a) **1** punto: **0.5** polas ecuacións da recta, **0.5** pola ecuación do plano.

b) **1** punto.

6. Xeometría (2 puntos)

a) **1** punto: **0.25** pola recta perpendicular, **0.25** polo punto de corte, **0.5** polo cálculo do punto simétrico.

b) **1** punto: **0.5** pola posición relativa, **0.5** polo punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

a) **1** punto: **0.25** por cada unha das catro probabilidades que se piden.

b) **1** punto: **0.5** por cada unha das dúas probabilidades que se piden.

8. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

a) **1** punto:

0.5 por chegar a $P(X \geq 55) \approx P(\tilde{X} \geq 54.5)$, con $\tilde{X} \rightarrow N(50, 7)$,

0.25 por chegar a $P(Z \geq 0.64)$,

0.25 polo resultado.

b) **1** punto:

0.25 pola formulación,

0.25 por chegar a $P\left(Z < \frac{x-100}{20}\right) = 0.95$,

0.5 pola obtención de x .

ABAU 2023
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

Só puntúan cinco das oito preguntas.

1. Números e Álgebra (2 puntos)

a) **0.75** puntos: **0.25** por despxar A , **0.25** por calcular B^{-1} , **0.25** por calcular A .

Se se pensa en A como unha matriz incógnita $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: **0.5** por chegar ao sistema, **0.25** pola solución.

b) **1.25** puntos: **0.25** polo cálculo de $\det(A - 3I)$, **0.25** por deducir que $x = 0$, **0.25** por calcular A^{-1} , **0.25** por chegar a $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} z+1 & 0 \\ -y & 4 \end{pmatrix}$, **0.25** pola conclusión.

2. Números e Álgebra (2 puntos)

0.5 por resolver $\det A = 0$, **0.5** por cada un dos tres casos.

Se se fai por Gauss, **1.25** por chegar ao sistema triangular equivalente, **0.25** por cada un dos tres casos.

3. Análise (2 puntos)

a) **1** punto: **0.5** polo teorema de Rolle e **0.5** polo teorema do valor medio.

b) **1** punto: **0.5** por dicir que a función é continua no cerrado e derivable no aberto e **0.5** por obter o valor de c .

4. Análise (2 puntos)

a) **1** punto: **0.5** por cada unha das dúas integrais, feitas mediante cambio de variable.

b) **1** punto: **0.5** pola primeira parte (integración por partes); **0.5** pola segunda parte, co seguinte reparto: **0.25** por chegar a $\int_e^B (\ln x)/x \, dx = (1/2)(\ln B)^2 - 1/2$, **0.25** polo cálculo de B .

5. Xeometría (2 puntos)

- a) **1.5 puntos: 0.5** pola posición relativa, **0.5** polo valor de a que fai que $r \perp \pi$, **0.5** por razoarmos que r non pode estar contida en π .
- b) **0.5 puntos.**

6. Xeometría (2 puntos)

- a) **1 punto: 0.5** polo punto de corte, **0.5** polo cálculo da distancia.
- b) **1 punto: 0.25** polas ecuacións da recta r perpendicular a π que pasa por P , **0.25** pola obtención de $Q = r \cap \pi$, **0.5** por determinar o punto simétrico.

7. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

- a) **1 punto: 0.25** por obter $P(A|B)$, **0.25** por razoarmos que C e D non poden ser incompatibles, **0.25** por calcular $P(E \cup F)$ e **0.25** por calcular $P(E \cap \bar{F})$.
- b) **1 punto: 0.25** pola definición da variable e por dicir que é binomial, **0.25** pola fórmula da binomial, **0.5** polo resultado.

8. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

1 punto pola primeira parte, repartido do seguinte xeito: **0.25** por tipificar, **0.25** por chegar a $P(-1.33 \leq Z \leq -0.20)$, **0.25** por chegar a $P(Z \leq 1.33) - P(Z \leq 0.20)$, **0.25** polo cálculo da probabilidade pedida.

1 punto pola segunda parte, repartido do seguinte xeito: **0.25** pola formulación do problema, **0.5** por chegar a $P\left(Z < \frac{123.6-t}{17.8}\right) = 0.67$, **0.25** pola obtención de t .

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra:

Despeixe a matriz X da ecuación $XA = A + XB$, se A e B son matrices cadradas tales que $A - B$ é invertible. Logo, calcule X se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = (A^2 - A - I)^{-1}$, onde I é a matriz identidade de orde 2.

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores de m , o sistema
$$\begin{cases} mx + (2 + m^2)y & = 1 + m, \\ my - z & = 1, \\ mx + 2y + (2m - 4)z & = 5. \end{cases}$$

3. Análise:

- a) Se $f(x) = ae^x + b$, diga que valores deben ter a e b para que se cumpran $f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.
- b) Estude se a función $f(x) = x + \sin x$ ten extremos ou puntos de inflexión no intervalo $(0, 2\pi)$, diga onde están en caso de que existan e esboce a gráfica de f nese intervalo.

4. Análise:

Calcule a área da rexión determinada polas desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Faga un esbozo gráfico da rexión. **Nota:** $\ln x$ é o logaritmo neperiano de x .

5. Xeometría:

- a) Obteña as ecuacións paramétricas da recta r que pasa polos puntos $P(2, -1, 0)$ e $Q(3, 0, 0)$ e a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $R(0, 4, -2)$ e é paralelo aos vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$ e $\vec{v}(2, 1, -2)$.
- b) Calcule o ángulo agudo que forma a recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ co plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

6. Xeometría:

- a) Calcule o punto simétrico de $P(2, -1, 0)$ con respecto ao plano $\pi: x + z + 2 = 0$.
- b) Estude a posición relativa das rectas $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ e $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade:

- a) Calcule as catro probabilidades $P(A)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(A|B)$ e $P(B|A)$ sabendo que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ e $P(A) = 2P(B)$. **Nota:** $\bar{B}$ é o suceso contrario ou complementario de B .
- b) Nun coñecido congreso, o 60% dos científicos inscritos participan *online* e o resto asisten en persoa. Ademais, o 65% dos inscritos son europeos e o 80% dos que asisten en persoa tamén o son. Se se elixe ao azar a un dos inscritos, calcule a probabilidade de que sexa europeo e, á vez, participe *online*; logo, a de que participe *online* se se sabe que é europeo.

8. Estatística e Probabilidade:

- a) Nunha certa zona húmida, a probabilidade de que un cabezolo chegue a ra adulta é do 2%. Se se escollen ao azar 2500 deses cabezolos, cal é a probabilidade de que ao menos 55 deles cheguen a ras adultas?
- b) Para conceder bolsas de estudo, un organismo valora os méritos presentados e asigna a cada candidato unha puntuación que indica máis méritos canto maior é o seu valor. Este ano, a puntuación segue unha distribución normal de media 100 e desviación típica 20, e se toma a decisión de conceder a bolsa ao 5% mellor do conxunto de solicitantes. Que puntuación é preciso alcanzar para obter a bolsa?

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

Despeje la matriz X de la ecuación $XA = A + XB$, si A y B son matrices cuadradas tales que $A - B$ es invertible. Luego, calcule X si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (A^2 - A - I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores de m , el sistema
$$\begin{cases} mx + (2 + m^2)y & = 1 + m, \\ my - z & = 1, \\ mx + 2y + (2m - 4)z & = 5. \end{cases}$$

3. Análisis:

- a) Si $f(x) = ae^x + b$, diga qué valores deben tener a y b para que se cumplan $f(0) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.
- b) Estudie si la función $f(x) = x + \sin x$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0, 2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de f en ese intervalo.

4. Análisis:

Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Haga un esbozo gráfico de la región. **Nota:** $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

5. Geometría:

- a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2, -1, 0)$ y $Q(3, 0, 0)$ y la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0, 4, -2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$ y $\vec{v}(2, 1, -2)$.
- b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ con el plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

6. Geometría:

- a) Calcule el punto simétrico de $P(2, -1, 0)$ con respecto al plano $\pi: x + z + 2 = 0$.
- b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ y $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad:

- a) Calcule las cuatro probabilidades $P(A)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(A|B)$ y $P(B|A)$ sabiendo que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ y $P(A) = 2P(B)$. **Nota:** $\bar{B}$ es el suceso contrario o complementario de B .
- b) En un conocido congreso, el 60% de los científicos inscritos participan *online* y el resto asisten en persona. Además, el 65% de los inscritos son europeos y el 80% de los que asisten en persona también lo son. Si se elige al azar a uno de los inscritos, calcule la probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe *online*; luego, la de que participe *online* si se sabe que es europeo.

8. Estadística y Probabilidad:

- a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?
- b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?

MATEMÁTICAS II

1.

Primeira parte:

$$XA = A + XB \Leftrightarrow XA - XB = A \Leftrightarrow X(A - B) = A \Leftrightarrow \mathbf{X = A(A - B)^{-1}}.$$

Segunda parte:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A,$$

$$B = (A^2 - A - I)^{-1} = (-I)^{-1} = -I,$$

$$A - B = A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A - B) = 2$,

$$(A - B)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$\mathbf{X = A(A - B)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ m & 2 & 2m-4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 0 & -m^2 & 2m-4 & 4-m \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + mF_2} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 0 & 0 & m-4 & 4 \end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m, \\ my - z = 1, \\ (m-4)z = 4. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{4}{m-4}, \quad y = \frac{1+z}{m}, \quad x = \frac{1+m - (2+m^2)y}{m}.$$

- Se $m = 0$, temos

$$\begin{cases} 2y = 1, \\ -z = 1, \\ -4z = 4, \end{cases}$$

e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións:

$$\left[x = \lambda, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = -1 \right], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Se $m = 4$, o sistema é incompatible, porque a terceira ecuación queda $0 = 4$.

MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+m \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} 2+m^2 & 0 \\ m & -1 \end{vmatrix} = -(2+m^2) \neq 0$, é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{vmatrix} = m^2(2m-4) - m(2+m^2) + 2m \\ &= m\{m(2m-4) - (2+m^2) + 2\} = m\{2m^2 - 4m - 2 - m^2 + 2\} = m(m^2 - 4m) \\ &= m^2(m-4) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0, 4\}. \end{aligned}$$

Discusión:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso $m = 0$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 2 + 8 = 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que **o sistema é compatible indeterminado**.
- **Caso $m = 4$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 18 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -20 + 20 - 16 = -16 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

MATEMÁTICAS II

3.

3.a) Se $f(x) = ae^x + b$, obteña os valores de a e b para que se cumpran $f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$:

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a.$$

$$f(x) = ae^x - a.$$

Podemos excluír do estudo o caso $a = 0$ (xa que entón f é a función nula e $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x = 0$).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x - a}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} ae^x = a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3 \Leftrightarrow a = 3.$$

En definitiva, os valores pedidos son $a = 3$, $b = -3$.

MATEMÁTICAS II

3.b) Estude se a función $f(x) = x + \sin x$ ten extremos ou puntos de inflexión no intervalo $(0, 2\pi)$, diga onde están en caso de que existan e esboce a gráfica de f nese intervalo:

$$f(x) = x + \sin x, \quad f'(x) = 1 + \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi.$$

$$f''(\pi) = -\sin \pi = 0, \quad f'''(\pi) = -\cos \pi = -1 \neq 0,$$

polo que **o punto de abscisa $x = \pi$ é un punto de inflexión de f** . Non hai outros puntos de inflexión, xa que f'' non se anula en ningún outro punto do intervalo $(0, 2\pi)$. Non hai extremos, xa que o único punto crítico resultou ser punto de inflexión.

Para a representación gráfica, pensamos na función estendida a $[0, 2\pi]$. Tense que:

$$f(0) = 0, \quad f(\pi) = \pi, \quad f(2\pi) = 2\pi,$$

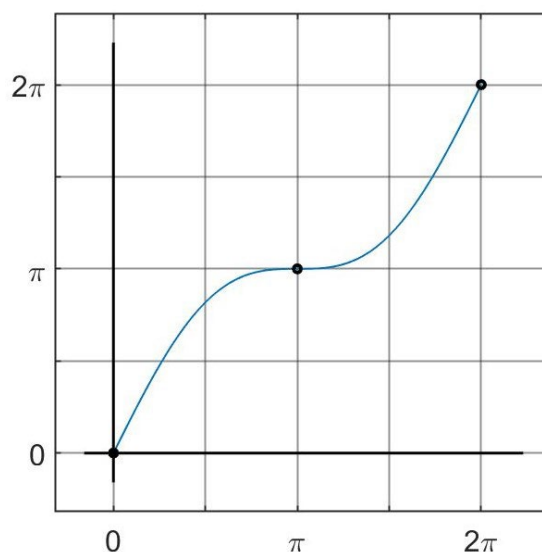
$$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \quad \forall x \in (0, 2\pi) \quad (f \text{ é non decrecente en } (0, 2\pi)).$$

De feito, f é crecente en $(0, 2\pi)$, xa que $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$ e $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (\pi, 2\pi)$,

$$f''(x) = -\sin x < 0 \quad \forall x \in (0, \pi) \quad (f \text{ é cóncava en } (0, \pi)),$$

$$f''(x) = -\sin x > 0 \quad \forall x \in (\pi, 2\pi) \quad (f \text{ é convexa en } (\pi, 2\pi)).$$

Polo tanto, a gráfica de f é a que se mostra na seguinte figura:

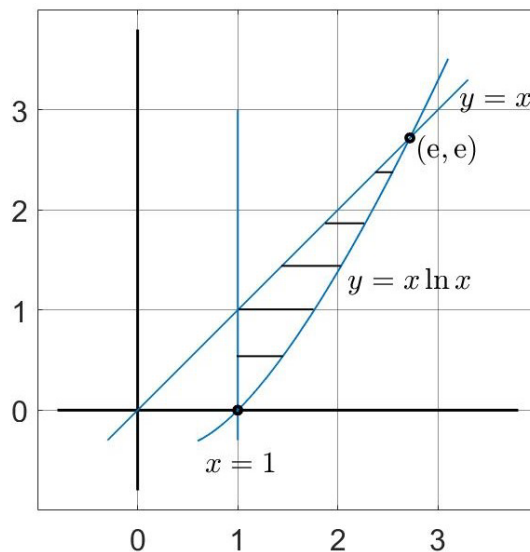


MATEMÁTICAS II

4. Calcule a área da rexión determinada polas desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Faga un esbozo gráfico da rexión.

$$f(x) = x \ln x, \quad f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = 1 + \ln x, \quad f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Na zona de interese ($x \geq 1$), f é crecente e convexa, porque tanto f' como f'' son positivas. Como $f(1) = 0$ e $f(e) = e$, a situación é a do debuxo seguinte, no que se raia a rexión cuxa área hai que calcular:



O valor do límite superior ($x = e$) tamén pode obterse do xeito seguinte:

$$x = x \ln x \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

A área pedida é

$$A = \int_1^e (x - x \ln x) dx = \int_1^e x(1 - \ln x) dx.$$

Facendo partes coas eleccións

$$\begin{aligned} u &= 1 - \ln x & du &= -\frac{1}{x} dx \\ dv &= x dx & v &= \frac{1}{2} x^2 \end{aligned}$$

tense

$$\int x(1 - \ln x) dx = \frac{1}{2} x^2 (1 - \ln x) + \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 (1 - \ln x) + \frac{1}{4} x^2 + C,$$

co cal

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e x(1 - \ln x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 (1 - \ln x) + \frac{1}{4} x^2 \right]_{x=1}^{x=e} = \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4} \\ &\approx 1.0973 \text{ u}^2, \end{aligned}$$

onde u indica unidade de lonxitude.

MATEMÁTICAS II

5.

5.a) Ecuacións paramétricas da recta r que pasa polos puntos $P(2, -1, 0)$ e $Q(3, 0, 0)$ e a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $R(0, 4, -2)$ e é paralelo aos vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$ e $\vec{v}(2, 1, -2)$:

$$\vec{d}_r = \overrightarrow{PQ}(1, 1, 0) \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y-4 & z+2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Como

$$\begin{vmatrix} x & y-4 & z+2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2(y-4) + z + 2 + 2(y-4) + x = x + z + 2,$$

a ecuación do plano é

$$\pi: x + z + 2 = 0.$$

5.b) Ángulo agudo que forma a recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ co plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

$$\vec{d}_r(1, 1, 0), \quad \vec{n}_\pi(1, 0, 1).$$

Se α é o ángulo pedido,

$$\sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{\|\vec{d}_r\| \|\vec{n}_\pi\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ ou, equivalentemente, } 30^\circ.$$

Nota: $| \quad |$ indica valor absoluto e $\| \quad \|$ indica norma euclidiana en $\mathbb{R}^3$. Ás veces, emprégase a mesma notación para os dous conceptos, posto que $| \quad |$ tamén é a norma euclidiana en $\mathbb{R}$.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$\vec{d}_r \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = (1, -1, -1).$$

$$\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{\|\vec{d}_r \times \vec{n}_\pi\|}{\|\vec{d}_r\| \|\vec{n}_\pi\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ ou, equivalentemente, } 30^\circ.$$

MATEMÁTICAS II

6.

6.a) Punto simétrico de $P(2, -1, 0)$ con respecto ao plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

- Ecuacións paramétricas da recta r que pasa por $P(2, -1, 0)$ e é perpendicular a π :

$$\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(1, 0, 1), \text{ co cal } r: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = -1, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Corte de r con π :

$$(2 + \lambda) + \lambda + 2 = 2\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

Logo o punto de corte é $Q(0, -1, -2)$.

- Punto simétrico pedido: se chamamos $P'(x', y', z')$ ao punto,

$$\begin{aligned} \frac{2 + x'}{2} &= 0 \Leftrightarrow x' = -2, \\ \frac{-1 + y'}{2} &= -1 \Leftrightarrow -1 + y' = -2 \Leftrightarrow y' = -1, \\ \frac{z'}{2} &= -2 \Leftrightarrow z' = -4. \end{aligned}$$

Tense logo $P'(-2, -1, -4)$.

6.b) Posición relativa das rectas $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ e $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

- Como $\vec{d}_r(1, 1, 0)$ e $\vec{d}_s(2, 1, -1)$ non son proporcionais ($\frac{1}{2} \neq \frac{1}{1}$), non son nin paralelas nin coincidentes, polo que ou ben se cortan, ou ben se cruzan.

- $[P(2, -1, 0) \in r, Q(2, -2, -1) \in s] \Rightarrow \overrightarrow{PQ}(0, -1, -1)$.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PQ}, \vec{d}_r \text{ e } \vec{d}_s \text{ son coplanares} \Rightarrow r \text{ e } s \text{ córtanse.}$$

- Punto de corte:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = -1 + \lambda, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad s: \begin{cases} x = 2 + 2\mu, \\ y = -2 + \mu, \\ z = -1 - \mu, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

$$-1 - \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = -1.$$

Logo o punto de corte é $R(2 - 2, -2 - 1, -1 + 1) = R(0, -3, 0)$.

MATEMÁTICAS II

7.

7.a) Calcular as catro probabilidades $P(A)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(A|B)$ e $P(B|A)$ sabendo que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ e $P(A) = 2P(B)$.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.8 = P(A) + \frac{1}{2}P(A) - 0.2 \Rightarrow \frac{3}{2}P(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$.
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \frac{2}{3} = 0.2 + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{3} - \frac{2}{10} = \frac{20-6}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} = 0.4\bar{6}$.
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{\frac{1}{2}P(A)} = \frac{2}{10} : \frac{1}{3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0.6$.
- $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{10} : \frac{2}{3} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0.3$.

7.b) O = “participar online”, E = “ser europeo”. Sábese que $P(O) = 0.6$, $P(E) = 0.65$ e $P(E|\bar{O}) = 0.8$.

	E	$\bar{E}$	
O	33	27	60
$\bar{O}$	$40 \times 0.8 = 32$	8	40
	65	35	100

Segundo a táboa de continxencia,

$$P(E \cap O) = \frac{33}{100} = 0.33$$

e

$$P(O|E) = \frac{33}{65} \approx 0.5077.$$

ALTERNATIVA para 7.b):

- $0.8 = P(E|\bar{O}) = \frac{P(E \cap \bar{O})}{P(\bar{O})} = \frac{P(E \cap \bar{O})}{0.4} \Rightarrow P(E \cap \bar{O}) = 0.32 \Rightarrow P(E \cap O) = P(E) - P(E \cap \bar{O}) = 0.65 - 0.32 = 0.33$.
- $P(O|E) = \frac{P(O \cap E)}{P(E)} = \frac{0.33}{0.65} \approx 0.5077$.

MATEMÁTICAS II

8.

8.a) Nunha certa zona húmida, a probabilidade de que un cabezolo chegue a ra adulta é do 2%. Se se escollen ao azar 2500 deses cabezolos, cal é a probabilidade de que ao menos 55 deles cheguen a ras adultas?

X = “n.º de cabezolos que chegan a ras adultas, de entre os 2500”.

$X \rightarrow B(n, p)$, con $n = 2500$ e $p = 0.02$. Tense logo $q = 1 - p = 0.98$. Pídese $P(X \geq 55)$.

$np = 50$, $nq = 2450$, $npq = 49$, $\sqrt{npq} = 7$. Como $np > 5$ e $nq > 5$, X pode aproximarse por $\tilde{X} \rightarrow N(50, 7)$.

$$Z = \frac{\tilde{X} - 50}{7} \rightarrow N(0, 1).$$

Aplicando a corrección de Yates ou de medio punto,

$$\begin{aligned} P(X \geq 55) &\approx P(\tilde{X} \geq 54.5) = P\left(Z \geq \frac{54.5 - 50}{7}\right) \approx P(Z \geq 0.64) = 1 - P(Z < 0.64) \\ &\approx 1 - 0.7389 = \mathbf{0.2611}. \end{aligned}$$

8.b)

X = “puntuación” $\rightarrow N(100, 20)$, conque $Z = \frac{X-100}{20} \rightarrow N(0, 1)$. Pídese x tal que $P(X \geq x) = 0.05$.

$$P(X \geq x) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{x - 100}{20}\right) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{x - 100}{20}\right) = 0.95,$$

de onde

$$\frac{x - 100}{20} \approx 1.645 \Rightarrow x - 100 \approx 32.9 \Rightarrow x \approx \mathbf{132.9}.$$

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra:

a) Calcule A se $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Se $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ é invertible, obteña os valores de x , y e z sabendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ e que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Enténdase que I é a matriz identidade.

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema
$$\begin{cases} (m+1)x & + & z & = & 1, \\ (m+1)x & + & y & + & z & = & m+1, \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m. \end{cases}$$

3. Análise:

a) Enuncie os teoremas de Rolle e do valor medio do cálculo diferencial.

b) Explique se $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, está ou non nas hipóteses do teorema do valor medio do cálculo diferencial. En caso de que o estea, calcule un valor c para o cal se cumpra a tese dese teorema.

4. Análise:

a) Calcule mediante cambio de variable as integrais $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx$ e $\int (\ln x)/x \, dx$.

b) Calcule $\int (\ln x)/x \, dx$ empregando o método de integración por partes. Logo, obteña algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x)/x \, dx = 3/2$.

5. Xeometría:

a) Considérense o plano $\pi: ax + y + z = 1$, onde a é un parámetro real, e a recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estude a posición relativa de π e r en función de a e obteña o valor de a que fai que π e r sexan perpendiculares. Por último, razoe se r pode estar contida en π ou non.

b) Se $\pi: -3x + y + z = 1$, diga que valor ten que tomar b para que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ estea contida en π .

6. Xeometría:

Considérese o plano $\pi: 2x - y + z = 1$. Pídese:

a) Calcular a distancia de π ao punto de corte das rectas $r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

b) Obter o punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π .

7. Estatística e Probabilidade:

a) Calcule $P(A|B)$ se $B \subset A$. Logo, se $P(C) = 0.5$ e $P(D) = 0.6$, explique se C e D poden ser incompatibles. Por último, obteña $P(E \cup F)$ e $P(E \cap \bar{F})$ se E e F son independentes, $P(E) = 0.3$ e $P(F) = 0.2$.

b) Tírase un dado sete veces. Calcule a probabilidade de que saian exactamente dous seis.

8. Estatística e Probabilidade:

Para un determinado grupo de pacientes, a tensión arterial sistólica (medida en mmHg) segue una distribución normal de media 123.6 e desviación típica 17.8. Calcule a probabilidade de que un paciente elixido ao azar teña unha tensión comprendida entre 100 e 120 mmHg. Logo, obteña o valor da tensión que é superado polo 67% dos pacientes.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

a) Calcule A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x , y y z sabiendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} (m+1)x & + & z & = & 1, \\ (m+1)x & + & y & + & z & = & m+1, \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m. \end{cases}$$

3. Análisis:

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.

b) Explique si $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

4. Análisis:

a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx$ y $\int (\ln x)/x \, dx$.

b) Calcule $\int (\ln x)/x \, dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x)/x \, dx = 3/2$.

5. Geometría:

a) Considérense el plano $\pi: ax + y + z = 1$, donde a es un parámetro real, y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estudie la posición relativa de π y r en función de a y obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. Por último, razone si r puede estar contenida en π o no.

b) Si $\pi: -3x + y + z = 1$, diga qué valor tiene que tomar b para que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en π .

6. Geometría:

Considérense el plano $\pi: 2x - y + z = 1$. Se pide:

a) Calcular la distancia de π al punto de corte de las rectas $r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases} (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

b) Obtener el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π .

7. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule $P(A|B)$ si $B \subset A$. Luego, si $P(C) = 0.5$ y $P(D) = 0.6$, explique si C y D pueden ser incompatibles. Por último, obtenga $P(E \cup F)$ y $P(E \cap \bar{F})$ si E y F son independientes, $P(E) = 0.3$ y $P(F) = 0.2$.

b) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.

8. Estadística y Probabilidad:

Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123.6 y desviación típica 17.8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superado por el 67% de los pacientes.

MATEMÁTICAS II

1.

1.a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1}$.

Como $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, temos que $\det B = 1 + 1 = 2$ e, polo tanto,

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{pmatrix},$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} c-d=0 \\ c+d=1 \end{cases} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} 2a=3 \\ b=2-a \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 2c=1 \\ c=d \end{cases} \right]$$

$$\Leftrightarrow [a = 3/2, \quad b = 1/2, \quad c = 1/2 \quad \text{e} \quad d = 1/2].$$

Logo

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

1.b) Como $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ é invertible, sabemos que $\det A = 3z - xy \neq 0$.

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z - 3 \end{pmatrix}.$$

Ao ser $\det(A - 3I) = -xy = 0$ e $y \neq 0$, necesariamente ten que ser $x = 0$. En consecuencia, tamén teremos $z \neq 0$, porque $\det A = 3z - xy = 3z \neq 0$. Neste punto, sábese que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$$

con y e z non nulos. Obteremos os valores de y e z da igualdade

$$(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Posto que $\det A = 3z$,

$$A^{-1} = \frac{1}{3z} \begin{pmatrix} z & -y \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{3z} \begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & 3 \end{pmatrix},$$

conque

$$(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} z+1 & 0 \\ -y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

de onde se deduce que $y = 1$ e $z = 1$.

En resumo, **os valores pedidos son $x = 0$, $y = 1$ e $z = 1$** . Equivalentemente,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN ALTERNATIVA (que evita o cálculo da inversa):

Procédase como na resolución anterior ata chegar a que $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ con y e z non nulos. Agora nótese que a igualdade $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ implica que $(3z)A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Polo tanto,

$$\begin{pmatrix} 3z & 0 \\ 0 & 3z \end{pmatrix} = (3z)I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3+3y & 3z \end{pmatrix},$$

de onde $y = 1$ e $z = 1$.

MATEMÁTICAS II

2.

$$\begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ m+1 \\ m \end{matrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & m-2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ m \\ m-1 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 - mF_2} \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ m \\ -m^2 + m - 1 \end{matrix}.$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} (m+1)x + z = 1, \\ y = m, \\ (m-2)z = -m^2 + m - 1. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{-m^2 + m - 1}{m - 2}, \quad y = m, \quad x = \frac{1 - z}{m + 1}.$$

- Se $m = -1$, o sistema queda

$$\begin{cases} z = 1, \\ y = -1, \\ -3z = -3, \end{cases}$$

que é compatible indeterminado, porque ten as seguintes infinitas solucións:

$$x \in \mathbb{R}, \quad y = -1, \quad z = 1.$$

- Se $m = 2$, o sistema é incompatible, xa que a terceira ecuación queda $0 = -3$.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ m+1 \\ m \end{matrix}. \quad \text{Sabemos que}$$

$$\text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

MATEMÁTICAS II

$$\det A = \begin{vmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix} = (m+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m-1 \end{vmatrix}$$

$$= (m+1)(m-1+m-1-m) = (m+1)(m-2) = 0 \Leftrightarrow m \in \{-1, 2\}.$$

Discusión:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que **o sistema é compatible determinado**.

- **Caso $m = -1$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right)$. Ao ser

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 1 = 0, \text{ tense que } \text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 =$$

n.º de incógnitas, situación na que **o sistema é compatible indeterminado**.

- **Caso $m = 2$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 1 -$

$2 - 2 = 5 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

MATEMÁTICAS II

3.

3.a)

Teorema de Rolle: se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , e tal que $f(a) = f(b)$, entón existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema do valor medio: se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) , entón existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

3.b) A función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, é claramente continua en $[0, 1]$. Ademais,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

conque f é derivable en $(0, 1)$.

Logo **f si que está nas hipóteses do teorema do valor medio**, polo que ten que existir algún $c \in (0, 1)$ tal que $f(1) - f(0) = f'(c)(1 - 0)$.

Ao ser $f(1) = 0$ e $f(0) = 1$, estamos a dicir que $f'(c) = -1$ para algún $c \in (0, 1)$.

Neste caso haberá un único valor posible para c , o cal se pode obter do seguinte xeito:

$$f'(c) = -1 \Leftrightarrow \frac{-c}{\sqrt{1 - c^2}} = -1 \Leftrightarrow c = \sqrt{1 - c^2} \Leftrightarrow [c^2 = 1 - c^2 \quad \text{e} \quad c > 0]$$

$$\Leftrightarrow [2c^2 = 1 \quad \text{e} \quad c > 0] \Leftrightarrow [c^2 = 1/2 \quad \text{e} \quad c > 0] \Leftrightarrow c = \sqrt{1/2}.$$

Obsérvese que $c \in (0, 1)$.

MATEMÁTICAS II

4.

4.a)

Facendo o cambio $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$, tense

$$\int (\sin x)^5 \cos x \, dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{(\sin x)^6}{6} + C.$$

Facendo o cambio $u = \ln x$, $du = (1/x) \, dx$, tense

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

4.b)

Primeira parte:

Tomando

$u = \ln x$	$du = \frac{1}{x} \, dx$
$dv = \frac{1}{x} \, dx$	$v = \ln x$

vese que

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x} \, dx$$

Logo $2 \int (\ln x)/x \, dx = (\ln x)^2 + K$ e, de aí,

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

Segunda parte:

$$\int_e^B \frac{\ln x}{x} \, dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_e^B = \frac{1}{2}(\ln B)^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (\ln B)^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow (\ln B)^2 = 4.$$

Unha solución sae por tanto de

$$\ln B = 2 \Leftrightarrow B = e^2.$$

MATEMÁTICAS II

5.

5.a) Temos $\pi: ax + y + z = 1$ e $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$.

- $\vec{n}_\pi(a, 1, 1)$ é normal a π e $\vec{d}_r(2, 3, 3)$ ten a dirección de r . Como

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = 2a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -3,$$

a recta é paralela ao plano se $a = -3$ e corta ao plano nun punto se $a \neq -3$.

- Para que r e π sexan perpendiculares, $\vec{n}_\pi(a, 1, 1)$ ten que ser paralelo a $\vec{d}_r(2, 3, 3)$:

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}.$$

- $P(1, 0, -1)$ é un punto de r . Para que r estea contida en π ten que ser $a = -3$ e, á vez, $P \in \pi$, o que non é certo: $-3 + 0 - 1 = -4 \neq 1$. Logo **r non pode estar contida en π .**

5.b) Se $\pi: -3x + y + z = 1$, pídese o valor de b para que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ estea contida en π . Xa sabemos polo apartado anterior que $\vec{n}_\pi(-3, 1, 1)$ e $\vec{d}_r(2, 3, 3)$ son perpendiculares, de xeito que r estará contida en π se, e só se, un punto calquera da recta pertence tamén ao plano π . Tomando $P(1, b, -1)$,

$$P(1, b, -1) \in \pi \Leftrightarrow -3 + b - 1 = 1 \Leftrightarrow b = 5.$$

MATEMÁTICAS II

6.

6.a) Pídese a distancia de $\pi: 2x - y + z = 1$ ao punto de corte das rectas

$$r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \text{ e } r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0. \end{cases}$$

Podemos dar por feito que r_1 e r_2 se cortan. De $-1 - \lambda = 0$ dedúcese que $\lambda = -1$,
conque o punto de corte é $P(1,0,0)$.

A distancia de $P(1,0,0)$ a $\pi: 2x - y + z - 1 = 0$ é

$$d = \frac{|2 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

6.b) Punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a $\pi: 2x - y + z = 1$:

- Ecuacións paramétricas da recta r que pasa por $P(1,0,0)$ e é perpendicular a π :

$$\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(2, -1, 1), \text{ co cal } r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Corte de r con π :

$$2(1 + 2\lambda) + \lambda + \lambda = 6\lambda + 2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{6}.$$

Posto que $x = 1 + 2\lambda = 1 - 1/3 = 2/3$, $y = -\lambda = 1/6$ e $z = \lambda = -1/6$, o punto de
corte é

$$Q\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right).$$

- Punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a $\pi: 2x - y + z = 1$: se chamamos
 $P'(x', y', z')$ ao punto pedido, temos

$$\frac{1 + x'}{2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x' + 3 = 4 \Leftrightarrow x' = \frac{1}{3},$$

$$\frac{y'}{2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6y' = 2 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{3},$$

$$\frac{z'}{2} = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow 6z' = -2 \Leftrightarrow z' = -\frac{1}{3},$$

conque

$$P'\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

MATEMÁTICAS II

7.

7.a)

- Se $B \subset A$, entón $A \cap B = B$, co cal

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

(Cando se fala de $P(A|B)$, dáse por feito que $P(B)$ non é 0.)

- Se $P(C) = 0.5$ e $P(D) = 0.6$, entón **C e D non poden ser incompatibles**, xa que, se o fosen, $P(C \cap D)$ sería igual a 0 e, consecuentemente,

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = P(C) + P(D) = 0.5 + 0.6 = 1.1$$

sería maior que 1, o que non é posible.

- Pídense $P(E \cup F)$ e $P(E \cap \bar{F})$ se E e F son independentes, $P(E) = 0.3$ e $P(F) = 0.2$.

○ $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0.5 - P(E \cap F)$. Por ser E e independentes, $P(E \cap F) = P(E)P(F) = 0.06$, co cal **$P(E \cup F) = 0.44$** .

○ Da igualdade $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \bar{F})$ obtense

$$P(E \cap \bar{F}) = P(E) - P(E \cap F) = 0.3 - 0.06 = \mathbf{0.24}.$$

Ou, doutro xeito, **$P(E \cap \bar{F}) = P(E)P(\bar{F}) = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24$** , xa que E e $\bar{F}$ son independentes ao selo E e F .

7.b)

X = “n.º de seises obtidos nas sete tiradas”.

$X \rightarrow B(n, p)$, con $n = 7$ e $p = 1/6$ (logo $q = 1 - p = 5/6$).

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5^5}{(2!) \cdot 6^7} = \frac{7 \cdot 5^5}{2 \cdot 6^6} = \frac{21875}{93312} \approx 0.2344.$$

MATEMÁTICAS II

8. X = “tensión arterial sistólica en mmHg”.

$$X \rightarrow N(123.6, 17.8) \Rightarrow Z = \frac{X - 123.6}{17.8} \rightarrow N(0, 1).$$

- $P(100 \leq X \leq 120) = P\left(\frac{100-123.6}{17.8} \leq Z \leq \frac{120-123.6}{17.8}\right) \approx P(-1.33 \leq Z \leq -0.20) = P(0.20 \leq Z \leq 1.33) = P(Z \leq 1.33) - P(Z \leq 0.20) \approx 0.9082 - 0.5793 = \mathbf{0.3289}$ é a probabilidade de que un paciente elixido ao azar teña unha tensión comprendida entre 100 e 120 mmHg.

- Pídese tamén o valor de t tal que $P(X > t) = 0.67$. Ao ser 0.67 maior que 0.5, é claro que t terá que ser menor que a media 123.6. Entón

$$P(X > t) = P\left(Z > \frac{t - 123.6}{17.8}\right) = P\left(Z < \frac{123.6 - t}{17.8}\right) = 0.67.$$

Indo á táboa da normal vese que

$$\frac{123.6 - t}{17.8} \approx 0.44,$$

de onde

$$t \approx 123.6 - 17.8 \cdot 0.44 = \mathbf{115.768}.$$

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra

Despeixe X da ecuación matricial $AB(X - I) = C$, onde I é a matriz identidade (asuma que o produto AB ten inversa). Logo, calcule X se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Números e Álgebra

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema
$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1, \\ x + m^2z = 0. \end{cases}$$

3. Análise

- a) Calcule os límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$, onde $\ln x$ é o logaritmo neperiano de x .
 b) Debuxe a gráfica dunha función f continua e non negativa no intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0) = 0$, $f(3) = 0$, $f'' > 0$ no intervalo $(0,1)$, $f'' < 0$ no intervalo $(2,3)$ e f é constante no intervalo $(1,2)$.

4. Análise

Obteña a función f , sabendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ e que a ecuación da recta tanxente á gráfica de f no punto de abscisa $x = 0$ é $y = 3x - 1$.

5. Xeometría

- a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $P(1, -1, 0)$ e é perpendicular á recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -1, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$
 b) Calcule os dous puntos da recta $r: \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$, cuxa distancia ao plano $\pi: x - 1 = 0$ é igual a 2.

6. Xeometría

- a) Ache os valores de k e de m que fan que os puntos $A(k, 3, m)$, $B(2, 0, 2)$ e $C(k, 2, 0)$ estean aliñados.
 b) Estude a posición relativa das rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ e $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade

- a) Se $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabendo que A e B son sucesos incompatibles. Canto valería $P(A)$ se supuxésemos que A e B son, en lugar de incompatibles, independentes?
 b) Nunha certa cidade, o 21% das persoas len ciencia ficción, o 63% len novela negra, e o 17% len tanto ciencia ficción como novela negra. Se se elixe ao azar unha persoa desa cidade, calcule:
 • A probabilidade de que lea novela negra sabendo que le ciencia ficción.
 • A probabilidade de que non lea nin ciencia ficción nin novela negra.

8. Estatística e Probabilidade

- a) Calcule o valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ se X segue unha distribución normal de media 1 e desviación típica 3.
 b) Calcule o valor de α que fai que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0.8064$ se X segue unha distribución normal de media μ e desviación típica 4.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra

Despeje X de la ecuación matricial $AB(X - I) = C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Números y Álgebra

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1, \\ x + m^2z = 0. \end{cases}$$

3. Análisis

a) Calcule los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

b) Dibuje la gráfica de una función f continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0) = 0$, $f(3) = 0$, $f'' > 0$ en el intervalo $(0,1)$, $f'' < 0$ en el intervalo $(2,3)$ y f es constante en el intervalo $(1,2)$.

4. Análisis

Obtenga la función f , sabiendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x - 1$.

5. Geometría

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1, -1, 0)$ y es perpendicular a

la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -1, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

b) Calcule los dos puntos de la recta $r: \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$, cuya distancia al plano $\pi: x - 1 = 0$ es igual a 2.

6. Geometría

a) Halle los valores de k y de m que hacen que los puntos $A(k, 3, m)$, $B(2, 0, 2)$ y $C(k, 2, 0)$ estén alineados.

b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ y $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad

a) Si $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles. ¿Cuánto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?

b) En una cierta ciudad, el 21% de las personas leen ciencia ficción, el 63% leen novela negra, y el 17% leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:

- La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.
- La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

8. Estadística y Probabilidad

a) Calcule el valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.

b) Calcule el valor de α que hace que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0.8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

ABAU 2022
CONVOCATORIA ORDINARIA
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

Só puntúan cinco das oito preguntas.

1. **Números e Álgebra** (2 puntos): **0.75** por despegar X , **0.5** por calcular $(AB)^{-1}$, e **0.75** por calcular X .
2. **Números e Álgebra** (2 puntos): **0.5** polo estudo do rango da matriz de coeficientes, **0.5** polo estudo do rango da matriz ampliada, **1** = 0.25×4 polas catro conclusións.
3. **Análise** (2 puntos)
 - a) 1 punto: **0.5** por cada un dos dous límites.
 - b) 1 punto: **0.25** por establecer relacións entre os datos e o debuxo pedido e **0.75** polo debuxo.
4. **Análise** (2 puntos): **1** = $0.5 + 0.5$ polas dúas integrais, **0.5** por ter en conta que $f(0) = -1$ e $f'(0) = 3$, **0.5** pola determinación da función.
5. **Xeometría** (2 puntos)
 - a) 1 punto: **0.5** polos elementos que determinan o plano, **0.5** pola ecuación pedida.
 - b) 1 punto: **0.25** por coñecer a fórmula da distancia, **0.75** polos dous puntos pedidos.
6. **Xeometría** (2 puntos)
 - a) 1 punto: **0.25** pola formulación do problema, **0.75** pola determinación de k e de m .
 - b) 1 punto: **0.5** pola posición relativa, **0.5** polo punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

- a) 1 punto: **0.5** por cada un dos dous casos.
- b) 1 punto: **0.5** por cada unha das dúas probabilidades pedidas.

8. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

- a) 1 punto: **0.25** pola tipificación, **0.25** por chegar a $P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1)$ e **0.5** por chegar á solución.
- b) 1 punto: **0.25** pola tipificación, **0.25** por chegar a $P(Z \leq \alpha/4) - P(Z \leq -\alpha/4) = 0.8064$, **0.25** por chegar a $P(Z \leq \alpha/4) = 0.9032$ e **0.25** pola obtención do valor de α .

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra:

Despexe X da ecuación matricial $AB(X - I) = C$, onde I é a matriz identidade (asuma que o produto AB ten inversa). Logo, calcule X se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema
$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1, \\ x + m^2z = 0. \end{cases}$$

3. Análise:

a) Calcule os límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$, onde $\ln x$ é o logaritmo neperiano de x .

b) Debuxe a gráfica dunha función f continua e non negativa no intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0) = 0$, $f(3) = 0$, $f'' > 0$ no intervalo $(0,1)$, $f'' < 0$ no intervalo $(2,3)$ e f é constante no intervalo $(1,2)$.

4. Análise:

Obteña a función f , sabendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ e que a ecuación da recta tanxente á gráfica de f no punto de abscisa $x = 0$ é $y = 3x - 1$.

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $P(1, -1, 0)$ e é perpendicular á recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -1, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

b) Calcule os dous puntos da recta $r: \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$, cuxa distancia ao plano $\pi: x - 1 = 0$ é igual a 2.

6. Xeometría:

a) Ache os valores de k e de m que fan que os puntos $A(k, 3, m)$, $B(2, 0, 2)$ e $C(k, 2, 0)$ estean aliñados.

b) Estude a posición relativa das rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ e $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade:

a) Se $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabendo que A e B son sucesos incompatibles. Canto valería $P(A)$ se supuxésemos que A e B son, en lugar de incompatibles, independentes?

b) Nunha certa cidade, o 21% das persoas len ciencia ficción, o 63% len novela negra, e o 17% len tanto ciencia ficción como novela negra. Se se elixe ao azar unha persoa desa cidade, calcule:

- A probabilidade de que lea novela negra sabendo que le ciencia ficción.
- A probabilidade de que non lea nin ciencia ficción nin novela negra.

8. Estatística e Probabilidade:

a) Calcule o valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ se X segue unha distribución normal de media 1 e desviación típica 3.

b) Calcule o valor de α que fai que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0.8064$ se X segue unha distribución normal de media μ e desviación típica 4.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

Despeje X de la ecuación matricial $AB(X - I) = C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2 - m)z = 1, \\ x + m^2z = 0. \end{cases}$$

3. Análisis:

- a) Calcule los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .
- b) Dibuje la gráfica de una función f continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0) = 0$, $f(3) = 0$, $f'' > 0$ en el intervalo $(0,1)$, $f'' < 0$ en el intervalo $(2,3)$ y f es constante en el intervalo $(1,2)$.

4. Análisis:

Obtenga la función f , sabiendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x - 1$.

5. Geometría:

- a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1, -1, 0)$ y es perpendicular a

la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -1, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

- b) Calcule los dos puntos de la recta $r: \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$, cuya distancia al plano $\pi: x - 1 = 0$ es igual a 2.

6. Geometría:

- a) Halle los valores de k y de m que hacen que los puntos $A(k, 3, m)$, $B(2, 0, 2)$ y $C(k, 2, 0)$ estén alineados.
- b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ y $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad:

- a) Si $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles. ¿Cuánto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?
- b) En una cierta ciudad, el 21% de las personas leen ciencia ficción, el 63% leen novela negra, y el 17% leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:
- La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.
 - La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

8. Estadística y Probabilidad:

- a) Calcule el valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.
- b) Calcule el valor de α que hace que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0.8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

MATEMÁTICAS II

1.

$$AB(X - I) = C \Leftrightarrow X - I = (AB)^{-1}C \Leftrightarrow X = I + (AB)^{-1}C.$$

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

•

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \det(AB) = 8 - 6 = 2.$$

•

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -8 & 2 & 4 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -8 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

•

$$(AB)^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$X = I + (AB)^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

2. A notación F_i indicará «fila i ». Unha expresión do tipo $F_i + \alpha F_j$ (na que $\alpha \in \mathbb{R}$ e i é maior que j) quererá dicir que no seguinte paso vaise cambiar a fila i da matriz polo resultado da operación $F_i + \alpha F_j$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 1 & 0 & m^2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 0 & 3-m & m^2-m & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 0 & 0 & 2(m^2-m) & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 0 & 0 & m^2-m & 0 \end{array} \right).$$

Sistema triangular equivalente:
$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1, \\ (m^2-m)z = 0. \end{cases}$$

$$m^2 - m = m(m-1) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0,1\} \quad \text{e} \quad m-3 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 3\}$, o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = 0, \quad y = \frac{1}{m-3}, \quad x = 0.$$

- Se $m \in \{0, 1\}$, temos
$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y = 1, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

O sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións:

$$\left[z = \lambda, \quad y = \frac{1}{m-3}, \quad x = -m\lambda \right], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Se $m = 3$, temos
$$\begin{cases} x + 3z = 1, \\ 6z = 1, \\ 6z = 0. \end{cases}$$

O sistema é incompatible, porque a segunda e a terceira ecuación non se poden cumprir á vez.

MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN ALTERNATIVA – EXERCICIO 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 1 & 0 & m^2 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 1 & 0 & m^2 & 0 \end{pmatrix}, \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & m-3 \\ 0 & m-3 \end{vmatrix} = m-3$ e $\begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & m^2-m \end{vmatrix} = m^2-m$ non se anulan á vez, tense que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\begin{aligned} \det A &= m^2(m-3) + (m-3)(m^2-m) - m(m-3) = (m-3)(m^2 + m^2 - m - m) \\ &= (m-3)(2m^2 - 2m) = 2m(m-1)(m-3) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0, 1, 3\}. \end{aligned}$$

Discusión:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 3\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso $m = 0$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = \text{n.º de incógnitas}$, situación na que **o sistema é compatible indeterminado**.
- **Caso $m = 1$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = \text{n.º de incógnitas}$, situación na que **o sistema é compatible indeterminado**.
- **Caso $m = 3$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 6 - 9 = -12 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

MATEMÁTICAS II

3.

3.a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x}{\cos x} = 1,$$

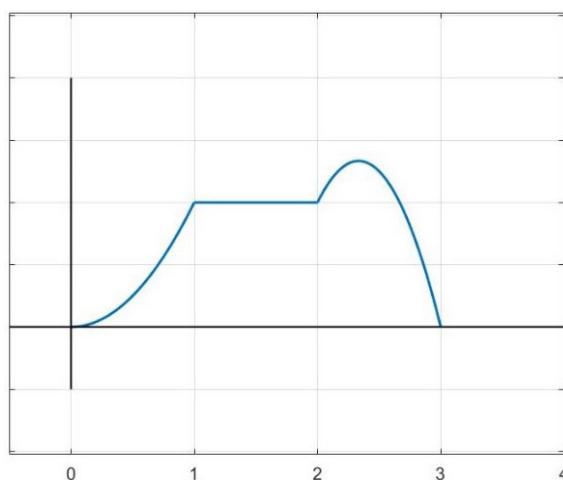
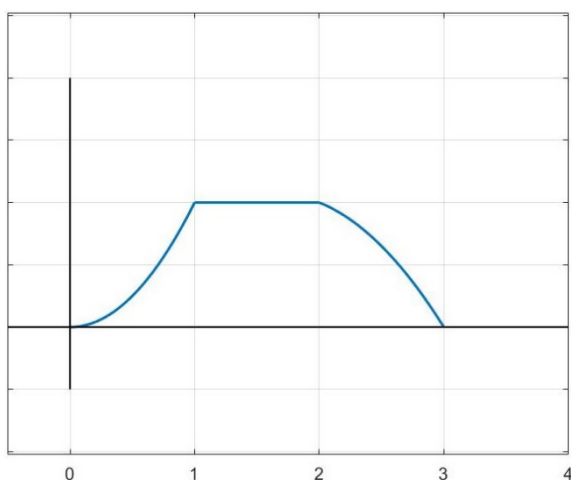
onde L'H indica o uso da regra de L'Hôpital para tratar unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$. Falando con rigor, o que asegura a regra de L'Hôpital é que o primeiro límite existe e vale 1 porque o último existe e vale 1.

Analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0,$$

onde L'H indica o uso da regra de L'Hôpital para tratar unha indeterminación do tipo $\frac{-\infty}{\infty}$.

3.b) A función f é convexa no intervalo $(0,1)$ e cóncava no intervalo $(2,3)$. Posto que ten que ser continua e non negativa no intervalo $[0,3]$, e ademais cumprir $f(0) = f(3) = 0$ e ser constante no intervalo $(1,2)$, a súa gráfica debe seguir algún dos seguintes patróns:



MATEMÁTICAS II**4.**

Integrando $f''(x) = 2x - e^{-x}$ obtense

$$f'(x) = x^2 + e^{-x} + C_1,$$

e, integrando esta última,

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + C_1x + C_2 \quad (C_1 \text{ e } C_2 \text{ constantes}).$$

Posto que a tanxente á gráfica de f en $(0, f(0))$ é $y = 3x - 1$, téñense que cumprir

$$f(0) = y(0) = -1, \quad f'(0) = y' = 3.$$

De $f(0) = -1 + C_2 = -1$ e $f'(0) = 1 + C_1 = 3$ obtéñense os valores $C_1 = 2$ e $C_2 = 0$, co cal

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + 2x.$$

MATEMÁTICAS II

5.

5.a) π pasa polo punto $P(1, -1, 0)$ e é normal a $\vec{n}_\pi = \vec{d}_r(1, 0, 0)$. Logo

$$\pi: x - 1 = 0.$$

5.b) Se $P(x_0, y_0, z_0)$ e $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, a distancia de P a π é

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Entón a distancia dun punto xenérico da recta $r: \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$, ao plano $\pi: x - 1 = 0$ é

$$d(P(\lambda, \lambda, \lambda), \pi) = |\lambda - 1|.$$

Como

$$|\lambda - 1| = 2 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 3\},$$

os dous puntos buscados son

$$P(-1, -1, -1) \text{ e } Q(3, 3, 3).$$

MATEMÁTICAS II

6.

6.a) Os puntos $A(k, 3, m)$, $B(2, 0, 2)$ e $C(k, 2, 0)$ están aliñados se, e só se, $\overrightarrow{AB}(2 - k, -3, 2 - m)$ e $\overrightarrow{AC}(0, -1, -m)$ son proporcionais.

De $2 - k = 0$ dedúcese que $k = 2$, e de $\frac{-3}{-1} = \frac{2-m}{-m}$ dedúcese que $3m = m - 2$, é dicir, $m = -1$.

6.b) Posición relativa das rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ e $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$.

- Como $\vec{d}_r(2, 3, 2)$ e $\vec{d}_s(3, 2, 3)$ non son proporcionais ($\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$), non son nin paralelas nin coincidentes, polo que ou ben se cortan, ou ben se cruzan.
- $[P(1, -1, 2) \in r, Q(-2, -3, -1) \in s] \Rightarrow \overrightarrow{PQ}(-3, -2, -3)$.

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (dúas columnas iguais)} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}, \vec{d}_r \text{ e } \vec{d}_s \text{ son coplanarios} \\ \Rightarrow r \text{ e } s \text{ córtanse.}$$

- Punto de corte:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = -1 + 3\lambda, \\ z = 2 + 2\lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}; \quad s: \begin{cases} x = -2 + 3\mu, \\ y = -3 + 2\mu, \\ z = -1 + 3\mu, \end{cases} \mu \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda = -2 + 3\mu \\ -1 + 3\lambda = -3 + 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - 3\mu = -3 \\ 3\lambda - 2\mu = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda - 6\mu = -6 \\ 9\lambda - 6\mu = -6 \end{cases} \Rightarrow 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

Logo o punto de corte é

$$R(1 + 2 \cdot 0, -1 + 3 \cdot 0, 2 + 2 \cdot 0) = R(1, -1, 2).$$

MATEMÁTICAS II

7.

7.a)

- Se A e B son incompatibles, $P(A \cap B) = 0$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{3} = P(A) + \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12} = \mathbf{0.08\bar{3}}.$$

- Se A e B son independientes, $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}P(A)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{3} = P(A) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}P(A) \Leftrightarrow \frac{3}{4}P(A) = \frac{1}{12} \\ \Leftrightarrow P(A) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{9} = \mathbf{0.\bar{1}}.$$

7.b) CF = “ler ciencia ficción”, NN = “ler novela negra”.

$$P(\text{CF}) = 0.21, \quad P(\text{NN}) = 0.63, \quad P(\text{CF} \cap \text{NN}) = 0.17.$$

•

$$P(\text{NN}|\text{CF}) = \frac{P(\text{NN} \cap \text{CF})}{P(\text{CF})} = \frac{0.17}{0.21} \approx \mathbf{0.8095}.$$

•

$$P(\overline{\text{CF}} \cap \overline{\text{NN}}) = P(\overline{\text{CF} \cup \text{NN}}) = 1 - P(\text{CF} \cup \text{NN}).$$

$$P(\text{CF} \cup \text{NN}) = P(\text{CF}) + P(\text{NN}) - P(\text{CF} \cap \text{NN}) = 0.21 + 0.63 - 0.17 = 0.67.$$

$$P(\overline{\text{CF}} \cap \overline{\text{NN}}) = 1 - 0.67 = \mathbf{0.33}.$$

MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN ALTERNATIVA – EJERCICIO 7.b):

Vese na táboa de continxencia

	CF	$\overline{CF}$	Totais
NN	17	46	63
$\overline{NN}$	4	33	37
Totais	21	46	100

que

$$P(NN|CF) = \frac{17}{21} \approx 0.8095$$

e

$$P(\overline{CF} \cap \overline{NN}) = 0.33.$$

MATEMÁTICAS II

8.

8.a)

$$X \rightarrow N(1,3) \Rightarrow Z = \frac{X-1}{3} \rightarrow N(0,1).$$

$$\begin{aligned} P(-2 \leq X \leq 7) &= P(-1 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 2) - \{1 - P(Z \leq 1)\} \\ &= P(Z \leq 2) + P(Z \leq 1) - 1 \approx 0.9772 + 0.8413 - 1 = \mathbf{0.8185}. \end{aligned}$$

8.b)

$$X \rightarrow N(\mu, 4) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{4} \rightarrow N(0,1).$$

$$\begin{aligned} 0.8064 &= P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = P\left(-\frac{\alpha}{4} \leq Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - P\left(Z \leq -\frac{\alpha}{4}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - \left\{1 - P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right)\right\} = 2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - 1. \end{aligned}$$

Logo

$$2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = 1.8064 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = 0.9032,$$

conque, segundo a táboa,

$$\frac{\alpha}{4} \approx 1.3 \Leftrightarrow \alpha \approx \mathbf{5.2}.$$

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra

a) Obteña a matriz antisimétrica A de orde 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Logo, calcule a súa inversa no caso de que exista. **Nota:** a_{ij} é o elemento que está na fila i e na columna j de A .

b) Sexa $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Se $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, ache os valores de b_{12} e de b_{22} sabendo que B non ten inversa e que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

2. Números e Álgebra

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema
$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$$

3. Análise

a) Obteña as coordenadas dos vértices do triángulo rectángulo cuxa hipotenusa é tanxente á gráfica de $f(x) = x^2$ no punto de abscisa $x = 2$ e que, ademais, ten un cateto de lonxitude 2 situado sobre o eixe X . Debuxe a gráfica de f , a recta tanxente e o triángulo.

b) Ache os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{se } x > 1 \end{cases}$ sexa derivable.

4. Análise

Calcule as seguintes integrais:

a) $\int 2x\sqrt{x^2 + 1} \, dx$. b) $\int (\sin x) \sin(\cos x) \, dx$. c) $\int x^2 \sin x \, dx$. d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx$.

5. Xeometría

a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que contén á recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ e pasa polo punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule o punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto ao plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6. Xeometría

Estude a posición relativa da recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ e o plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función dos parámetros k e a . Logo, se é posible, diga cando r é perpendicular a π .

7. Estatística e Probabilidade

a) Nunha famosa biblioteca, o 70% dos libros son novelas, o 40% son clásicos anteriores ao século XIX e o 60% dos clásicos son novelas. Se se elixe nesa biblioteca un libro ao azar, calcule a probabilidade de que non sexa unha novela, pero si un clásico, e a probabilidade de que sexa un clásico sabendo que é unha novela.

b) Nun certo país, o 80% dos delitos contra a propiedade quedan sen resolver. Se nunha localidade dese país se cometeron 3 deses delitos, calcule a probabilidade de que se resolva polo menos 1.

8. Estatística e Probabilidade

a) Faise un exame tipo test con 60 preguntas e 4 opcións por pregunta, das que só unha é correcta. Calcule a probabilidade de acertar polo menos 16 preguntas se se responden as 60 ao azar.

b) Se X segue unha distribución normal de media 25 e desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Logo, calcule o valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota:** a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A .

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

2. Números y Álgebra

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$$

3. Análisis

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X . Dibuje la gráfica de f , la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea derivable.

4. Análisis

Calcule las siguientes integrales:

a) $\int 2x\sqrt{x^2 + 1} \, dx$. b) $\int (\sin x) \sin(\cos x) \, dx$. c) $\int x^2 \sin x \, dx$. d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx$.

5. Geometría

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ y pasa por el punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule el punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto al plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6. Geometría

Estudie la posición relativa de la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de los parámetros k y a . Luego, si es posible, diga cuándo r es perpendicular a π .

7. Estadística y Probabilidad

a) En una famosa biblioteca, el 70% de los libros son novelas, el 40% son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60% de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

b) En un cierto país, el 80% de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de esos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos 1.

8. Estadística y Probabilidad

a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.

b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

ABAU 2022
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

Só puntúan cinco das oito preguntas.

As puntuacións parciais que seguen están ligadas a un determinado xeito de resolver os exercicios, pero, nalgúns casos, pode haber outras formas correctas de solucionarlos.

1. Números e Álgebra (2 puntos):

- a) 0.75 puntos: **0.25** por determinar a matriz A , **0.5** por calcular a súa inversa.
- b) 1.25 puntos: **0.25** por deducir que $b_{12} = 0$ a partir da singularidade de B , **0.5** por calcular $A^{-1}B + A$ e **0.5** por deducir da igualdade $\det(A^{-1}B + A) = -1$ que $b_{22} = 2$.

2. Números e Álgebra (2 puntos): **0.5** pola resolución da ecuación $\det A = 0$ (onde A é a matriz de coeficientes), **0.75** polo estudo dos rangos da matriz de coeficientes e da matriz ampliada, **0.75** = 0.25×3 polas conclusións (tres casos).

3. Análise (2 puntos)

- a) 1 punto: **0.25** pola ecuación da recta tanxente, **0.5** polo debuxo, **0.25** por especificar as coordenadas dos vértices.
- b) 1 punto: **0.5** pola condición de continuidade, **0.5** pola determinación de a e b .

4. Análise (2 puntos):

- a) **0.5** puntos.
- b) **0.5** puntos.
- c) **0.5** puntos.
- d) 0.5 puntos: **0.25** pola expresión en suma de fraccións simples, **0.25** polo cálculo final.

5. Xeometría (2 puntos)

- a) 1 punto: **0.5** por especificar os elementos que determinan o plano e **0.5** pola ecuación.
- b) 1 punto: **0.25** pola recta perpendicular, **0.25** polo punto de corte, **0.5** polo punto simétrico.

6. Xeometría (2 puntos): **0.25** por chegar á condición $5a + 2k = 0$, **1.5** $= 0.5 \times 3$ por distinguir os tres casos posibles e **0.25** por deducir a condición de perpendicularidade.

7. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

- a) 1 punto: **0.5** por cada unha das dúas probabilidades que se piden.
- b) 1 punto: **0.25** por identificar a distribución binomial e **0.75** polo cálculo da probabilidade pedida.

8. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

- a) 1 punto: **0.5** por chegar a $P(X \geq 16) \approx P(\tilde{X} \geq 15.5)$, con $\tilde{X}$ normal, **0.25** por chegar a $P(Z \geq 0.15)$ e **0.25** polo resultado.
- b) 1 punto: **0.25** por calcular $P(X < 24)$, **0.5** por chegar a $P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) = 0.6064$ e **0.25** pola obtención de α .

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra:

a) Obteña a matriz antisimétrica A de orde 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Logo, calcule a súa inversa no caso de que exista. **Nota:** a_{ij} é o elemento que está na fila i e na columna j de A .

b) Sexa $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Se $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, ache os valores de b_{12} e de b_{22} sabendo que B non ten inversa e que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema
$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$$

3. Análise:

a) Obteña as coordenadas dos vértices do triángulo rectángulo cuxa hipotenusa é tanxente á gráfica de $f(x) = x^2$ no punto de abscisa $x = 2$ e que, ademais, ten un cateto de lonxitude 2 situado sobre o eixe X . Debuxar a gráfica de f , a recta tanxente e o triángulo.

b) Ache os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{se } x > 1 \end{cases}$ sexa derivable.

4. Análise:

Calcule as seguintes integrais:

a) $\int 2x\sqrt{x^2 + 1} \, dx$. b) $\int (\sin x) \sin(\cos x) \, dx$. c) $\int x^2 \sin x \, dx$. d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx$.

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que contén á recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ e pasa polo punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule o punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto ao plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6. Xeometría:

Estude a posición relativa da recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ e o plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función dos parámetros k e a . Logo, se é posible, diga cando r é perpendicular a π .

7. Estatística e Probabilidade:

a) Nunha famosa biblioteca, o 70% dos libros son novelas, o 40% son clásicos anteriores ao século XIX e o 60% dos clásicos son novelas. Se se elixe nesa biblioteca un libro ao azar, calcule a probabilidade de que non sexa unha novela, pero si un clásico, e a probabilidade de que sexa un clásico sabendo que é unha novela.

b) Nun certo país, o 80% dos delitos contra a propiedade quedan sen resolver. Se nunha localidade dese país se cometeron 3 deses delitos, calcule a probabilidade de que se resolva polo menos 1.

8. Estatística e Probabilidade:

a) Faise un exame tipo test con 60 preguntas e 4 opcións por pregunta, das que só unha é correcta. Calcule a probabilidade de acertar polo menos 16 preguntas se se responden as 60 ao azar.

b) Se X segue unha distribución normal de media 25 e desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Logo, calcule o valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota:** a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A .

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$$

3. Análisis:

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X . Dibujar la gráfica de f , la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea derivable.

4. Análisis:

Calcule las siguientes integrales:

a) $\int 2x\sqrt{x^2 + 1} \, dx$. b) $\int (\sin x) \sin(\cos x) \, dx$. c) $\int x^2 \sin x \, dx$. d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx$.

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ y pasa por el punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule el punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto al plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6. Geometría:

Estudie la posición relativa de la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de los parámetros k y a . Luego, si es posible, diga cuándo r es perpendicular a π .

7. Estadística y Probabilidad:

a) En una famosa biblioteca, el 70% de los libros son novelas, el 40% son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60% de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

b) En un cierto país, el 80% de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de esos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos 1.

8. Estadística y Probabilidad:

a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.

b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

MATEMÁTICAS II

1.

1.a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz pedida. Posto que $\det A = 1$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$. Como B non ten inversa, debe ser $\det B = -b_{12} = 0$, de onde $b_{12} = 0$. Logo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}.$$

- $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$
- $A^{-1}B + A = \begin{pmatrix} -1 & -b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 - b_{22} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Agora de

$$\det(A^{-1}B + A) = 1 - b_{22} = -1,$$

dedúcese que $b_{22} = 2$.

MATEMÁTICAS II

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m-2 & -2 \\ m+1 & m & m-1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m-2 & -2 \\ 0 & 0 & m-2 & -3 \end{array} \right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m-2)z = -3. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{-3}{m-2}, \quad y = -2 - (m-2)z, \quad x = \frac{-my - z}{m+1}.$$

- Se $m = -1$, temos

$$\begin{cases} -y + z = 0, \\ y - 3z = -2, \\ -3z = -3, \end{cases}$$

e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións:

$$[x = \lambda, \quad y = 1, \quad z = 1], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Se $m = 2$, o sistema é incompatible, porque a terceira ecuación queda $0 = -3$.

MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & m & 1 \\ 0 & 1 & m-2 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} m+1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m-2 & -2 \\ m+1 & m & m-1 & -3 \end{pmatrix}, \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} m+1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = m+1$ e $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m-2 \end{vmatrix} = m(m-2) - 1$ non se anulan á vez, é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} m+1 & m & 1 \\ 0 & 1 & m-2 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix} \\ &= (m+1)(m-1) + m(m-2)(m+1) - (m+1) - m(m-2)(m+1) \\ &= (m+1)(m-1) - (m+1) = (m+1)(m-1-1) = (m+1)(m-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow m \in \{-1, 2\}. \end{aligned}$$

Discusión:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso $m = -1$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 2 + 4 + 3 = 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que **o sistema é compatible indeterminado**.
- **Caso $m = 2$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 4 = 3 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

MATEMÁTICAS II

3.

3.a) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$.

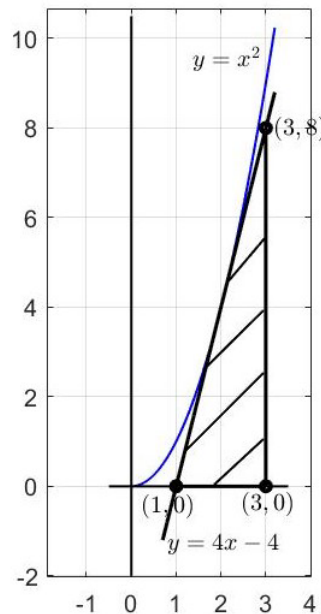
A ecuación da recta tanxente á gráfica de f en $x = 2$ é $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, é dicir, $y - 4 = 4(x - 2)$ ou, equivalentemente,

$$y = 4x - 4.$$

Corte da recta co eixe X : $4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ao ter lonxitude 2 o cateto que está sobre o eixe X , os vértices do triángulo son **A(1, 0)**, **B(3, 0)** e **C(3, 8)**.

A situación é a do debuxo seguinte:



3.b) Hai que achar a e b que fagan que a función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{se } x > 1 \end{cases}$ sexa derivable.

Basta facer o estudo en $x = 1$.

Para ser derivable, a función debe ser continua, polo que os límites laterais $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ teñen que existir e valer $f(1)$. Agora observemos que, por unha banda, $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ e, pola outra, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + bx) = a + b$. En consecuencia, ten que ser $b = 1 - a$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1, \\ ax^2 + (1 - a)x & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1, \\ 2ax + 1 - a & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2ax + 1 - a) = 2a + 1 - a = a + 1,$$

e polo tanto f é derivable se, e só se, $a = -1$ (para que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$) e $b = 1 - a = 2$.

MATEMÁTICAS II

4.

4.a) Facendo o cambio $z = x^2 + 1$ (co cal $dz = 2x \, dx$) vese que

$$\int 2x\sqrt{x^2 + 1} \, dx = \int \sqrt{z} \, dz = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2 + 1)^3} + C.$$

4.b) Facendo o cambio $z = \cos x$ (co cal $dz = -\sin x \, dx$) vese que

$$\int (\sin x) \sin(\cos x) \, dx = - \int \sin z \, dz = \cos z + C = \cos(\cos x) + C.$$

4.c) Integrando por partes coas eleccións

$$\begin{aligned} u &= x^2 & du &= 2x \, dx \\ dv &= \sin x \, dx & v &= -\cos x \end{aligned}$$

chégase a

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx.$$

Aplicando partes de novo coas eleccións

$$\begin{aligned} u &= x & du &= dx \\ dv &= \cos x \, dx & v &= \sin x \end{aligned}$$

tense finalmente que

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x \, dx \right) = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

4.d)

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A - B}{(x-1)(x-2)}.$$

Tense que cumprir que $(A+B)x - 2A - B = 1$, polo que A e B son a solución do sistema

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -2A - B = 1. \end{cases}$$

Sumando as dúas ecuacións vese que

$$-A = 1 \Rightarrow A = -1,$$

conque

$$B = -A = 1.$$

Así pois,

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2},$$

co cal

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + C = \ln \frac{|x-2|}{|x-1|} + C.$$

MATEMÁTICAS II

5. a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que contén á recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ e pasa polo punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule o punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto ao plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

5.a) Ecuación implícita do plano π que contén a $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ e pasa por $P(0,1,0)$:

$Q(-1, -2, -3)$ é un punto de r . O plano pedido pasa por $P(0,1,0)$ e é paralelo ao vector director de r , $\vec{d}_r(3,2,1)$, e ao vector $\overrightarrow{QP}(1,3,3)$, polo que a súa ecuación implícita é

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6x + y - 1 + 9z - 2z - 3x - 9(y-1) = 3x - 8y + 7z + 8.$$

$$\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0.$$

5.b) Punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto a $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

- Ecuacións paramétricas da recta r que pasa por $P(11, -14, 13)$ e é perpendicular a π :

$$\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(3, -8, 7), \text{ co cal } r: \begin{cases} x = 11 + 3\lambda, \\ y = -14 - 8\lambda, \\ z = 13 + 7\lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Corte de r con π :

$$3(11 + 3\lambda) - 8(-14 - 8\lambda) + 7(13 + 7\lambda) + 8 = 33 + 9\lambda + 112 + 64\lambda + 91 + 49\lambda + 8 = 122\lambda + 244 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

Logo o punto de corte é $Q(11 - 6, -14 + 16, 13 - 14) = Q(5, 2, -1)$.

- Punto simétrico pedido: se chamamos $P'(x', y', z')$ ao punto,

$$\begin{aligned} \frac{11 + x'}{2} &= 5 \Leftrightarrow 11 + x' = 10 \Leftrightarrow x' = -1, \\ \frac{-14 + y'}{2} &= 2 \Leftrightarrow -14 + y' = 4 \Leftrightarrow y' = 18, \\ \frac{13 + z'}{2} &= -1 \Leftrightarrow 13 + z' = -2 \Leftrightarrow z' = -15. \end{aligned}$$

Tense logo $P'(-1, 18, -15)$.

MATEMÁTICAS II

6. Posición relativa de r : $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ e π : $ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de k e a :

$\vec{d}_r(1, k, 3)$ é vector director de r , e $\vec{n}_\pi(a, 4, 3a)$ é normal a π .

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = a + 4k + 9a = 10a + 4k = 2(5a + 2k).$$

Se $5a + 2k = 0$, entón $\vec{d}_r$ e $\vec{n}_\pi$ son perpendiculares, conque nese caso ou ben $r \subset \pi$, ou ben $r \parallel \pi$ (entendendo que $r \cap \pi = \emptyset$). Supoñamos $5a + 2k = 0$ e tomemos $P(-1, 1, 0)$, que é un punto de r . É claro que $r \subset \pi$ se, e só se, $P \in \pi$.

$$P \in \pi \Leftrightarrow -a + 4 + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 6.$$

Conclusión:

- Se $a = 6$ e $k = \frac{-5a}{2} = \frac{-30}{2} = -15$, $r \subset \pi$.
- Se $5a + 2k = 0$ e $a \neq 6$, $r \parallel \pi$.
- Se $5a + 2k \neq 0$, r e π córtanse nun punto.

Se é posible, diga cando r é perpendicular a π :

Obsérvese que

$$\vec{d}_r \parallel \vec{n}_\pi \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{k}{4} = \frac{3}{3a} \Leftrightarrow ak = 4,$$

polo que r é perpendicular a π se, e só se, $ak = 4$.

MATEMÁTICAS II

7.

7.a) N = “ser novela”, C = “ser clásico”. Sábese que $P(N) = 0.7$, $P(C) = 0.4$ e $P(N|C) = 0.6$.

	C	$\bar{C}$	
N	$40 \times 0.6 = 24$	46	70
$\bar{N}$	16	14	30
	40	60	100

Segundo a táboa de continxencia,

$$P(\bar{N} \cap C) = \frac{16}{100} = 0.16$$

e

$$P(C|N) = \frac{24}{70} \approx 0.3429.$$

ALTERNATIVA para 7.b):

$$P(N \cap C) = P(N|C)P(C) = 0.6 \times 0.4 = 0.24,$$

$$P(\bar{N} \cap C) = P(C) - P(N \cap C) = 0.4 - 0.24 = 0.16.$$

Por outra banda,

$$P(C|N) = \frac{P(N \cap C)}{P(N)} = \frac{0.24}{0.7} \approx 0.3429.$$

7.b) X = “n.º de delitos que se resolven, de entre os 3”.

$X \rightarrow B(n, p)$, con $n = 3$ e $p = 0.2$. Tense logo $q = 1 - p = 0.8$. Pídese $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} p^0 q^3 = (0.8)^3 = 0.512,$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.512 = 0.488.$$

MATEMÁTICAS II

8.

8.a) $X =$ "n.º de preguntas acertadas, de entre as 60".

$X \rightarrow B(n, p)$, con $n = 60$ e $p = 0.25$. Tense logo $q = 1 - p = 0.75$. Pídese $P(X \geq 16)$.

$np = 15$, $nq = 45$, $npq = 11.25$, $\sqrt{npq} \approx 3.3541$. Como $np > 5$ e $nq > 5$, X pode aproximarse por $\tilde{X} \rightarrow N(15, 3.3541)$.

$$Z = \frac{\tilde{X} - 15}{3.3541} \rightarrow N(0, 1).$$

Aplicando a corrección de Yates ou de medio punto,

$$\begin{aligned} P(X \geq 16) &\approx P(\tilde{X} \geq 15.5) = P\left(Z \geq \frac{15.5 - 15}{3.3541}\right) \approx P(Z \geq 0.15) = 1 - P(Z < 0.15) \\ &\approx 1 - 0.5596 = \mathbf{0.4404}. \end{aligned}$$

8.b) $X \rightarrow N(25, 2)$, conque $Z = \frac{X - 25}{2} \rightarrow N(0, 1)$.

$$\begin{aligned} P(X < 24) &= P\left(Z < \frac{24 - 25}{2}\right) = P(Z < -0.5) = P(Z > 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) \approx 1 - 0.6915 \\ &= \mathbf{0.3085}. \end{aligned}$$

Por outra banda,

$$\begin{aligned} 0.2128 &= P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = P\left(-\frac{\alpha}{2} < Z < \frac{\alpha}{2}\right) = P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - P\left(Z \leq -\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - \{1 - P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right)\} = 2P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - 1, \end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned} 2P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) &= 1.2128, \\ P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) &= 0.6064, \\ \frac{\alpha}{2} &\approx 0.27, \\ \alpha &\approx \mathbf{0.54}. \end{aligned}$$

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira.

1. Números e Álgebra:

Sexa $A = (a_{ij})$ a matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 2, \\ (-1)^j(i-1) & \text{se } i \neq 2. \end{cases}$ Explique se A e $A + I$ son ou non invertibles e calcule as inversas cando existan. (Nota: a_{ij} é o elemento de A que está na fila i e na columna j , e I é a matriz identidade.)

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema
$$\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1. \end{cases}$$

3. Análise:

De entre tódolos rectángulos situados no primeiro cuadrante que teñen dous lados sobre os eixes de coordenadas e un vértice sobre a recta $x + 2y = 4$, determine os vértices do que ten maior área.

4. Análise:

Dada a función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{se } x \leq 0, \\ -x^2 - x - 1 & \text{se } x > 0, \end{cases}$ calcule a área da rexión encerrada pola gráfica de f e as rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

5. Xeometría:

- Obteña a ecuación implícita do plano π que pasa polos puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ e $C(0,0,3)$.
- Calcule o punto simétrico de $P(10, -5, 5)$ con respecto ao plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

6. Xeometría:

- Ache o valor de a se o plano $\pi: ax + y + z = 0$ é paralelo á recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$.
- Estude a posición relativa dos planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ e $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$ en función do parámetro m .

7. Estatística e Probabilidade:

- Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral. Calcule $P(A)$ sabendo que $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ e $P(A \cup B) = 0.8$.
- Diga se os sucesos A e B son ou non independentes, se se sabe que $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ e $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82$.

8. Estatística e Probabilidade:

O portador dunha certa enfermidade ten un 10% de probabilidades de contaxiala a quen non estivo exposto a ela. Se entra en contacto con 8 persoas que non estiveron expostas, calcule:

- A probabilidade de que contaxie a un máximo de 2 persoas.
- A probabilidade de que contaxie a 2 persoas polo menos.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera.

1. Números y Álgebra:

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2, \\ (-1)^j(i-1) & \text{si } i \neq 2. \end{cases}$ Explique si A y $A + I$ son o no invertibles y calcule las inversas cuando existan. (Nota: a_{ij} es el elemento de A que está en la fila i y en la columna j , e I es la matriz identidad.)

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1. \end{cases}$$

3. Análisis:

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x + 2y = 4$, determine los vértices del que tiene mayor área.

4. Análisis:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 0, \\ -x^2 - x - 1 & \text{si } x > 0, \end{cases}$ calcule el área de la región encerrada por la gráfica de f y las rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

5. Geometría:

- Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$.
- Calcule el punto simétrico de $P(10, -5, 5)$ con respecto al plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

6. Geometría:

- Halle el valor de a si el plano $\pi: ax + y + z = 0$ es paralelo a la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$.
- Estudie la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ y $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$ en función del parámetro m .

7. Estadística y Probabilidad:

- Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcule $P(A)$ sabiendo que $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ y $P(A \cup B) = 0.8$.
- Diga si los sucesos A y B son o no independientes, si se sabe que $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82$.

8. Estadística y Probabilidad:

El portador de una cierta enfermedad tiene un 10% de probabilidades de contagiarla a quien no estuvo expuesto a ella. Si entra en contacto con 8 personas que no estuvieron expuestas, calcule:

- La probabilidad de que contagie a un máximo de 2 personas.
- La probabilidad de que contagie a 2 personas por lo menos.

MATEMÁTICAS II

1. $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$. Ao ter unha fila de ceros, a matriz A non ten inversa.

$a_{21} = a_{22} = a_{23} = 1$, $a_{31} = -2$, $a_{32} = 2$ e $a_{33} = -2$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\det(A + I) = -2 - 2 = -4 \neq 0$, polo que a matriz $A + I$ si que ten inversa.

$$(A + I)^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -3/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 1 & m+2 & m+1 & m+1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 0 & m & m+1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 0 & 0 & m-2 & 0 \end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ (m-2)z = 0. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é $z = 0$, $y = \frac{1}{m}$, $x = m - 2y$.

- Se $m = 0$, temos $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 3z = 1, \\ -2z = 0. \end{cases}$

O sistema é incompatible, porque as dúas últimas ecuacións non se poden cumprir á vez.

- Se $m = 2$, temos $\begin{cases} x + 2y = 2, \\ 2y + 3z = 1, \\ 0 = 0. \end{cases}$

O sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións:

$$\left[z = \lambda, \quad y = \frac{1-3\lambda}{2}, \quad x = 2 - (1-3\lambda) = 1 + 3\lambda \right], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}, A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 1 & m+2 & m+1 & m+1 \end{array} \right), \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ m & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

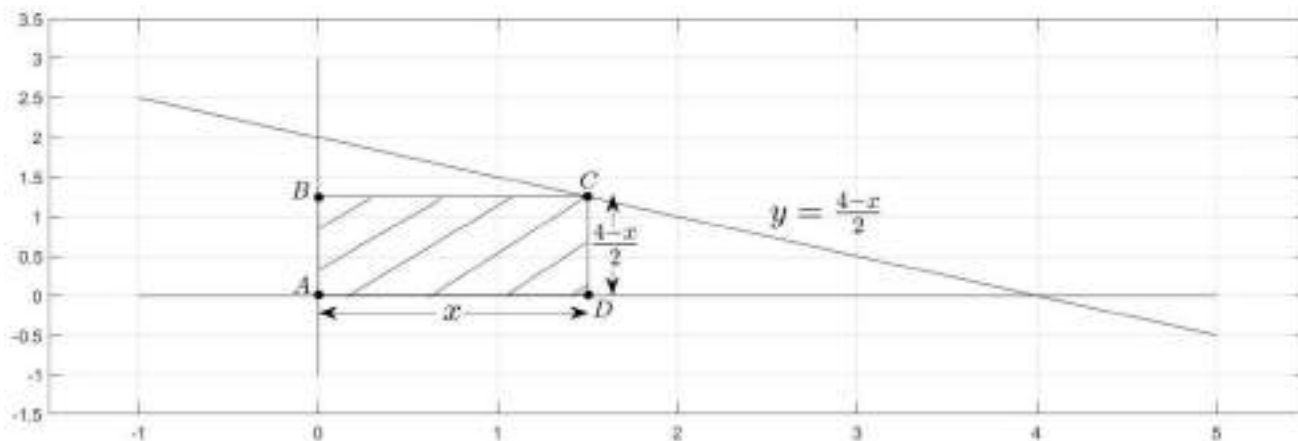
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = m(m+1) + 6 - 3(m+2) = m^2 + m + 6 - 3m - 6 = m^2 - 2m \\ = m(m-2) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0, 2\}.$$

Discusión:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso $m = 0$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que **o sistema é incompatible**.
- **Caso $m = 2$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{array} \right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 - 3 = 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = \text{n.º de incógnitas}$, situación na que **o sistema é compatible indeterminado**.

MATEMÁTICAS II

3.



Corte da recta $x + 2y = 4$ co eixe de abscisas:

$$\begin{aligned}
 x + 2y = 4 &\Leftrightarrow y = \frac{4-x}{2}. \\
 \frac{4-x}{2} = 0 &\Leftrightarrow x = 4.
 \end{aligned}$$

Así pois, hai que achar o máximo de $A(x) = x \left(\frac{4-x}{2} \right)$, $x \in (0,4)$.

$$A(x) = \frac{1}{2}(4x - x^2), \quad A'(x) = \frac{1}{2}(4 - 2x) = 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Hai máximo en $x = 2$ porque $A''(2) = -1 < 0$ (ou porque $y = A(x)$ é a ecuación dunha parábola cóncava con vértice en $x = 2$).

Posto que $\frac{4-2}{2} = 1$, os vértices pedidos son

$$A(0,0), B(0,1), C(2,1), D(2,0).$$

NOTA: como é frecuente facer, neste exercicio sobreentendemos que o vértice que ten que estar sobre a recta $r: x + 2y = 4$ é o C (ver debuxo, arriba), que vai escorregando sobre r . Certamente, tamén se poderían engadir ao estudo os casos nos que

- é o punto $B(0,2)$, fixo, o que está sobre r , e
- é o punto $D(4,0)$, fixo, o que está sobre r ,

e, entón, non hai rectángulo de área máxima. En efecto, consideremos por exemplo o primeiro destes dous casos. Entón, a función pasa a ser $A(x) = 2x$, con $x \in (0, \infty)$ ou, dependendo de interpretacións, $x \in (0, \infty) \setminus \{4\}$. Tanto cun dominio coma co outro, esa función non ten máximo. Esta aproximación ao problema tamén se considerará válida.

MATEMÁTICAS II

4.

$$y = x^2 - x - 1, \quad y' = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, \quad y'' = 2 > 0.$$

Logo $y = x^2 - x - 1$ é unha parábola convexa con vértice en $x = \frac{1}{2}$.

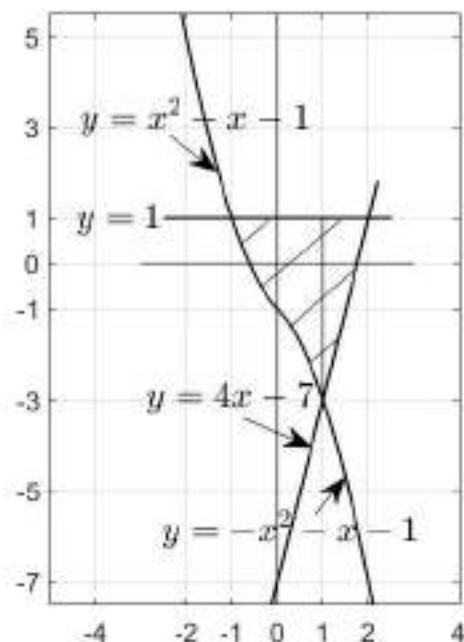
$$y = -x^2 - x - 1, \quad y' = -2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, \quad y'' = -2 < 0.$$

Logo $y = -x^2 - x - 1$ é unha parábola cóncava con vértice en $x = -\frac{1}{2}$.

x	$y = x^2 - x - 1$
0	-1
-1	1
-2	5

x	$y = -x^2 - x - 1$
0	-1
1	-3
2	-7

x	$y = 4x - 7$
0	-7
1	-3
2	1



Como vemos, ao buscar puntos para a representación gráfica xa poden saír os puntos de corte. Se non, procédese como segue.

- Corte de $y = 1$ con $y = x^2 - x - 1$:

$$x^2 - x - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x \in \{-1, 2\}.$$

Só nos interesa $x = -1$.

- Corte de $y = 1$ con $y = 4x - 7$:

$$4x - 7 = 1 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

- Corte de $y = 4x - 7$ con $y = -x^2 - x - 1$:

$$-x^2 - x - 1 = 4x - 7 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x \in \{-6, 1\}.$$

Só nos interesa $x = 1$.

A área pedida é

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 [1 - (x^2 - x - 1)] dx + \int_0^1 [1 - (-x^2 - x - 1)] dx + \left[\text{área dun triángulo} \right] \\ &= \int_{-1}^0 (-x^2 + x + 2) dx + \int_0^1 (x^2 + x + 2) dx + \frac{1 \cdot 4}{2} = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 + 2 = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 \right) + 2 = 6. \end{aligned}$$

MATEMÁTICAS II

5.

5.a) Plano π que pasa por $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ e $C(0,0,3)$:

π pasa por $A(1,0,0)$ e está xerado por $\overrightarrow{AB}(-1,2,0)$ e $\overrightarrow{AC}(-1,0,3)$. Logo $\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6(x-1) + 2z + 3y = 6x + 3y + 2z - 6 \Rightarrow \pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

5.b) Punto simétrico de $P(10, -5, 5)$ con respecto ao plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$:

- Ecuacións paramétricas da recta r que pasa por $P(10, -5, 5)$ e é perpendicular a π :

$$\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(6, 3, 2), \text{ co cal } r: \begin{cases} x = 10 + 6\lambda, \\ y = -5 + 3\lambda, \\ z = 5 + 2\lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Corte de r con π :

$$6(10 + 6\lambda) + 3(-5 + 3\lambda) + 2(5 + 2\lambda) - 6 = 60 + 36\lambda - 15 + 9\lambda + 10 + 4\lambda - 6 = 49\lambda + 49 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

Logo o punto de corte é $Q(10 - 6, -5 - 3, 5 - 2) = Q(4, -8, 3)$.

- Punto simétrico pedido: se chamamos $P'(x', y', z')$ ao punto,

$$\begin{aligned} \frac{10 + x'}{2} &= 4 \Leftrightarrow 10 + x' = 8 \Leftrightarrow x' = -2, \\ \frac{-5 + y'}{2} &= -8 \Leftrightarrow -5 + y' = -16 \Leftrightarrow y' = -11, \\ \frac{5 + z'}{2} &= 3 \Leftrightarrow 5 + z' = 6 \Leftrightarrow z' = 1. \end{aligned}$$

Tense logo $P'(-2, -11, 1)$.

MATEMÁTICAS II

6.

6.a) Como $\pi: ax + y + z = 0$ é paralelo a $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{n}_\pi(a, 1, 1)$ debe ser perpendicular a $\vec{d}_r(1, 1, 1)$:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = a + 1 + 1 = a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2.$$

6.b) Posición relativa dos planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ e $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$.

$$\left[\frac{2}{m-1} = \frac{1}{1} = \frac{m}{3} \right] \Leftrightarrow m = 3.$$

Como non son o mesmo plano cando $m = 3$,

- Se $m = 3$, son paralelos (non coincidentes),
- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, son secantes (córtanse nunha recta).

MATEMÁTICAS II

7.

7.a) $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ e $P(A \cup B) = 0.8$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$0.8 = P(A) + 2P(A) - 0.1 \Leftrightarrow 0.8 = 3P(A) - 0.1 \Leftrightarrow 3P(A) = 0.9 \Leftrightarrow P(A) = 0.3.$$

7.b) $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ e $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82$.

$$0.82 = P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0.82 = 0.18.$$

Como $P(A)P(B) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18 = P(A \cap B)$, os sucesos A e B son independentes.

MATEMÁTICAS II

8. $X =$ “n.º de persoas contaxiadas, de entre as 8”.

$X \rightarrow B(n, p)$, con $n = 8$ e $p = 0.1$ (logo $q = 1 - p = 0.9$).

8.a)

$$\begin{aligned}P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \\&= \binom{8}{0} (0.1)^0 (0.9)^8 + \binom{8}{1} (0.1)^1 (0.9)^7 + \binom{8}{2} (0.1)^2 (0.9)^6 = \\&= (0.9)^8 + 8(0.1)(0.9)^7 + 28(0.1)^2(0.9)^6 = \mathbf{0.9619}.\end{aligned}$$

8.b)

$$\begin{aligned}P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\} = 1 - (0.9)^8 - 8(0.1)(0.9)^7 \\&= \mathbf{0.1869}.\end{aligned}$$

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira.

1. Números e Álgebra:

Despeixe X na ecuación matricial $B(X - I) = A$, onde I é a matriz identidade e A e B son matrices cadradas, con B invertible. Logo, calcule X se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema:
$$\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ mx + (m+1)y + z = 1, \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1. \end{cases}$$

3. Análise:

a) Enuncie o teorema de Bolzano.

b) Obteña os valores de a , b e c que fan que $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$ cumpra $f(0) = 1$ e teña extremos relativos en $x = \pm 1$. Dicar logo se os extremos son máximos ou mínimos.

4. Análise:

a) Enuncie o teorema de Rolle.

b) Calcule a área da rexión encerrada polas gráficas de $f(x) = x + 6$ e $g(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 0, \\ x^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita do plano π con ecuacións paramétricas $\pi: \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

b) Calcule o valor de m para que os seguintes puntos sexan coplanares: $A(0, m, 0)$, $B(0, 2, 2)$, $C(1, 4, 3)$ e $D(2, 0, 2)$. Obteña a ecuación implícita do plano π que os contén.

6. Xeometría:

Calcule o punto simétrico de $P(1, 1, 2)$ con respecto ao plano $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$.

7. Estatística e Probabilidade:

Nunha determinada cidade, o 8% da poboación practica ioga, o 20% ten mascota e o 3% practica ioga e ten mascota. Se nesa cidade se elixe unha persoa ao azar, calcule:

a) A probabilidade de que non practique ioga e á vez teña mascota.

b) A probabilidade de que teña mascota sabendo que practica ioga.

8. Estatística e Probabilidade:

O grosor das pranchas de aceiro que se producen nunha certa fábrica segue unha distribución normal de media 8 mm e desviación típica 0.5 mm. Calcule a probabilidade de que unha prancha elixida ao azar teña un grosor comprendido entre 7.6 mm e 8.2 mm.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera.

1. Números y Álgebra:

Despeje X en la ecuación matricial $B(X - I) = A$, donde I es la matriz identidad y A y B son matrices cuadradas, con B invertible. Luego, calcule X si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ mx + (m+1)y + z = 1, \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1. \end{cases}$$

3. Análisis:

a) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) Obtenga los valores de a , b y c que hacen que $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$ cumpla $f(0) = 1$ y tenga extremos relativos en $x = \pm 1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

4. Análisis:

a) Enuncie el teorema de Rolle.

b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x) = x + 6$ y $g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0, \\ x^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita del plano π con ecuaciones paramétricas $\pi: \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

b) Calcule el valor de m para que los siguientes puntos sean coplanarios: $A(0, m, 0)$, $B(0, 2, 2)$, $C(1, 4, 3)$ y $D(2, 0, 2)$. Obtenga la ecuación implícita del plano π que los contiene.

6. Geometría:

Calcule el punto simétrico de $P(1, 1, 2)$ con respecto al plano $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$.

7. Estadística y Probabilidad:

En una determinada ciudad, el 8% de la población practica yoga, el 20% tiene mascota y el 3% practica yoga y tiene mascota. Si en esa ciudad se elige una persona al azar, calcule:

a) La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.

b) La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

8. Estadística y Probabilidad:

El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0.5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7.6 mm y 8.2 mm.

MATEMÁTICAS II

1.

$$B(X - I) = A \Leftrightarrow X - I = B^{-1}A \Leftrightarrow X = I + B^{-1}A.$$

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$X = I + B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ m & m+1 & 1 & 1 \\ m & m+1 & 2 & m+1 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ 0 & m & 0 & 1-2m \\ 0 & m & 1 & 1-m \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ 0 & m & 0 & 1-2m \\ 0 & 0 & 1 & m \end{array} \right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ my = 1 - 2m, \\ z = m. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = m, \quad y = \frac{1-2m}{m}, \quad x = \frac{2m-y-z}{m}.$$

- Se $m = 0$, o sistema é incompatible, porque a segunda ecuación queda $0 = 1$.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 2m \\ m & m+1 & 1 & 1 \\ m & m+1 & 2 & m+1 \end{pmatrix}, \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m+1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m - 1 = -m$ e $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m+1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - m - 1 = 1 - m$ non se anulan á vez, é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{vmatrix} = 2m^2 + 2m + m + m^2 + m - m^2 - m - 2m - m^2 - m = m^2 = 0 \\ \Leftrightarrow m = 0.$$

Discusión:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = n.$ de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado.

- Caso $m = 0$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 1 - 2 = -1 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible.

MATEMÁTICAS II

3.

3.a)

Teorema de Bolzano:

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$, entón existe polo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

3.b) $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$, $f(0) = 1$, e f ten extremos relativos en $x = \pm 1$.

•

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1.$$

•

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 + 2bx - 3, \\ f'(-1) &= 0 \Leftrightarrow 3a - 2b - 3 = 0, \\ f'(1) &= 0 \Leftrightarrow 3a + 2b - 3 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3a - 2b - 3 = 0 \\ 3a + 2b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 6a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 1,$$

$$3 + 2b - 3 = 0 \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

•

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f''(x) = 6x.$$

$$[f'(-1) = 0, \quad f''(-1) = -6 < 0] \Rightarrow \text{máximo en } x = -1,$$

$$[f'(1) = 0, \quad f''(1) = 6 > 0] \Rightarrow \text{mínimo en } x = 1.$$

MATEMÁTICAS II

4.

4.a)

Teorema de Rolle:

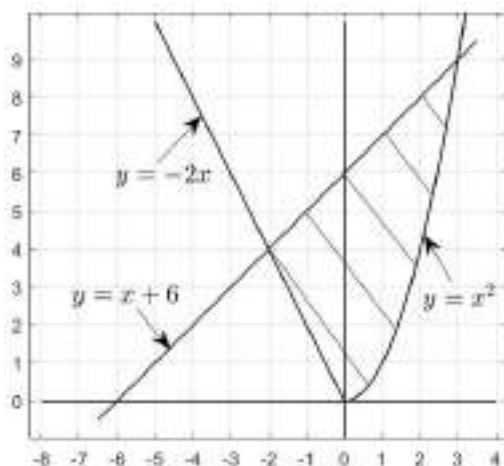
Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) e $f(a) = f(b)$, entón existe polo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

4.b)

- $x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x \in \{-2, 3\}.$

Só nos interesa $x = 3$.

- $-2x = x + 6 \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2.$



$$A = \left[\begin{array}{l} \text{área dun triángulo} \\ \text{de base 6 e altura 2} \end{array} \right] + \int_0^3 (x + 6 - x^2) dx.$$

$$\int_0^3 (-x^2 + x + 6) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_0^3 = -9 + \frac{9}{2} + 18 = \frac{-18 + 9 + 36}{2} = \frac{27}{2}.$$

$$A = 6 + \frac{27}{2} = \frac{12 + 27}{2} = \frac{39}{2} = 19.5.$$

MATEMÁTICAS II

5.

5.a) Ecuación implícita de π : $\begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

π pasa por $P(1,2,1)$ e está xerado por $\vec{u}(-1,0,1)$ e $\vec{v}(0,1,2)$. Logo π : $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -z + 1 - x + 1 + 2y - 4 = -x + 2y - z - 2.$$

$$\pi: -x + 2y - z - 2 = 0.$$

5.b) Valor de m para que $A(0,m,0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,4,3)$ e $D(2,0,2)$ sexan coplanarios. Ecuación implícita do plano π que os contén.

$\overrightarrow{BC}(1,2,1)$ e $\overrightarrow{BD}(2,-2,0)$ son linealmente independentes, polo que os puntos B, C e D determinan o plano que pasa por B e está xerado por $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$. Logo π : $\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2y - 4 - 2z + 4 - 4z + 8 - 2x = 2x + 2y - 6z + 8,$$

de onde $\pi: x + y - 3z + 4 = 0$. Finalmente, $A \in \pi \Leftrightarrow m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

5.b) **SOLUCIÓN ALTERNATIVA:** $\overrightarrow{BA}(0, m-2, -2), \overrightarrow{BC}(1,2,1), \overrightarrow{BD}(2,-2,0)$. Ao ser $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$ linealmente independentes, a condición para ser coplanarios é $\text{rank } M = 2$, sendo $M = (\overrightarrow{BA} | \overrightarrow{BC} | \overrightarrow{BD})$.

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ m-2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6 \neq 0$, é seguro que $\text{rank } M \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } M = 2 \Leftrightarrow \det M = 0]$.

$$\det M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ m-2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 2m - 4 + 8 = 2m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = -4.$$

Por último, habería que calcular a ecuación que contén aos catro puntos, por exemplo como se fixo arriba.

MATEMÁTICAS II

6. Punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto ao plano $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$.

- Ecuacións paramétricas da recta r que pasa por $P(1,1,2)$ e é perpendicular a π :

$$\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(2, -1, 1), \text{ co cal } r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = 1 - \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Corte de r con π :

$$2(1 + 2\lambda) - (1 - \lambda) + 2 + \lambda + 3 = 2 + 4\lambda - 1 + \lambda + 5 + \lambda = 6\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

Logo o punto de corte é $Q(1 - 2, 1 + 1, 2 - 1) = Q(-1, 2, 1)$.

- Punto simétrico pedido: se chamamos $P'(x', y', z')$ ao punto,

$$\frac{1 + x'}{2} = -1 \Leftrightarrow 1 + x' = -2 \Leftrightarrow x' = -3,$$

$$\frac{1 + y'}{2} = 2 \Leftrightarrow 1 + y' = 4 \Leftrightarrow y' = 3,$$

$$\frac{2 + z'}{2} = 1 \Leftrightarrow 2 + z' = 2 \Leftrightarrow z' = 0.$$

Tense logo $P'(-3, 3, 0)$.

MATEMÁTICAS II

7. I = “practicar ioga”, M = “ter mascota”.

$$P(I) = 0.08, \quad P(M) = 0.20, \quad P(I \cap M) = 0.03.$$

	M	$\bar{M}$	
I	$100 \cdot 0.03 = 3$		$100 \cdot 0.08 = 8$
$\bar{I}$	17		
	$100 \cdot 0.20 = 20$		100

7.a) Pola táboa de continxencia:

$$P(\bar{I} \cap M) = \frac{17}{100} = 0.17.$$

7.a) SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$P(M) = P(I \cap M) + P(\bar{I} \cap M) \Leftrightarrow 0.20 = 0.03 + P(\bar{I} \cap M) \Leftrightarrow P(\bar{I} \cap M) = 0.17.$$

7.b) Pola táboa de continxencia:

$$P(M|I) = \frac{3}{8} = 0.375.$$

7.b) SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$P(M|I) = \frac{P(M \cap I)}{P(I)} = \frac{0.03}{0.08} = 0.375.$$

MATEMÁTICAS II

8. X = “grosor en mm dunha prancha de aceiro”.

$$X \rightarrow N(8,0.5) \Rightarrow Z = \frac{X - 8}{0.5} \rightarrow N(0,1).$$

$$\begin{aligned} P(7.6 \leq X \leq 8.2) &= P\left(-\frac{0.4}{0.5} \leq Z \leq \frac{0.2}{0.5}\right) = P(-0.8 \leq Z \leq 0.4) = P(Z \leq 0.4) - P(Z \leq -0.8) \\ &= P(Z \leq 0.4) - P(Z \geq 0.8) = P(Z \leq 0.4) - \{1 - P(Z \leq 0.8)\} = P(Z \leq 0.4) + P(Z \leq 0.8) - 1 = \\ &0.6554 + 0.7881 - 1 = \mathbf{0.4435}. \end{aligned}$$

ÍNDICE:

Páxina 3	CONVOCATORIA ORDINARIA 2020.
Páxina 15	CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA 2020.

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só se corruxirán as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra:

Sexan A e B as dúas matrices que cumpren $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Pídese:

- Calcular $A^2 - B^2$. (Advertencia: neste caso, $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$.)
- Calcular a matriz X que cumpre a igualdade $XA + (A + B)^T = 2I + XB$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e $(A + B)^T$ a trasposta de $A + B$.

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema:
$$\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + z = 0, \\ x + my = 0. \end{cases}$$

3. Análise:

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}}$.

b) Determine os intervalos de crecemento e de decrecemento de $f(x) = x(\ln x - 1)$. Calcule, se existen, os máximos e mínimos relativos da función f .

4. Análise:

a) Calcule os valores de b e c para que a función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 + bx + c & \text{se } x > 0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable en $x = 0$.

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x - 1) dx$.

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa polos puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ e $C(7,1,5)$.

b) Obteña as ecuacións paramétricas da recta r que é perpendicular ao plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ e que pasa polo punto $P(-1, -2, 2)$.

6. Xeometría:

Estude a posición relativa das rectas r e s definidas polas ecuacións $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ e $s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade:

Selecciónanse 250 pacientes para estudar a eficacia dun novo medicamento. A 150 deles adminístraselles o medicamento, mentres que o resto son tratados cun placebo. Sabendo que se curaron o 80% dos que tomaron o medicamento, cal é a probabilidade de que, seleccionado un paciente ao azar, tomase o placebo ou non curase?

8. Estatística e Probabilidade:

Nunha cadea de montaxe, o tempo empregado para realizar un determinado traballo segue unha distribución normal de media 20 minutos e desviación típica 4 minutos. Calcule a probabilidade de que se faga ese traballo nun tempo comprendido entre 16 e 26 minutos.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, solo se corregirán las 5 primeras respondidas.

1. Números y Álgebra:

Sean A y B las dos matrices que cumplen $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

- Calcular $A^2 - B^2$. (Advertencia: en este caso, $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$.)
- Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA + (A + B)^T = 2I + XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A + B)^T$ la traspuesta de $A + B$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + z = 0, \\ x + my = 0. \end{cases}$$

3. Análisis:

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}}$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x) = x(\ln x - 1)$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de la función f .

4. Análisis:

a) Calcule los valores de b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 + bx + c & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable en $x = 0$.

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x - 1)dx$.

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ y $C(7,1,5)$.

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ y que pasa por el punto $P(-1,-2,2)$.

6. Geometría:

Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ y $s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad:

Se seleccionan 250 pacientes para estudiar la eficacia de un nuevo medicamento. A 150 de ellos se les administra el medicamento, mientras que el resto son tratados con un placebo. Sabiendo que se curaron el 80% de los que tomaron el medicamento, ¿cuál es la probabilidad de que, seleccionado un paciente al azar, tomara el placebo o no se curara?

8. Estadística y Probabilidad:

En una cadena de montaje, el tiempo empleado para realizar un determinado trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos y desviación típica 4 minutos. Calcule la probabilidad de que se haga ese trabajo en un tiempo comprendido entre 16 y 26 minutos.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

Só puntúan cinco das oito preguntas.

As puntuacións parciais que seguen están ligadas a un determinado xeito de resolver os exercicios, e pode haber outras formas correctas de solucionarlos.

- 1. Números e Álgebra** (2 puntos)
 - a) 1 punto: 0.25 puntos polo cálculo de A , 0.25 puntos polo cálculo de B e 0.5 puntos polo cálculo de $A^2 - B^2$.
 - b) 1 punto: 0.5 puntos por despxear X e calcular a inversa que naturalmente xurde e 0.5 puntos polo cálculo final de X .
- 2. Números e Álgebra** (2 puntos): 0.5 puntos por chegar a que os valores críticos son $m = \pm 1$ e 0.5 puntos polo estudo de cada un dos tres casos que se presentan.
- 3. Análise** (2 puntos)
 - a) 1 punto: 0.5 puntos por cada unha das dúas veces que se aplica a regra de L'Hôpital.
 - b) 1 punto: 0.5 puntos por determinar os intervalos nos que a derivada ten signo constante e 0.5 puntos por encontrar o mínimo.
- 4. Análise** (2 puntos)
 - a) 1 punto: 0.5 puntos polo estudo da continuidade e 0.5 puntos polo estudo da derivabilidade.
 - b) 1 punto: 0.5 puntos polo cálculo da primitiva e 0.5 puntos polo cálculo do valor da integral definida.
- 5. Xeometría** (2 puntos)
 - a) 1 punto: 0.5 puntos polos elementos que determinan o plano e 0.5 puntos por dar a ecuación pedida.
 - b) 1 punto: 0.5 puntos polos elementos que determinan a recta e 0.5 puntos por dar as ecuacións pedidas.
- 6. Xeometría** (2 puntos): 1 punto pola posición relativa e 1 punto polo punto de corte.
- 7. Estatística e Probabilidade** (2 puntos): se M é “tomar o medicamento” e C é “curarse”, 1 punto por chegar a $P(\overline{M \cap C})$ e 1 punto polo cálculo final.
- 8. Estatística e Probabilidade** (2 puntos): 1 punto por chegar a $P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -1)$ e 1 punto polo resto do exercicio.

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓN

1. Números e Álgebra:

Sexan A e B as dúas matrices que cumpren $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Pídese:

- Calcular $A^2 - B^2$. (Advertencia: neste caso, $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$.)
- Calcular a matriz X que cumpre a igualdade $XA + (A + B)^T = 2I + XB$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e $(A + B)^T$ a trasposta de $A + B$.

Solución:

1.a) Nótese que $2A = A + B + A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, de onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Polo tanto, $B = A + B - A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$, tense finalmente que

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.b) En primeiro lugar, imos despexar X :

$$XA + (A + B)^T = 2I + XB \Leftrightarrow X(A - B) = 2I - (A + B)^T \Leftrightarrow X = [2I - (A + B)^T](A - B)^{-1}.$$

Non hai ningún problema no último paso porque $A - B$ é invertible: $\det(A - B) = 16 \neq 0$.

- Cálculo de $2I - (A + B)^T$: como $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$2I - (A + B)^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Cálculo de $(A - B)^{-1}$: ao ser $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ e $\det(A - B) = 16$,

$$(A - B)^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tras estes cálculos, resulta

$$X = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓN

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema:
$$\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + z = 0, \\ x + my = 0. \end{cases}$$

Solución:

A notación F_i indicará "fila i ". Unha expresión do tipo $F_i + \alpha F_j$ (na que $\alpha \in \mathbb{R}$ e i é maior que j) quererá dicir que no seguinte paso vaise cambiar a fila i da matriz polo resultado da operación $F_i + \alpha F_j$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1, F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ m & 1 & 0 & 2m \\ 0 & m & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - mF_1, F_3 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 2m \\ 0 & m & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - mF_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 2m \\ 0 & 0 & -1 + m^2 & -2m^2 \end{array} \right).$$

Así pois, o sistema que temos que estudar equivale este outro:

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ y - mz = 2m, \\ (-1 + m^2)z = -2m^2, \end{cases}$$

para o que, ao ser triangular, é doado facer a discusión, que queda como segue:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{-2m^2}{-1 + m^2}, \quad y = 2m + mz, \quad x = -z.$$

- Se $m \in \{-1, 1\}$ o sistema é incompatible (non ten solución), porque a terceira ecuación queda $0 = -2$.

Solución alternativa:

Sexan $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array} \right)$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, cúmprese que $2 \leq \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3$ e tamén, conseguintemente, que $\text{rank } A = 2$ se, e só se, $\det A = 0$. Dado que

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m \in \{-1, 1\},$$

a discusión do sistema queda como segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$: $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = n.$ de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado (ten unha única solución).
- Caso $m \in \{-1, 1\}$: $\text{rank } A = 2$. Por outra banda, ao ser $\begin{vmatrix} m & 0 & 2m \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & \pm 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mp 2 \neq 0$, sábese que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible (non ten solución).

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

3. Análise:

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}}$.

b) Determine os intervalos de crecemento e de decrecemento de $f(x) = x(\ln x - 1)$. Calcule, se existen, os máximos e mínimos relativos da función f .

Solución:

3.a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}} \xrightarrow{\text{indeterminación } \frac{0}{0}, \text{ L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x \sin x}{2 - 2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin x}{e^{2x} - 1} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x + \cos^2 x}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}.$$

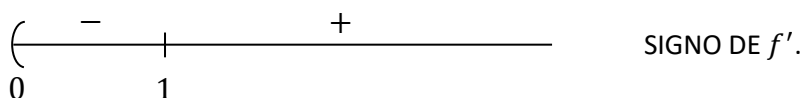
Falando con rigor, o límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x \sin x}{2 - 2e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$ porque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x + \cos^2 x}{2e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$, e, análogamente, o límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$ porque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x \sin x}{2 - 2e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$.

3.b)

$$f(x) = x(\ln x - 1), \text{Dom}(f) = (0, \infty).$$

$$f'(x) = \ln x - 1 + x \frac{1}{x} = \ln x.$$

Vese que f' ten signo negativo en $(0,1)$ e positivo en $(1, \infty)$:



Segundo esta análise, f é estritamente decrecente en $(0,1)$ e estritamente crecente en $(1, \infty)$. Dado que ademais é continua en $(0, \infty)$, conclúese que **ten un mínimo absoluto (logo relativo) en $x = 1$ e que non ten outros extremos.**

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

4. Análise:

- a) Calcule os valores de b e c para que a función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 + bx + c & \text{se } x > 0 \end{cases}$, sexa, primeiro continua, e logo derivable en $x = 0$.
- b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x - 1)dx$.

Solución:

4.a)

- **Continuidade:** nótese que $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{2x} = 1$, e, para calquera valor de $b \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + bx + c = c$. Por conseguinte, f é continua en $x = 0$ se, e soamente se, $(b, c) \in \mathbb{R} \times \{1\}$.
- **Derivabilidade:** posto que f ten que ser continua para poder ser derivable, é obrigado que $c = 1$, e así
$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 + bx + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x} & \text{se } x < 0, \\ 2x + b & \text{se } x > 0. \end{cases}$$
 Como f é continua, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2e^{2x} = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + b) = b$, a función f é derivable en $x = 0$ se, e soamente se, $b = 2$ e $c = 1$.

Solución alternativa para o estudo da derivabilidade (empregando a definición de derivada):

Do mesmo xeito que na solución anterior, chégase a $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 + bx + 1 & \text{se } x > 0, \end{cases}$ xa que c ten que valer 1. Agora, como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{x} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} 2e^{2x} = 2$ (o asterisco $*$ indica o uso da regra de L'Hôpital) e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + bx + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + b) = b$, conclúese que a función f é derivable en $x = 0$ se, e soamente se, $b = 2$ e $c = 1$.

4.b) Aplicando a fórmula de integración por partes con

$$u = \ln x - 1, \quad du = \frac{1}{x} dx,$$

$$dv = x dx, \quad v = \frac{1}{2} x^2,$$

obtense

$$\begin{aligned} \int x(\ln x - 1)dx &= \frac{1}{2} x^2 (\ln x - 1) - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 (\ln x - 1) - \frac{1}{4} x^2 + C = \frac{1}{2} x^2 \left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} x^2 \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) + C, \end{aligned}$$

e polo tanto

$$\int_1^2 x(\ln x - 1)dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) \right]_1^2 = 2 \left(\ln 2 - \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right) = 2 \ln 2 - 3 + \frac{3}{4} = \ln 4 - \frac{9}{4} \approx -0.8637.$$

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓN

5. Xeometría:

- a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa polos puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ e $C(7,1,5)$.
b) Obteña as ecuacións paramétricas da recta r que é perpendicular ao plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ e que pasa polo punto $P(-1, -2, 2)$.

Solución:

5.a) Se π é o plano pedido, π pasa por $A(3,0,-1)$ e está xerado por $\overrightarrow{AB}(1,1,2)$ e $\overrightarrow{AC}(4,1,6)$, co cal

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Posto que $\begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6x - 18 + 8y + z + 1 - 4z - 4 - 2x + 6 - 6y = 4x + 2y - 3z - 15$, a ecuación implícita do plano é $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$.

5.b) O vector normal ao plano π é un vector director de r : $\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(4,2,-3)$. Obtéñense así as seguintes ecuacións paramétricas de r :

$$r: \begin{cases} x = -1 + 4\lambda, \\ y = -2 + 2\lambda, \\ z = 2 - 3\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

6. Xeometría:

Estude a posición relativa das rectas r e s definidas polas ecuacións $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ e $s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

Solución:

$\vec{d}_r(2, -1, -2)$ e $\vec{d}_s(1, 4, 3)$ son vectores directores de r e s , respectivamente. Como $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{4}$, r e s non son paralelas nin coincidentes. Consecuentemente, ou ben se cruzan, ou ben se cortan. Pódese discernir cal das dúas situacións se dá a partir das ecuacións paramétricas. En efecto, ao ser

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = -1 - 2\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad s: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -3 + 4\mu, \\ z = -2 + 3\mu, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R},$$

as rectas r e s cortaranse se, e só se, o sistema lineal $\begin{cases} 3 + 2\lambda = \mu, \\ -\lambda = -3 + 4\mu, \end{cases}$ ten solución única e ademais esa solución satisfai tamén a igualdade $-1 - 2\lambda = -2 + 3\mu$.

$$\begin{cases} 3 + 2\lambda = \mu \\ -\lambda = -3 + 4\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu = -3 \\ -\lambda - 4\mu = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu = -3 \\ -2\lambda - 8\mu = -6 \end{cases}.$$

Sumando as dúas últimas ecuacións obtemos $-9\mu = -9$, de onde $\mu = 1$, o que implica $\lambda = 3 - 4\mu = -1$. Como ademais $-1 - 2\lambda = -2 + 3\mu = 1$, conclúese que **r e s córtanse no punto $P(3 + 2\lambda, -\lambda, -1 - 2\lambda) = P(1, 1, 1)$.**

Solución alternativa:

$\vec{d}_r(2, -1, -2)$ e $\vec{d}_s(1, 4, 3)$ son vectores directores de r e s , respectivamente. Como $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{4}$, r e s non son paralelas nin coincidentes. Consecuentemente, ou ben se cruzan, ou ben se cortan.

$$P(3, 0, -1) \in r, \quad Q(0, -3, -2) \in s, \quad \overrightarrow{PQ}(-3, -3, -1).$$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 9 + 6 - 24 + 18 - 1 = 0$, de xeito que $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ e $\overrightarrow{PQ}$ son coplanares e polo tanto as rectas **r e s córtanse.**

Para calcular o punto de corte, téñense en conta as ecuacións paramétricas

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = -1 - 2\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad s: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -3 + 4\mu, \\ z = -2 + 3\mu, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R},$$

e se resolve o sistema lineal $\begin{cases} 3 + 2\lambda = \mu, \\ -\lambda = -3 + 4\mu. \end{cases}$ Basta ver que $\mu = 1$, por exemplo como se fixo arriba (non é necesario calcular λ), de onde se infire que **o punto de corte é $P(\mu, -3 + 4\mu, -2 + 3\mu) = P(1, 1, 1)$.**

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓN

7. Estatística e Probabilidade:

Seleccionáanse 250 pacientes para estudar a eficacia dun novo medicamento. A 150 deles adminístraselles o medicamento, mentres que o resto son tratados cun placebo. Sabendo que se curaron o 80% dos que tomaron o medicamento, cal é a probabilidade de que, seleccionado un paciente ao azar, tomase o placebo ou non curase?

Solución:

Se M = “tomar o medicamento” e C = “curarse”, tense a seguinte táboa de continxencia:

	M	$\bar{M}$	
C	$150 \times 0.8 = 120$		
$\bar{C}$	30		
	150	100	250

A probabilidade pedida é $P(\bar{M} \cup \bar{C}) = \frac{100+30}{250} = \frac{130}{250} = \frac{13}{25} = 0.52$.

Solución alternativa:

Se M = “tomar o medicamento” e C = “curarse”, sábese que $P(M) = \frac{150}{250} = \frac{3}{5}$ e que $P(C|M) = 0.8 = \frac{4}{5}$. Sábese tamén que $P(C|M) = \frac{P(M \cap C)}{P(M)}$ e que, en virtude dunha das leis de De Morgan, $\bar{M} \cup \bar{C} = \overline{M \cap C}$. Así pois, a probabilidade pedida é

$$P(\bar{M} \cup \bar{C}) = P(\overline{M \cap C}) = 1 - P(M \cap C) = 1 - P(M)P(C|M) = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25} = 0.52.$$

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓN

8. Estatística e Probabilidade:

Nunha cadea de montaxe, o tempo empregado para realizar un determinado traballo segue unha distribución normal de media 20 minutos e desviación típica 4 minutos. Calcule a probabilidade de que se faga ese traballo nun tempo comprendido entre 16 e 26 minutos.

Solución:

Sexa X = “tempo, en minutos, empregado para realizar o traballo”.

$$X \rightarrow N(20,4) \Rightarrow Z = \frac{X - 20}{4} \rightarrow N(0,1).$$

Logo

$$P(16 \leq X \leq 26) = P\left(-\frac{4}{4} \leq Z \leq \frac{6}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1.5) = P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -1).$$

Como $P(Z \leq 1.5) \approx 0.9332$ e $P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587$, a probabilidade pedida é

$$P(16 \leq X \leq 26) \approx 0.9332 - 0.1587 = 0.7745.$$

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só se corruxirán as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra:

Para a ecuación matricial $A^2X + AB = B$, pídese:

a) Despegar X supoñendo que A (e por tanto A^2) é invertible, e dicir cales serían as dimensións de X e de B se A tivese dimensión 4×4 e B tivese 3 columnas.

b) Resolvela no caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema:
$$\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m, \\ (m+3)x + my = 3m+6. \end{cases}$$

3. Análise:

Determine os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} \frac{a-\cos x}{x} & \text{se } x < 0, \\ bx & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable.

4. Análise:

a) Calcule a área da rexión encerrada polo eixe X e a gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & \text{se } x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1} dx$.

5. Xeometría:

Sexan r a recta de vector director $\vec{d}_r(1,0,3)$ que pasa por $P(1,0,0)$ e $\pi: -2x + y + z = 0$. Pídese a posición relativa de r e π . En caso de que se corten, achar o punto de corte.

6. Xeometría:

a) Calcule k sabendo que os vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ e $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obteña a ecuación implícita do plano π que pasa por $P(1,0,0)$ e contén a $r: x-1 = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{3}$.

7. Estatística e Probabilidade:

O 57% dos estudantes matriculados na Universidade de Cambridge son naturais do Reino Unido e, de entre todos eses, o 83% aproban con honores. Ademais, a porcentaxe global de aprobados con honores é do 80%. Calcular a probabilidade de que un estudante elixido ao azar non nacece no Reino Unido sabendo que aprobou con honores.

8. Estatística e Probabilidade:

a) Nunha determinada poboación de árbores, o 20% teñen máis de 30 anos. Se se elixen 40 árbores ao azar, calcule a probabilidade de que soamente 4 deles teñan máis de 30 anos. O número total de árbores é tan grande que se pode asumir elección con substitución.

b) Se X segue unha distribución normal de media 15 e $P(X \leq 18) = 0.6915$, cal é a desviación típica?

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, solo se corregirán las 5 primeras respondidas.

1. Números y Álgebra:

Para la ecuación matricial $A^2X + AB = B$, se pide:

a) Despejar X suponiendo que A (y por tanto A^2) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de X y de B si A tuviera dimensión 4×4 y B tuviera 3 columnas.

b) Resolverla en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m, \\ (m+3)x + my = 3m+6. \end{cases}$$

3. Análisis:

Determine los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{a-\cos x}{x} & \text{si } x < 0, \\ bx & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable.

4. Análisis:

a) Calcule el área de la región encerrada por el eje X y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & \text{si } x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1} dx$.

5. Geometría:

Sean r la recta de vector director $\vec{d}_r(1,0,3)$ que pasa por $P(1,0,0)$ y $\pi: -2x + y + z = 0$. Se pide la posición relativa de r y π . En caso de que se corten, hallar el punto de corte.

6. Geometría:

a) Calcule k sabiendo que los vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ y $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por $P(1,0,0)$ y contiene a $r: x-1 = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{3}$.

7. Estadística y Probabilidad:

El 57% de los estudiantes matriculados en la Universidad de Cambridge son naturales del Reino Unido y, de entre todos esos, el 83% aprueban con honores. Además, el porcentaje global de aprobados con honores es del 80%. Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no haya nacido en el Reino Unido sabiendo que aprobó con honores.

8. Estadística y Probabilidad:

a) En una determinada población de árboles, el 20% tienen más de 30 años. Si se eligen 40 árboles al azar, calcule la probabilidad de que solamente 4 de ellos tengan más de 30 años. El número total de árboles es tan grande que se puede asumir elección con reemplazo.

b) Si X sigue una distribución normal de media 15 y $P(X \leq 18) = 0.6915$, ¿cuál es la desviación típica?

MATEMÁTICAS II CRITERIOS DE AVALIACIÓN

Só puntúan cinco das oito preguntas.

As puntuacións parciais que seguen están ligadas a un determinado xeito de resolver os exercicios, e pode haber outras formas correctas de solucionarlos.

- 1. Números e Álgebra** (2 puntos)
 - a) 1 punto: 0.5 puntos por despexar X e 0.5 puntos polas dimensións.
 - b) 1 punto: 0.5 puntos por cálculos previos e 0.5 puntos pola obtención de X aplicando a fórmula obtida no apartado anterior.
- 2. Números e Álgebra** (2 puntos): 0.5 puntos por cada un dos catro casos que se presentan.
- 3. Análise** (2 puntos): 1 punto pola continuidade e 1 punto pola derivabilidade.
- 4. Análise** (2 puntos)
 - a) 1 punto: 0.5 puntos pola formulación do problema e 0.5 puntos por chegar ao resultado.
 - b) 1 punto.
- 5. Xeometría** (2 puntos): 1 punto pola posición relativa e 1 punto polo punto de corte.
- 6. Xeometría** (2 puntos)
 - a) 1 punto.
 - b) 1 punto: 0.5 puntos polos elementos que determinan o plano e 0.5 puntos pola ecuación.
- 7. Estatística e Probabilidade** (2 puntos): 1 punto pola táboa de continxencia e 1 punto polo cálculo da probabilidade.
- 8. Estatística e Probabilidade** (2 puntos)
 - a) 1 punto.
 - b) 1 punto: 0.5 puntos por chegar a $P\left(Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.6915$ e 0.5 puntos pola determinación de σ .

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓN

1. Números e Álgebra:

Para a ecuación matricial $A^2X + AB = B$, pídese:

a) Despejar X supoñendo que A (e por tanto A^2) é invertible, e dicir cales serían as dimensións de X e de B se A tivese dimensión 4×4 e B tivese 3 columnas.

b) Resolvela no caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Solución:

1.a) En primeiro lugar, despéxase X :

$$A^2X + AB = B \Leftrightarrow A^2X = B - AB \Leftrightarrow X = (A^2)^{-1}(B - AB).$$

É certo tamén que $X = (A^{-1})^2(B - AB)$, xa que $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

Analízanse agora as dimensións: do esquema

$$\underbrace{A^2}_{4 \times 4} \underbrace{X}_{p \times q} + \underbrace{A}_{4 \times 4} \underbrace{B}_{r \times 3} = \underbrace{B}_{r \times 3}$$

dedúcese que $p = r = 4$ e que $q = 3$, conque X e B deben ter dimensión 4×3 .

1.b)

- **Cálculo de $(A^2)^{-1}$:** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $\det A^2 = 10 - 9 = 1$.

$$\text{Logo } (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Cálculo de $B - AB$:** $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix}$, de onde

$$B - AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

- **Cálculo de X :**

$$X = (A^2)^{-1}(B - AB) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓN**

Solución alternativa a 1.b):

Dado que $B = -A$, tense $X = (A^2)^{-1}(B - AB) = (A^2)^{-1}(-A + A^2) = -A^{-1} + I$. Agora, como $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1$, a inversa de A vén dada por $A^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, e entón

$$X = -A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓN

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema:
$$\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m, \\ (m+3)x + my = 3m+6. \end{cases}$$

Solución:

A notación F_i indicará "fila i ". Unha expresión do tipo $F_i + \alpha F_j$ (na que $\alpha \in \mathbb{R}$ e i é maior que j) quererá dicir que no seguinte paso vaise cambiar a fila i da matriz polo resultado da operación $F_i + \alpha F_j$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} m+3 & -m^2 & 3m \\ m+3 & m & 3m+6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} m+3 & -m^2 & 3m \\ 0 & m^2+m & 6 \end{array} \right).$$

Así pois, o sistema que temos que estudar equivale este outro:

$$\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m, \\ (m^2+m)y = 6, \end{cases}$$

para o que, ao ser triangular, é doado facer a discusión. Hai que notar que $m^2 + m = m(m+1) = 0$ se, e só se, $m \in \{-1, 0\}$ e que $m+3 = 0$ se, e só se, $m = -3$. Consequentemente:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$y = \frac{6}{m^2+m}, \quad x = \frac{3m+m^2y}{m+3}.$$

- Se $m = -3$, o sistema triangular redúcese a $\begin{cases} -9y = -9, \\ 6y = 6, \end{cases}$ e é por tanto compatible indeterminado (ten infinitas solucións), porque calquera par $\begin{cases} x = \lambda, \\ y = 1, \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, é solución.
- Se $m \in \{-1, 0\}$ o sistema é incompatible (non ten solución), porque a segunda ecuación queda $0 = 6$.

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓN

Solución alternativa:

Sexan $A = \begin{pmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{pmatrix}$ e $A^* = \begin{pmatrix} m+3 & -m^2 & 3m \\ m+3 & m & 3m+6 \end{pmatrix}$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $m+3$ e m non se anulan á vez, cúmprese que $1 \leq \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 2$ e tamén, conseguintemente, que $\text{rank } A = 1$ se, e só se, $\det A = 0$. Dado que

$$\det A = \begin{vmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{vmatrix} = m^2 + 3m + m^3 + 3m^2 = m^3 + 4m^2 + 3m = m(m^2 + 4m + 3) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow m \in \{-3, -1, 0\},$$

a discusión do sistema queda como segue:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 2 = n.$ de incógnitas, polo que **o sistema é compatible determinado (ten unha única solución).**
- **Caso $m = -3$:** $\text{rank } A = 1$ e $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -9 & -9 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, co cal tamén $\text{rank } A^* = 1$. Ao ser $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 1 < n.$ de incógnitas, **o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).**
- **Caso $m = -1$:** $\text{rank } A = 1$ e $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, sábese que $\text{rank } A^* = 2 > \text{rank } A$, situación na que **o sistema é incompatible (non ten solución).**
- **Caso $m = 0$:** $\text{rank } A = 1$ e $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$, sábese que $\text{rank } A^* = 2 > \text{rank } A$, situación na que, de novo, **o sistema é incompatible (non ten solución).**

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓN

3. Análise:

Determine os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} \frac{a-\cos x}{x} & \text{se } x < 0, \\ bx & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable.

Solución:

A función f é derivable, e por tanto continua, en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ para valores calquera de a e b ; só hai que facer entón o estudo no punto $x = 0$. Debido a que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a-\cos x}{x}$ non é finito cando $a \neq 1$, f non pode ser continua neses casos. Fixemos pois $a = 1$ e consideremos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{se } x < 0, \\ bx & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- Continuidade: nótese que $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = 0$ (onde se usou a regra de L'Hôpital), e, para calquera valor de $b \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} bx = 0$. Por conseguinte, f é continua en $x = 0$ se, e soamente se, $(a, b) \in \{1\} \times \mathbb{R}$.
- Derivabilidade: séguese a asumir que $a = 1$, co cal f é continua (se non é continua, non pode ser derivable). Temos polo tanto que

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x^2} & \text{se } x < 0, \\ b & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Como f é continua, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x + x \cos x - \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ (onde se usou a regra de L'Hôpital) e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} b = b$, a función f é derivable en $x = 0$ se, e soamente se, $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$.

Solución alternativa para o estudo da derivabilidade (empregando a definición de derivada):

Sabemos que $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{se } x < 0, \\ bx & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$ xa que a ten que valer 1. Agora, como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ (onde se usou dúas veces a regra de L'Hôpital) e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{bx}{x} = b$, conclúese que a función f é derivable en $x = 0$ se, e soamente se, $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$.

MATEMÁTICAS II

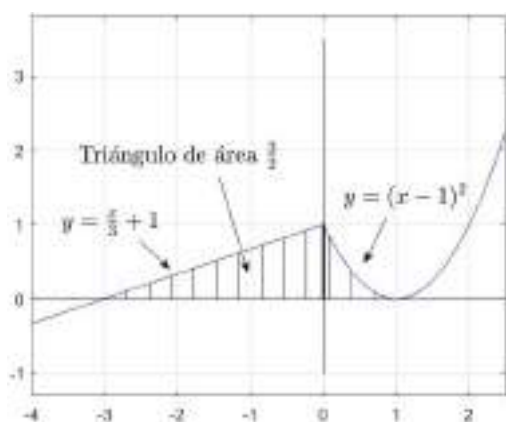
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

4. Análise:

- a) Calcule a área da rexión encerrada polo eixe X e a gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & \text{se } x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$
- b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1} dx$.

Solución:

4.a)



Tendo en conta que $y = \frac{x}{3} + 1$ é a recta que pasa por $(-3,0)$ e por $(0,1)$ e que $y = (x-1)^2$ é a parábola de vértice $(1,0)$ que pasa polos puntos $(0,1)$ e $(2,1)$, chégase ao debuxo da esquerda, onde está raiada a rexión cuxa área se pide.

Agora é claro que esa área virá dada por

$$A = \frac{3}{2} + \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{3}{2} + \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{9+2}{6} = \frac{11}{6} u^2 = 1.8\bar{3} u^2,$$

onde u indica “unidade de lonxitude”.

4.b) Mediante o cambio de variable

$$z = x^2 - 1, \quad dz = 2x dx,$$

obtense

$$\int x\sqrt{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{z} dz = \frac{1}{2} \frac{z^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{z^3} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2-1)^3} + C.$$

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓN

5. Xeometría:

Sexan r a recta de vector director $\vec{d}_r(1,0,3)$ que pasa por $P(1,0,0)$ e $\pi: -2x + y + z = 0$. Pídese a posición relativa de r e π . En caso de que se corten, achar o punto de corte.

Solución:

O vector $\vec{n}_\pi(-2,1,1)$ é normal ao plano π . Como $\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = -2 + 3 = 1 \neq 0$, os vectores $\vec{d}_r$ e $\vec{n}_\pi$ non son perpendiculares, e polo tanto **r e π córtanse nun punto.**

As ecuacións paramétricas de r son

$$r: \begin{cases} x=1+\lambda, \\ y=0, \\ z=3\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Substituíndo na ecuación do plano obtense o valor de λ que proporcionará o punto de corte:

$$-2(1+\lambda) + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow -2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

Téñense así os valores seguintes:

$$\begin{aligned} x &= 1 + \lambda = 3, \\ y &= 0, \\ z &= 3\lambda = 6, \end{aligned}$$

é dicir, **r e π córtanse no punto $Q(3,0,6)$.**

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓN

6. Xeometría:

a) Calcule k sabendo que os vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ e $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obteña a ecuación implícita do plano π que pasa por $P(1,0,0)$ e contén a $r: x-1 = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{3}$.

Solución:

6.a) Ao ser coplanarios, son linealmente dependentes, de xeito que o valor de k pode ser calculado como segue:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

6.b) $Q(1,0,-1) \in r$ e $\vec{d}_r(1,-4,3)$ é vector director de r . O plano π pasa por $P(1,0,0)$ e está xerado por $\vec{d}_r(1,-4,3)$ e $\overrightarrow{PQ}(0,0,-1)$, é dicir,

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi: 4x - 4 + y = 0 \Leftrightarrow \pi: 4x + y - 4 = 0.$$

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓN

7. Estatística e Probabilidade:

O 57% dos estudantes matriculados na Universidade de Cambridge son naturais do Reino Unido e, de entre todos eses, o 83% aproban con honores. Ademais, a porcentaxe global de aprobados con honores é do 80%. Calcular a probabilidade de que un estudante elixido ao azar non nacesse no Reino Unido sabendo que aprobou con honores.

Solución:

Se RU = “ser natural do Reino Unido” e AH = “aprobar con honores”, tense a seguinte táboa de continxencia:

	AH	$\overline{AH}$	
RU	$57 \times 0.83 = 47.31$		$100 \times 0.57 = 57$
$\overline{RU}$	32.69		
	$100 \times 0.80 = 80$		100

A probabilidade pedida é polo tanto $P(\overline{RU}|AH) = \frac{32.69}{80} = 0.408625$.

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓN

8. Estatística e Probabilidade:

a) Nunha determinada poboación de árbores, o 20% teñen máis de 30 anos. Se se elixen 40 árbores ao azar, calcule a probabilidade de que soamente 4 deles teñan máis de 30 anos. O número total de árbores é tan grande que se pode asumir elección con substitución.

b) Se X segue unha distribución normal de media 15 e $P(X \leq 18) = 0.6915$, cal é a desviación típica?

Solución:

Sexa X = “número de árbores de máis de 30 anos, de entre os 40”.

$$X \rightarrow B(n, p), \text{ con } n = 40 \text{ e } p = 0.2.$$

Logo $q = 1 - p = 0.8$, co que a probabilidade pedida é

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= \binom{40}{4} p^4 q^{36} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (0.2)^4 (0.8)^{36} = 10 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot (0.2)^4 (0.8)^{36} \\ &= 91300 \cdot (0.2)^4 (0.8)^{36} \approx 0.0475. \end{aligned}$$

8.b)

$$X \rightarrow N(15, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X - 15}{\sigma} \rightarrow N(0,1).$$

Polo tanto,

$$P(X \leq 18) = 0.6915 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{18 - 15}{\sigma}\right) = 0.6915 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.6915.$$

Indo agora á táboa da distribución $N(0,1)$, vese que $\frac{3}{\sigma} \approx 0.5$, de onde $\sigma \approx \frac{3}{0.5} = 6$.

MATEMÁTICAS II

(O/A estudante debe responder soamente as preguntas dunha das opcións. A puntuación máxima por preguntas é a seguinte: 1.ª pregunta: **2 puntos**; 2.ª pregunta: **3 puntos**; 3.ª pregunta: **3 puntos**; 4.ª pregunta: **2 puntos**).

OPCIÓN A

- Dá resposta aos apartados seguintes:
 - Supoñendo que A e X son matrices cadradas e que $A + I$ é invertible, despega X na ecuación $A - X = AX$.
 - Se $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula X tal que $A - X = AX$.
- Dá resposta aos apartados seguintes:
 - Mediante integración por partes, demostra que $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C$. Logo, demostra a mesma igualdade mediante derivación.
 - Se $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x \in (0, e], \\ ax + b & \text{se } x \in (e, \infty), \end{cases}$ di que relación ten que existir entre os parámetros a e b para que f sexa continua e cales teñen que ser os seus valores para que f sexa derivable.
 - Calcula a área da rexión encerrada polo eixe X , a recta $x = 4$ e a gráfica de $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x \in (0, e], \\ \frac{x}{e} & \text{se } x \in (e, \infty). \end{cases}$
- Pídese:
 - Calcular o ángulo do intervalo $[0^\circ, 90^\circ]$ que forman os vectores $\vec{u} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ e $\vec{v} \left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.
 - Obter a ecuación implícita do plano que pasa polo punto $P(1, -3, 0)$ e é perpendicular á recta $\begin{cases} x - y + 2z = 1, \\ y - z = 0. \end{cases}$
 - Calcular a distancia do punto $Q(1, 1, 1)$ ao plano $\pi: -x + y + z + 4 = 0$ e o punto simétrico de Q respecto a π .
- Dá resposta aos apartados seguintes:
 - O 40% dos habitantes dunha certa comarca teñen camelias, o 35% teñen rosas e o 21% teñen camelias e rosas. Se se elixe ao azar a un habitante desa comarca, calcular as cinco probabilidades seguintes: de que teña camelias ou rosas; de que non teña nin camelias nin rosas; de que teña camelias, sabendo que ten rosas; de que teña rosas, sabendo que ten camelias; e de que soamente teña rosas ou soamente teña camelias.
 - Se nun auditorio hai 50 persoas, cal é a probabilidade de que polo menos 2 teñan nacido no mes de xaneiro?

OPCIÓN B

- Dá resposta aos apartados seguintes:
 - Discute, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema:
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ my + (3 - m)z = -6, \\ 2x - y + mz = 6. \end{cases}$$
 - Resólveo, se é posible, nos casos $m = 0$ e $m = 4$.
- Considérese a función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Pídese:
 - Calcular os límites $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - Determinar intervalos de crecemento e de decrecemento, extremos relativos e puntos de inflexión.
 - Calcular $\int f(x) dx$.
- Dá resposta aos apartados seguintes:
 - Estuda a posición relativa dos planos $\pi_1: mx - y + 2 = 0$ e $\pi_2: 2x + 3y = 0$ en función do parámetro m .
 - Obtén a ecuación implícita do plano que pasa polos puntos $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 1)$ e $C(0, 1, 0)$.
 - Calcula o punto simétrico do punto $P(1, 2, 3)$ con respecto ao plano $\pi: -x + z = 0$.
- Dá resposta aos apartados seguintes:
 - Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral. Calcula $P(A)$ se $P(B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ e $P(A \cup B)$ é o triplo de $P(A)$.
 - Nun determinado lugar, a temperatura máxima durante o mes de xullo segue unha distribución normal de media 25°C e desviación típica 4°C . Calcula a probabilidade de que a temperatura máxima dun certo día estea comprendida entre 21°C e 27.2°C . En cantos días do mes se espera que a temperatura máxima permaneza dentro dese rango?

MATEMÁTICAS II

(El/La estudiante debe responder solamente las preguntas de una de las opciones. La puntuación máxima por preguntas es la siguiente: 1.ª pregunta: 2 puntos; 2.ª pregunta: 3 puntos; 3.ª pregunta: 3 puntos; 4.ª pregunta: 2 puntos).

OPCIÓN A

- Da respuesta a los apartados siguientes:
 - Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que $A + I$ es invertible, despeja X en la ecuación $A - X = AX$.
 - Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula X tal que $A - X = AX$.
- Da respuesta a los apartados siguientes:
 - Mediante integración por partes, demuestra que $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C$. Luego, demuestra la misma igualdad mediante derivación.
 - Si $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in (0, e], \\ ax + b & \text{si } x \in (e, \infty), \end{cases}$ di qué relación tiene que existir entre los parámetros a y b para que f sea continua y cuáles tienen que ser sus valores para que f sea derivable.
 - Calcula el área de la región encerrada por el eje X , la recta $x = 4$ y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in (0, e], \\ \frac{x}{e} & \text{si } x \in (e, \infty). \end{cases}$
- Se pide:
 - Calcular el ángulo del intervalo $[0^\circ, 90^\circ]$ que forman los vectores $\vec{u} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ y $\vec{v} \left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.
 - Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(1, -3, 0)$ y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x - y + 2z = 1, \\ y - z = 0. \end{cases}$
 - Calcular la distancia del punto $Q(1, 1, 1)$ al plano $\pi: -x + y + z + 4 = 0$ y el punto simétrico de Q respecto a π .
- Da respuesta a los apartados siguientes:
 - El 40% de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35% tienen rosas y el 21% tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcular las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.
 - Si en un auditorio hay 50 personas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 hayan nacido en el mes de enero?

OPCIÓN B

- Da respuesta a los apartados siguientes:
 - Discute, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ my + (3-m)z = -6, \\ 2x - y + mz = 6. \end{cases}$$
 - Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 4$.
- Considérese la función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Se pide:
 - Calcular los límites $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.
 - Calcular $\int f(x) dx$.
- Da respuesta a los apartados siguientes:
 - Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1: mx - y + 2 = 0$ y $\pi_2: 2x + 3y = 0$ en función del parámetro m .
 - Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(0, 1, 0)$.
 - Calcula el punto simétrico del punto $P(1, 2, 3)$ con respecto al plano $\pi: -x + z = 0$.
- Da respuesta a los apartados siguientes:
 - Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcula $P(A)$ si $P(B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ y $P(A \cup B)$ es el triple de $P(A)$.
 - En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media 25°C y desviación típica 4°C . Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día esté comprendida entre 21°C y 27.2°C . ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

ABAU
CONVOCATORIA DE XUÑO
Ano 2019
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

OPCIÓN A

1) a) 1 punto.

b) 1 punto.

2) a) 1 punto.

- 0,5 puntos pola integración por partes.
- 0,5 puntos pola comprobación mediante derivación.

b) 1 punto.

- 0,5 puntos pola condición de continuidade.
- 0,5 puntos pola condición de derivabilidade.

c) 1 punto.

- 0,25 puntos pola xustificación dos límites de integración.
- 0,5 puntos pola escritura da área como suma de integrais e obtención das primitivas.
- 0,25 puntos polo uso da regra de Barrow.

3) a) 1 punto.

b) 1 punto.

c) 1 punto.

4) a) 1 punto.

b) 1 punto.

OPCIÓN B

1) a) 1.25 puntos.

b) 0.75 puntos.

2) a) 1 punto.

b) 1 punto.

c) 1 punto.

3) a) 1 punto.

b) 1 punto.

c) 1 punto.

4) a) 1 punto.

b) 1 punto.

ABAU
CONVOCATORIA DE XUÑO
Ano 2019
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

OPCIÓN A

1) a) 1 punto.

b) 1 punto.

2) a) 1 punto.

- 0,5 puntos pola integración por partes.
- 0,5 puntos pola comprobación mediante derivación.

b) 1 punto.

- 0,5 puntos pola condición de continuidade.
- 0,5 puntos pola condición de derivabilidade.

c) 1 punto.

- 0,25 puntos pola xustificación dos límites de integración.
- 0,5 puntos pola escritura da área como suma de integrais e obtención das primitivas.
- 0,25 puntos polo uso da regra de Barrow.

3) a) 1 punto.

b) 1 punto.

c) 1 punto.

4) a) 1 punto.

b) 1 punto.

OPCIÓN B

1) a) 1.25 puntos.

b) 0.75 puntos.

2) a) 1 punto.

b) 1 punto.

c) 1 punto.

3) a) 1 punto.

b) 1 punto.

c) 1 punto.

4) a) 1 punto.

b) 1 punto.

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Supoñendo que A e X son matrices cadradas e que $A + I$ é invertible, despega X na ecuación $A - X = AX$.

b) Se $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula X tal que $A - X = AX$.

Solución:

$$1.a) A - X = AX \Leftrightarrow A = AX + X \Leftrightarrow A = (A + I)X \Leftrightarrow X = (A + I)^{-1}A.$$

1.b) Claramente, $A + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Posto que $\det(A + I) = 4 + 1 = 5$, tense

$$(A + I)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

e polo tanto

$$X = (A + I)^{-1}A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alternativa para 1.b): Desenvólvese a idea seguinte: calcular α, β, γ e δ tales que

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Mediante integración por partes, demostra que $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C$. Logo, demostra a mesma igualdade mediante derivación.

b) Se $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x \in (0, e], \\ ax + b & \text{se } x \in (e, \infty), \end{cases}$ di que relación ten que existir entre os parámetros a e b para que f sexa continua e cales teñen que ser os seus valores para que f sexa derivable.

c) Calcula a área da rexión encerrada polo eixe X , a recta $x = 4$ e a gráfica de $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x \in (0, e], \\ \frac{x}{e} & \text{se } x \in (e, \infty). \end{cases}$

Solución:

2.a) Empregando a fórmula de integración por partes con

$$u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx,$$

$$dv = dx, \quad v = x,$$

$$\text{tense } \int \ln x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

Por outra banda,

$$(x(\ln x - 1) + C)' = (x(\ln x - 1))' = \ln x - 1 + x \frac{1}{x} = \ln x.$$

MATEMÁTICAS II

2.b) Estúdanse a continuidade e a derivabilidade no único punto conflitivo, que é $x = e$.

Continuidade:

$$f(e) = \ln e = 1, \quad \lim_{x \uparrow e} f(x) = \lim_{x \uparrow e} \ln x = \ln e = 1, \quad \lim_{x \downarrow e} f(x) = \lim_{x \downarrow e} (ax + b) = ae + b. \quad \text{En}$$

consecuencia, f é continua se, e soamente se, $ae + b = 1$.

Derivabilidade:

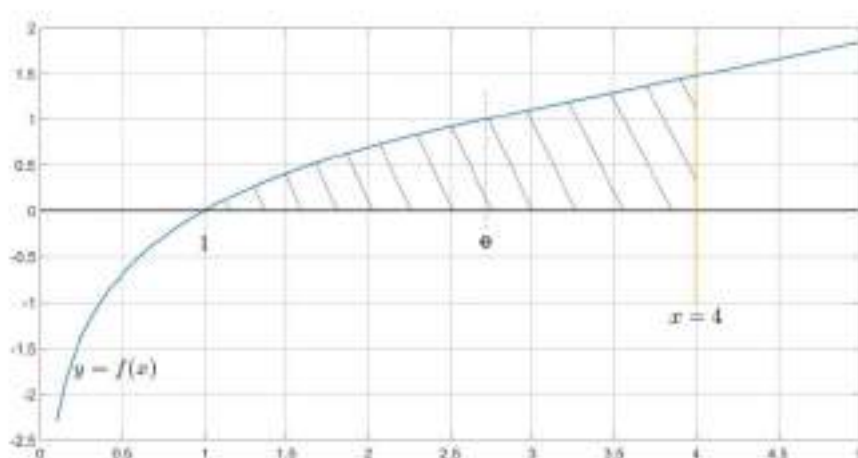
Nótese en primeiro lugar que, para que f sexa derivable, a condición $ae + b = 1$ tense que cumprir, xa que a continuidade é condición necesaria para a derivabilidade. Por outra

$$\text{banda, } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \in (0, e), \\ a & \text{se } x \in (e, \infty), \end{cases} \quad \text{de onde } \lim_{x \uparrow e} f'(x) = \lim_{x \uparrow e} \frac{1}{x} = \frac{1}{e} \quad \text{e} \quad \lim_{x \downarrow e} f'(x) = \lim_{x \downarrow e} a = a.$$

Conclúese que f é derivable se, e soamente se, $a = \frac{1}{e}$ e $b = 0$.

Alternativa para o estudo da derivabilidade: substitúase b por $1 - ae$ na expresión de f (xa que non pode ser derivable se non é continua) e empréguese a definición de derivada. É dicir, compróbase para que valor ou valores de a os límites $\lim_{x \uparrow e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e}$ e $\lim_{x \downarrow e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e}$ existen e son iguais.

2.c)



De acordo coa figura, a área pedida é a seguinte (o adxectivo “encerrada” obríganos a considerar a rexión raiada):

$$\ln e = 1, \ln 1 = 0$$

$$A = \int_1^e \ln x \, dx + \int_e^4 \frac{x}{e} \, dx = [x(\ln x - 1)]_1^e + \left[\frac{x^2}{2e} \right]_e^4 = 1 + \frac{16}{2e} - \frac{e^2}{2e} = 1 + \frac{8}{e} - \frac{e}{2} = \frac{2e+16-e^2}{2e} u^2 \approx$$

$$2.5839 u^2,$$

onde u indica “unidade de lonxitude”.

3. Pídese:

a) Calcular o ángulo do intervalo $[0^\circ, 90^\circ]$ que forman os vectores $\vec{u}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e

$$\vec{v}\left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

MATEMÁTICAS II

- b) Obter a ecuación implícita do plano que pasa polo punto $P(1, -3, 0)$ e é perpendicular á recta
- $$\begin{cases} x - y + 2z = 1, \\ y - z = 0. \end{cases}$$
- c) Calcular a distancia do punto $Q(1, 1, 1)$ ao plano $\pi: -x + y + z + 4 = 0$ e o punto simétrico de Q respecto a π .

Solución:

3.a) Se $\cdot$ denota produto escalar de vectores, $| \cdot |$ valor absoluto e $\| \cdot \|$ norma euclidiana, sábese que o ángulo pedido α está determinado pola ecuación $\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$, no sentido de que é o único ángulo α do intervalo $[0^\circ, 90^\circ]$ que satisfai esa igualdade.

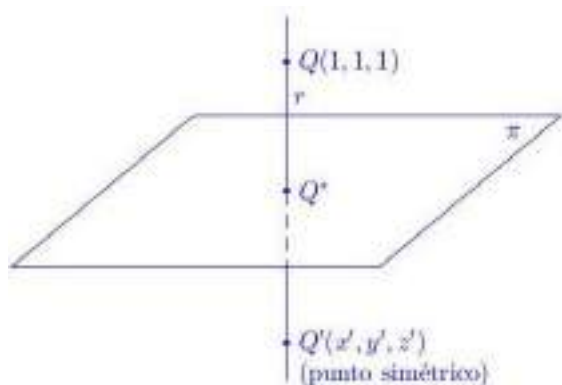
Dado que

- $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{(-1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \right| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$ e
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(1-2\sqrt{2}+2)}{4} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(1-2\sqrt{2}+2)}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+1-2\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1,$

chégase a que $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, de onde $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$.

3.b) Chamemos π ao plano pedido e r á recta dada. Pódese obter un vector normal a π a partir de dous puntos de r : $R(1, 0, 0), S(0, 1, 1) \in r$, e en consecuencia $\vec{n}_\pi = \overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ é normal a π . Alternativamente, pódese obter $\vec{n}_\pi$ do produto vectorial $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Como π pasa por $P(1, -3, 0)$, a súa ecuación é $\pi: -(x-1) + (y+3) + z = 0$, e como $-(x-1) + (y+3) + z = -x + 1 + y + 3 + z = -x + y + z + 4$, conclúese que a ecuación implícita de π é $\pi: -x + y + z + 4 = 0$.

3.c) $d(Q, \pi) = \frac{|-1+1+1+4|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2.8868$. Pasemos á obtención do punto simétrico.



A recta r que pasa por $Q(1, 1, 1)$ e é perpendicular a $\pi: -x + y + z + 4 = 0$ vén dada por

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 1 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cálculo de $Q^* = r \cap \pi$:

$$\begin{aligned} -(1 - \lambda) + 1 + \lambda + 1 + \lambda + 4 &= -1 + \lambda + 1 + \lambda + 1 + \lambda + 4 \\ &= 3\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{3}, \end{aligned}$$

de onde $Q^*(x, y, z)$ con $x = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$ e $y = z = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$, é dicir, $Q^*\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

MATEMÁTICAS II

Cálculo de $Q'(x', y', z')$, punto simétrico pedido:

$$\frac{1+x'}{2} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow 3+3x' = 16 \Leftrightarrow 3x' = 13 \Leftrightarrow x' = \frac{13}{3},$$

$$\frac{1+y'}{2} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3+3y' = -4 \Leftrightarrow 3y' = -7 \Leftrightarrow y' = -\frac{7}{3},$$

$$z' = y'.$$

En definitiva, $Q'\left(\frac{13}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}\right)$.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

- a) O 40% dos habitantes dunha certa comarca teñen camelias, o 35% teñen rosas e o 21% teñen camelias e rosas. Se se elixe ao azar a un habitante desa comarca, calcular as cinco probabilidades seguintes: de que teña camelias ou rosas; de que non teña nin camelias nin rosas; de que teña camelias, sabendo que ten rosas; de que teña rosas, sabendo que ten camelias; e de que soamente teña rosas ou soamente teña camelias.
- b) Se nun auditorio hai 50 persoas, cal é a probabilidade de que polo menos 2 teñan nacido no mes de xaneiro?

Solución:

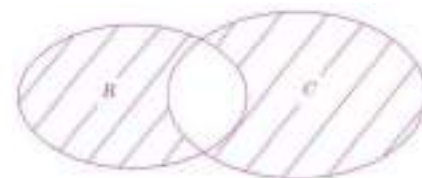
4.a) Damos nomes aos sucesos: R = “ter rosas” e C = “ter camelias”.

Sabemos que $P(C) = 0.4$, $P(R) = 0.35$ e $P(C \cap R) = 0.21$. As probabilidades pedidas son, por orde, as seguintes:

- $P(C \cup R) = P(C) + P(R) - P(C \cap R) = 0.4 + 0.35 - 0.21 = 0.54$.
- En virtude dunha das leis de De Morgan, $\bar{C} \cap \bar{R} = \overline{C \cup R}$. Consecuentemente, $P(\bar{C} \cap \bar{R}) = P(\overline{C \cup R}) = 1 - P(C \cup R) = 1 - 0.54 = 0.46$.
- $P(C|R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{0.21}{0.35} = 0.6$.
- $P(R|C) = \frac{P(C \cap R)}{P(C)} = \frac{0.21}{0.4} = 0.525$.
- $P((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R})) = P(R \cap \bar{C}) + P(C \cap \bar{R})$, xa que os sucesos $R \cap \bar{C}$ e $C \cap \bar{R}$ son incompatibles. De $P(R) = P(R \cap C) + P(R \cap \bar{C})$ dedúcese que $P(R \cap \bar{C}) = 0.35 - 0.21 = 0.14$, e de $P(C) = P(C \cap R) + P(C \cap \bar{R})$ que $P(C \cap \bar{R}) = 0.4 - 0.21 = 0.19$. Por último, $P((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R})) = 0.14 + 0.19 = 0.33$.

Alternativa para o cálculo de $P((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R}))$ (ver debuxo):

$$P((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R})) = P(R \cup C) - P(R \cap C) = 0.54 - 0.21 = 0.33.$$



4.b) X = “n.º de persoas nadas no mes de xaneiro, de entre as 50”.

$X \rightarrow B\left(50, \frac{1}{12}\right)$, é dicir, X segue unha distribución binomial de parámetros $n = 50$ e $p = \frac{1}{12} = 0.08\bar{3}$; logo $q = 1 - p = \frac{11}{12} = 0.91\bar{6}$. Pídese $P(X \geq 2)$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\}.$$

MATEMÁTICAS II

Posto que $P(X = 0) = \binom{50}{0} p^0 q^{50} = \left(\frac{11}{12}\right)^{50} \approx 0.0129$ e $P(X = 1) = \binom{50}{1} p^1 q^{49} = 50 \frac{1}{12} \left(\frac{11}{12}\right)^{49} \approx 0.0586$, téñense sucesivamente $P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0.0129 + 0.0586 = 0.0715$ e $P(X \geq 2) \approx 1 - 0.0715 = 0.9285$.

Nota: se se toma $p = \frac{31}{365} \approx 0.0849$, obtense $P(X \geq 2) \approx 0.9333$.

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ 0 \quad my + (3-m)z = -6, \\ 2x - y + mz = 6. \end{cases}$$

b) Resólvoo, se é posible, nos casos $m = 0$ e $m = 4$.

Solución:

1.a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 3-m & -6 \\ 2 & -1 & m & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 3-m & -6 \\ 0 & 0 & m-3 & 6 \end{array} \right), \text{ polo que o sistema dado}$$

equivale ao que escribimos a continuación, que ten a vantaxe de ser triangular:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ my + (3-m)z = -6, \\ (m-3)z = 6. \end{cases}$$

De ser compatible, este sistema pode ser resolto de abaixo arriba, empezando polo cálculo de z , seguindo co de y e terminando co de x . Sempre que $m \neq 3$, téñense que $z = \frac{6}{m-3}$ e que a segunda ecuación queda reducida á igualdade $my = 0$, de onde se infire á súa vez que $y = 0$ cando, ademais de ser $m \neq 3$, é $m \neq 0$. Resulta agora clara a discusión que segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$: o sistema é compatible determinado (ten unha única solución). A solución é a seguinte: $z = \frac{6}{m-3}$, $y = 0$, $x = -\frac{3z}{2}$.
- Caso $m = 3$: o sistema é incompatible (non ten solución), porque a terceira ecuación do sistema triangular queda $0 = 6$.
- Caso $m = 0$: o sistema triangular é

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ 3z = -6, \\ -3z = 6, \end{cases}$$

de onde $z = -2$, $y = \lambda \in \mathbb{R}$, e $x = \frac{\lambda+6}{2}$. É dicir, o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).

Alternativa para 1.a): Sexan $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix}$ e $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$, respectivamente,

a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & m \end{vmatrix} = 2m$ e $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & m \end{vmatrix} = -m+3$ non se anulan á vez, $2 \leq \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - 2(3-m) - 6m + 2(3-m) = 2m^2 - 6m = 2m(m-3),$$

e polo tanto $\det A = 0$ se, e só se, $m \in \{0,3\}$. Consecuentemente, a discusión é a seguinte:

MATEMÁTICAS II

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$: o sistema é compatible determinado (ten unha única solución), xa que $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = n.$ de incógnitas.
- Caso $m = 0$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0$, tense $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 2 < n.$ de incógnitas, e polo tanto o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).
- Caso $m = 3$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 36 + 12 - 12 = 36 \neq 0$, tense $\text{rank } A = 2 < \text{rank } A^* = 3$, e polo tanto o sistema é incompatible (non ten solución).

1.b) Se $m = 0$, as infinitas solucións son $\begin{cases} x = \frac{\lambda+6}{2}, \\ y = \lambda, \\ z = -2, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}.$ (Ver apartado 1.a.)

Se $m = 4$, a solución é $z = \frac{6}{m-3} = 6$, $y = 0$ e $x = -\frac{3z}{2} = -\frac{18}{2} = -9$. (Ver apartado 1.a.)

Nota: se se opta pola solución que arriba chamamos alternativa para responder ao apartado 1.a), a solución do apartado 1.b) pasa por escribir o sistema orixinal nos casos particulares $m = 0$ e $m = 4$ e resolver cada un deles mediante un método calquera.

2. Considérese a función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Pídese:

- Calcular os límites $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Determinar intervalos de crecemento e de decrecemento, extremos relativos e puntos de inflexión.
- Calcular $\int f(x) dx$.

Solución:

2.a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$. Falando con rigor, a regra de L'Hôpital dinos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existe e vale 0 porque $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x}$ existe e vale 0.

No segundo límite non hai indeterminación: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = \infty \cdot \infty = \infty$.

2.b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$. A derivada $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2-x)$ ten o signo de $x(2-x)$, xa que e^{-x} é sempre positivo. Logo f decrece estritamente en $(-\infty, 0)$, crece estritamente en $(0, 2)$ e decrece estritamente en $(2, \infty)$.

Ao ser f continua, ten un mínimo relativo estrito en $x = 0$ e un máximo relativo estrito en $x = 2$. Non ten outros extremos.

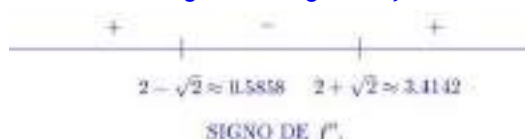


MATEMÁTICAS II

Pasamos agora ao estudo das posibles inflexións. $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, de onde $f''(x) = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = (2 - 2x - 2x + x^2)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$. Polo tanto, f'' ten o signo de $x^2 - 4x + 2$, cuxas raíces son

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Agora podemos marcar no debuxo seguinte o signo de f'' :



(Se houbera dúbidas, bastaría comprobar o signo de f'' nun punto calquera de cada un dos tres intervalos de interese.)

Esta análise dinos que f é convexa en $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$, cóncava en $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ e de novo convexa en $(2 + \sqrt{2}, \infty)$. A función f presenta polo tanto dous puntos de inflexión: en $x = 2 - \sqrt{2}$ e en $x = 2 + \sqrt{2}$.

2.c) Empregando a fórmula de integración por partes con

$$\begin{aligned} u &= x^2, & du &= 2x dx, \\ dv &= e^{-x} dx, & v &= -e^{-x}, \end{aligned}$$

tense

$$\int f(x) dx = \int x^2 e^{-x} dx = \int u dv = uv - \int v du = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx.$$

Usando de novo o método de integración por partes, esta vez con

$$\begin{aligned} u &= x, & du &= dx, \\ dv &= e^{-x} dx, & v &= -e^{-x}, \end{aligned}$$

chégase a que $\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$.

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \left\{ -x e^{-x} + \int e^{-x} dx \right\} = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C \\ &= (-x^2 - 2x - 2)e^{-x} + C = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C. \end{aligned}$$

3. Dá resposta aos apartados seguintes:

- Estuda a posición relativa dos planos $\pi_1: mx - y + 2 = 0$ e $\pi_2: 2x + 3y = 0$ en función do parámetro m .
- Obtén a ecuación implícita do plano que pasa polos puntos $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$ e $C(0,1,0)$.
- Calcula o punto simétrico do punto $P(1,2,3)$ con respecto ao plano $\pi: -x + z = 0$.

Solución:

- Os planos nunca coinciden, xa que $O(0,0,0) \in \pi_2 \setminus \pi_1$ para calquera valor de m . Agora, como $\vec{n}_{\pi_1}(m, -1, 0)$ e $\vec{n}_{\pi_2}(2, 3, 0)$ son normais, respectivamente, a π_1 e a π_2 ,

MATEMÁTICAS II

$$\pi_1 \text{ e } \pi_2 \text{ son paralelos} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \text{ e } \vec{n}_{\pi_2} \text{ son paralelos} \Leftrightarrow \frac{m}{2} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3},$$

o que á súa vez implica que se cortan nunha recta cando $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

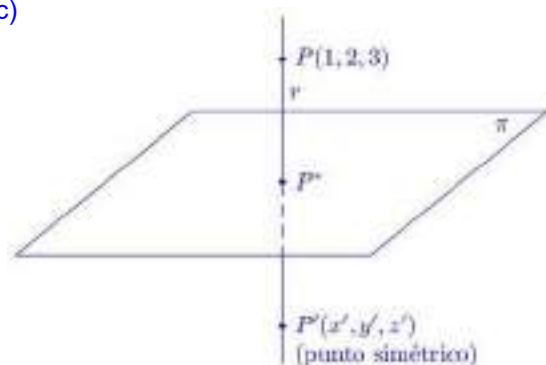
Alternativa para 3.a): Sexan $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $A^* = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$. Posto que $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2$ para calquera valor de m . Por outra banda, $\begin{vmatrix} m & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}$. Segundo esta análise:

- Se $m = -\frac{2}{3}$, $\text{rank } A = 1 < \text{rank } A^* = 2$, polo que os planos son paralelos non coincidentes.
- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 2$, polo que os planos se cortan nunha recta.

3.b) Os vectores $\overrightarrow{AB}(1,0,1)$ e $\overrightarrow{AC}(0,1,0)$ son xeradores do plano pedido, ao que chamaremos π .

Ademais, $A(0,0,0) \in \pi$, polo que $\pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Como $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = z - x$, a ecuación implícita do plano é $\pi: -x + z = 0$.

3.c)



A recta que pasa por $P(1,2,3)$ e é perpendicular a $\pi: -x + z = 0$ é

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2, \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cálculo de $P^* = r \cap \pi$:

$$-(1 - \lambda) + 3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1,$$

de onde $P^*(x, y, z)$ con $x = 1 - (-1) = 2$, $y = 2$ e $z = 3 + (-1) = 2$, é dicir, $P^*(2,2,2)$.

Cálculo de $P'(x', y', z')$, punto simétrico pedido:

$$\frac{1 + x'}{2} = 2 \Leftrightarrow 1 + x' = 4 \Leftrightarrow x' = 3,$$

$$\frac{2 + y'}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 + y' = 4 \Leftrightarrow y' = 2,$$

$$\frac{3 + z'}{2} = 2 \Leftrightarrow 3 + z' = 4 \Leftrightarrow z' = 1.$$

En definitiva, $P'(3,2,1)$.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

- Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral. Calcula $P(A)$ se $P(B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ e $P(A \cup B)$ é o triplo de $P(A)$.
- Nun determinado lugar, a temperatura máxima durante o mes de xullo segue unha distribución normal de media 25°C e desviación típica 4°C . Calcula a probabilidade de que a

MATEMÁTICAS II

temperatura máxima dun certo día estea comprendida entre 21°C e 27.2°C. En cantos días do mes se espera que a temperatura máxima permaneza dentro dese rango?

Solución:

4.a) Temos $3P(A) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, de onde en primeira instancia se obtén $2P(A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.8 - 0.2 = 0.6$ e, en segunda, $P(A) = 0.3$.

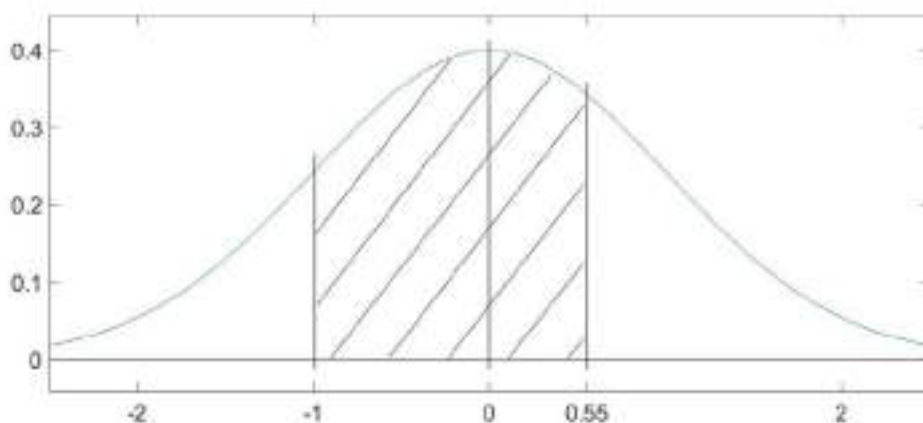
4.b) X = "temperatura máxima dun día do mes de xullo".

$$X \rightarrow N(25,4) \Rightarrow Z = \frac{X - 25}{4} \rightarrow N(0,1).$$

Logo

$$\begin{aligned} P(21 \leq X \leq 27.2) &= P\left(\frac{21 - 25}{4} \leq Z \leq \frac{27.2 - 25}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 0.55) \\ &= P(Z \leq 0.55) - P(Z < -1) = P(Z \leq 0.55) - P(Z > 1) \\ &= P(Z \leq 0.55) - \{1 - P(Z \leq 1)\} \approx 0.7088 - 1 + 0.8413 = 0.5501 \end{aligned}$$

é a probabilidade pedida. Espérase polo tanto que en $0.5501 \times 31 \approx 17$ días do mes a temperatura máxima estea comprendida entre 21°C e 27.2°C.



A área da zona raiada é igual á probabilidade pedida $P(-1 \leq Z \leq 0.55)$.

MATEMÁTICAS II

(O/A estudante debe responder soamente as preguntas dunha das opcións. A puntuación máxima por preguntas é a seguinte: 1.ª pregunta: 2 puntos; 2.ª pregunta: 3 puntos; 3.ª pregunta: 3 puntos; 4.ª pregunta: 2 puntos).

OPCIÓN A

- Dá resposta aos apartados seguintes:
 - Despexa X na ecuación $XA + B = C$, sabendo que A é unha matriz invertible.
 - Calcula X tal que $XA + B = C$ se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- Dá resposta aos apartados seguintes:
 - Estuda os intervalos de crecemento e de decrecemento e os extremos relativos da función $f(x) = x^2 \ln x$.
 - Considérese un triángulo tal que: dous dos seus vértices son a orixe $O(0,0)$ e o punto $P(1,3)$, un dos seus lados está sobre o eixe X e outro sobre a tanxente en $P(1,3)$ á gráfica da parábola $y = 4 - x^2$. Pídese calcular as coordenadas do terceiro vértice, debuxar o triángulo e calcular, por separado, a área das dúas rexións nas que o triángulo queda dividido pola parábola $y = 4 - x^2$.
- Pídese:
 - Estudar a posición relativa dos planos $\pi_1: x + my + z + 2 = 0$ e $\pi_2: mx + y + z + m = 0$ en función de m .
 - Calcular o valor que deben tomar k e m para que os puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1, 2, 1)$ e $C(8, 1, m)$ estean aliñados.
 - Obter as ecuacións paramétricas da recta r que pasa polos puntos $P(-1, 2, 1)$ e $Q(8, 1, 1)$ e a ecuación implícita do plano perpendicular a r que pasa polo punto $R(1, 1, 1)$.
- Dá resposta aos apartados seguintes:
 - A probabilidade de que un mozo recorde regar a súa roseira durante unha certa semana é de $\frac{2}{3}$. Se se rega, a roseira sobrevive con probabilidade 0.7; se non, faino con probabilidade 0.2. Ao finalizar a semana, a roseira sobreviviu. Cal é a probabilidade de que o mozo non a regase?
 - Unha fábrica produce pezas cuxo grosor segue unha distribución normal de media 8 cm e desviación típica 0.01 cm. Calcula a probabilidade de que unha peza teña un grosor comprendido entre 7.98 e 8.02 cm.

OPCIÓN B

- Dá resposta aos apartados seguintes:
 - Discute, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema:
$$\begin{cases} x - y + 3z = m, \\ my - 2z = -2, \\ x + (m-1)y + (m+3)z = m. \end{cases}$$
 - Resólveo, se é posible, nos casos $m = 0$ e $m = 2$.
- Dá resposta aos apartados seguintes:
 - De entre tódolos triángulos rectángulos contidos no primeiro cuadrante que teñen un vértice na orixe, outro sobre a parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre o eixe X e o outro paralelo ao eixe Y , obtén os catetos e a hipotenusa daquel cuxa área é máxima.
 - Enuncia os teoremas de Bolzano e de Rolle.
- Pídese:
 - Para o plano $\pi: 3x + 2y - z = 0$ e a recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$, calcular o punto de corte de r con π e obter a ecuación implícita do plano π^* que é perpendicular a π e contén a r .
 - Estudar a posición relativa dos planos $\pi_1: 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ e $\pi_2: x = 0$, e calcular o ángulo $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$ que forman.
- Dá resposta aos apartados seguintes:
 - Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral tales que $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ e $P(A \cup B) = 0.5$. Calcula $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A \cap B)$ e $P(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razona se A e B son ou non sucesos independentes.
 - A probabilidade de que un determinado xogador de fútbol marque gol desde o punto de penalti é $p = 0.7$. Se lanza 5 penaltis, calcula as seguintes tres probabilidades: de que non marque ningún gol; de que marque polo menos 2 goles; e de que marque 5 goles. Se lanza 2100 penaltis, calcula a probabilidade de que marque polo menos 1450 goles. Estase a asumir que os lanzamentos son sucesos independentes.



MATEMÁTICAS II

(El/La estudiante debe responder solamente las preguntas de una de las opciones. La puntuación máxima por preguntas es la siguiente: 1.ª pregunta: 2 puntos; 2.ª pregunta: 3 puntos; 3.ª pregunta: 3 puntos; 4.ª pregunta: 2 puntos).

OPCIÓN A

- Da resposta a los apartados siguientes:
 - Despeja X en la ecuación $XA + B = C$, sabiendo que A es una matriz invertible.
 - Calcula X tal que $XA + B = C$ si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- Da resposta a los apartados siguientes:
 - Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 \ln x$.
 - Considérese un triángulo tal que: dos de sus vértices son el origen $O(0,0)$ y el punto $P(1,3)$, uno de sus lados está sobre el eje X y otro sobre la tangente en $P(1,3)$ a la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$. Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibujar el triángulo y calcular, por separado, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola $y = 4 - x^2$.
- Se pide:
 - Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: x + my + z + 2 = 0$ y $\pi_2: mx + y + z + m = 0$ en función de m .
 - Calcular el valor que deben tomar k y m para que los puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1, 2, 1)$ y $C(8, 1, m)$ estén alineados.
 - Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(-1, 2, 1)$ y $Q(8, 1, 1)$ y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto $R(1, 1, 1)$.
- Da resposta a los apartados siguientes:
 - La probabilidad de que un chico recuerde regar su rosal durante una cierta semana es de $\frac{2}{3}$. Si se riega, el rosal sobrevive con probabilidad 0.7; si no, lo hace con probabilidad 0.2. Al finalizar la semana, el rosal ha sobrevivido. ¿Cuál es la probabilidad de que el chico no lo haya regado?
 - Una fábrica produce piezas cuyo grosor sigue una distribución normal de media 8 cm y desviación típica 0.01 cm. Calcula la probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7.98 y 8.02 cm.

OPCIÓN B

- Da resposta a los apartados siguientes:
 - Discute, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} x - y + 3z = m, \\ my - 2z = -2, \\ x + (m-1)y + (m+3)z = m. \end{cases}$$
 - Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 2$.
- Da resposta a los apartados siguientes:
 - De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y , obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.
 - Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.
- Se pide:
 - Para el plano $\pi: 3x + 2y - z = 0$ y la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$, calcular el punto de corte de r con π y obtener la ecuación implícita del plano π^* que es perpendicular a π y contiene a r .
 - Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ y $\pi_2: x = 0$, y calcular el ángulo $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$ que forman.
- Da resposta a los apartados siguientes:
 - Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ y $P(A \cup B) = 0.5$. Calcula $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A \cap B)$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razona si A y B son o no sucesos independientes.
 - La probabilidad de que un determinado jugador de fútbol marque gol desde el punto de penalti es $p = 0.7$. Si lanza 5 penaltis, calcula las siguientes tres probabilidades: de que no marque ningún gol; de que marque por lo menos 2 goles; y de que marque 5 goles. Si lanza 2100 penaltis, calcula la probabilidad de que marque por lo menos 1450 goles. Se está asumiendo que los lanzamientos son sucesos independientes.

ABAU
CONVOCATORIA DE XULLO
Ano 2019
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

OPCIÓN A

1)

- a) 0.75 puntos.**
- b) 1.25 puntos.**

2)

- a) 1 punto.**
- b) 2 puntos:**
 - i) 0.5 puntos polo debuxo do triángulo.
 - ii) 0.5 puntos pola obtención da ecuación da recta tanxente e do terceiro vértice.
 - iii) 0.5 puntos por cada unha das dúas áreas pedidas.

3)

- a) 1 punto.**
- b) 1 punto.**
- c) 1 punto.**

4)

- a) 1 punto.**
- b) 1 punto.**

OPCIÓN B

1)

- a) 1.25 puntos.**
- b) 0.75 puntos.**

2)

- a) 2 puntos.**
- b) 1 punto.**

3)

- a) 1.5 puntos.**
- b) 1.5 puntos.**

4)

- a) 0.75 puntos.**
- b) 1.25 puntos.**

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Despeza X na ecuación $XA + B = C$, sabendo que A é unha matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA + B = C$ se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

1.a) $XA + B = C \Leftrightarrow XA = C - B \Leftrightarrow X = (C - B)A^{-1}$.

1.b) $C - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Posto que $\det A = 8 - 3 = 5$, tense

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

e polo tanto

$$X = (C - B)A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Alternativa para 1.b): Desenvólvese a idea seguinte: calcular $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ e μ tales que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Estuda os intervalos de crecemento e de decrecemento e os extremos relativos da función $f(x) = x^2 \ln x$.

b) Considérese un triángulo tal que: dous dos seus vértices son a orixe $O(0,0)$ e o punto $P(1,3)$, un dos seus lados está sobre o eixe X e outro sobre a tanxente en $P(1,3)$ á gráfica da parábola $y = 4 - x^2$. Pídese calcular as coordenadas do terceiro vértice, debuxar o triángulo e calcular, por separado, a área das dúas rexións nas que o triángulo queda dividido pola parábola $y = 4 - x^2$.

Solución:

2.a) Nótese que $\text{Dom } f = (0, \infty)$. Cómpre estudar o signo de

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1),$$

que coincide co signo de $2 \ln x + 1$ en $\text{Dom } f$. Agora ben, $2 \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2 \ln x > -1 \Leftrightarrow$

$\ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.6065$, xa que a función exponencial crece estritamente.

Chegados a este punto, é obvio que $2 \ln x + 1 < 0$ se, e soamente se, $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$.



MATEMÁTICAS II

Polo tanto, f decrece estritamente no intervalo $(0, e^{-\frac{1}{2}})$ e crece estritamente no intervalo $(e^{-\frac{1}{2}}, \infty)$. Posto que se trata dunha función continua, presenta un mínimo absoluto (logo relativo) en $x = e^{-\frac{1}{2}}$. Non hai outros extremos.

2.b) $y(x) = 4 - x^2 \Rightarrow y'(x) = -2x \Rightarrow y'(1) = -2$. Logo a ecuación da recta tanxente en $P(1,3)$ á gráfica da parábola $y = 4 - x^2$ é

$$y(x) = -2(x - 1) + 3 = -2x + 2 + 3 = -2x + 5.$$

O vértice pedido, ao que chamaremos Q , é o punto de corte desa recta co eixe X :

$$[-2x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5] \Rightarrow Q(2.5, 0).$$

Á dereita móstrase o debuxo do triángulo, onde tamén están marcadas as rexións cuxas áreas hai que calcular: R_1 e R_2 . É claro que a parábola corta ao eixe X positivo en $x = 2$ (xa que aí $4 - x^2 = 0$).

Posto que $R_1 = T \cup R^*$, con

- T un triángulo de base 1 e altura 3 e
- R^* a rexión baixo a gráfica de $y = 4 - x^2$ (e sobre o eixe X) desde $x = 1$ hasta $x = 2$,

a área de R_1 pódese calcular do seguinte xeito (u indicará "unidade de lonxitude"):

T e R^* non se solapan

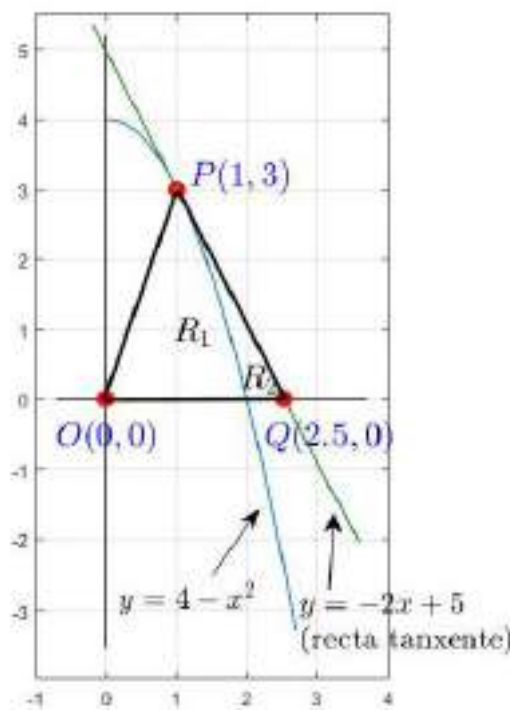
$$\begin{aligned} \text{área}(R_1) &= \text{área}(T) + \text{área}(R^*) = \frac{1 \cdot 3}{2} + \int_1^2 (4 - x^2) dx = \frac{3}{2} + \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{3}{2} \\ &+ \left\{ 8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} \right\} = \frac{3}{2} + 4 - \frac{7}{3} = \frac{9 + 24 - 14}{6} = \frac{19}{6} u^2 = 3.1\bar{6} u^2. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\text{área}(R_2) = \frac{\frac{5}{2} \cdot 3}{2} - \frac{19}{6} = \frac{15}{4} - \frac{19}{6} = \frac{45 - 38}{12} = \frac{7}{12} u^2 = 0.58\bar{3} u^2.$$

3. Pídese:

- Estudar a posición relativa dos planos $\pi_1: x + my + z + 2 = 0$ e $\pi_2: mx + y + z + m = 0$ en función de m .
- Calcular o valor que deben tomar k e m para que os puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1, 2, 1)$ e $C(8, 1, m)$ estean aliñados.
- Obter as ecuacións paramétricas da recta r que pasa polos puntos $P(-1, 2, 1)$ e $Q(8, 1, 1)$ e a ecuación implícita do plano perpendicular a r que pasa polo punto $R(1, 1, 1)$.



MATEMÁTICAS II

Solución:

3.a) Como $\vec{n}_{\pi_1}(1, m, 1)$ e $\vec{n}_{\pi_2}(m, 1, 1)$ son normais, respectivamente, a π_1 e a π_2 ,

$$\pi_1 \text{ e } \pi_2 \text{ son paralelos} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \text{ e } \vec{n}_{\pi_2} \text{ son paralelos} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{m}{1} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow m = 1,$$

o que á súa vez implica que se cortan nunha recta cando $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ademais, podemos engadir que non son coincidentes cando $m = 1$, xa que nese caso $P(0,0,-2) \in \pi_1 \setminus \pi_2$.

Alternativa para 3.a): Sexan $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & 2 \\ m & 1 & 1 & | & m \end{pmatrix}$. Posto que $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1$ e $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 2$ non se anulan á vez, $\text{rank } A^* = 2$ para calquera valor de m . Por outra banda, $\text{rank } A = 1$ cando $m = 1$ (as dúas filas de A son iguais e non nulas) e $\text{rank } A = 2$ cando $m \neq 1$, xa que $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1 \neq 0$. Segundo esta análise:

- Se $m = 1$, $\text{rank } A = 1 < \text{rank } A^* = 2$, polo que os planos son paralelos non coincidentes.
- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 2$, polo que os planos se cortan nunha recta.

3.b) A, B e C son, para tódolos valores dos parámetros k e m , puntos distintos, que estarán polo tanto aliñados se, e soamente se, os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ son paralelos. Posto que $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2-k \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1-k \\ m-1 \end{pmatrix}$, tense que

$$A, B \text{ e } C \text{ están aliñados} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \left[\frac{-1}{8} = \frac{2-k}{1-k} \text{ e } m-1 = 0 \right]$$

$$\Leftrightarrow [-1 + k = 16 - 8k \text{ e } m = 1] \Leftrightarrow [9k = 17 \text{ e } m = 1] \Leftrightarrow \left[k = \frac{17}{9} \text{ e } m = 1 \right].$$

3.c) $\vec{d}_r = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é vector director da recta r , a cal ademais pasa polo punto

$P(-1,2,1)$, polo que as ecuacións paramétricas pedidas son

$$r: \begin{cases} x = -1 + 9\lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = 1, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Chamemos π o plano perpendicular a r que pasa polo punto $R(1,1,1)$. Como $\vec{n}_\pi = \vec{d}_r(9, -1, 0)$ é un vector normal a π , tense $\pi: 9(x - 1) - (y - 1) = 0$. Tendo en conta que $9(x - 1) - (y - 1) = 9x - 9 - y + 1 = 9x - y - 8$, conclúese que a ecuación implícita de π é $\pi: 9x - y - 8 = 0$.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) A probabilidade de que un mozo recorde regar a súa roseira durante unha certa semana é de $\frac{2}{3}$. Se se rega, a roseira sobrevive con probabilidade 0.7; se non, faino con probabilidade 0.2. Ao finalizar a semana, a roseira sobreviviu. Cal é a probabilidade de que o mozo non a regase?

MATEMÁTICAS II

- b) Unha fábrica produce pezas cuxo grosor segue unha distribución normal de media 8 cm e desviación típica 0.01 cm. Calcula a probabilidade de que unha peza teña un grosor comprendido entre 7.98 e 8.02 cm.

Solución:

- 4.a) Damos nomes aos sucesos: R = “o mozo rega” e S = “a roseira sobrevive”.

Sabemos que $P(R) = \frac{2}{3}$ (logo $P(\bar{R}) = \frac{1}{3}$), $P(S|R) = 0.7$ e $P(S|\bar{R}) = 0.2$.

Pídese $P(\bar{R}|S) = \frac{P(\bar{R} \cap S)}{P(S)}$.

- De $0.7 = P(S|R) = \frac{P(S \cap R)}{P(R)} = \frac{P(S \cap R)}{\frac{2}{3}}$, dedúcese que $P(S \cap R) = \frac{2}{3} \cdot 0.7 = \frac{7}{15} = 0.4\bar{6}$.
- De $0.2 = P(S|\bar{R}) = \frac{P(S \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{P(S \cap \bar{R})}{\frac{1}{3}}$, dedúcese que $P(S \cap \bar{R}) = \frac{1}{3} \cdot 0.2 = \frac{1}{15} = 0.0\bar{6}$.

Polo tanto, $P(S) = P(S \cap R) + P(S \cap \bar{R}) = \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15} = 0.5\bar{3}$ e, en consecuencia,

$$P(\bar{R}|S) = \frac{P(\bar{R} \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

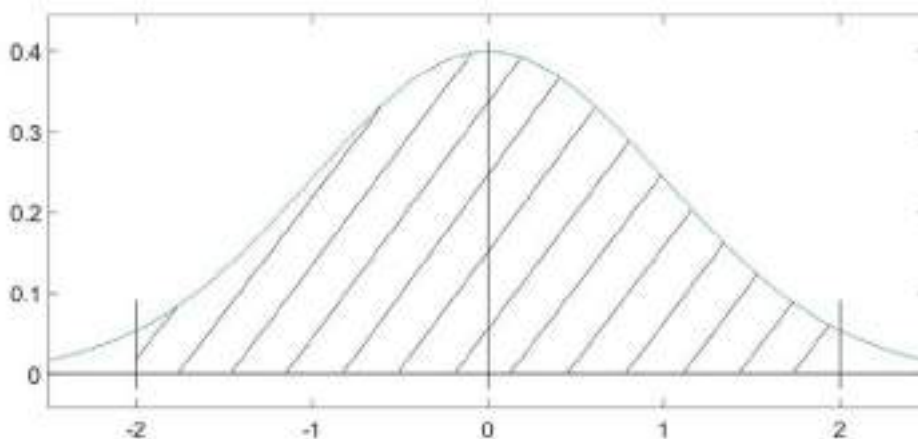
- 4.b) X = “grosor das pezas”.

$$X \rightarrow N(8, 0.01) \Rightarrow Z = \frac{X - 8}{0.01} \rightarrow N(0, 1).$$

Logo

$$\begin{aligned} P(7.98 \leq X \leq 8.02) &= P\left(\frac{7.98 - 8}{0.01} \leq Z \leq \frac{8.02 - 8}{0.01}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) \\ &= P(Z \leq 2) - P(Z < -2) = P(Z \leq 2) - P(Z > 2) \\ &= P(Z \leq 2) - \{1 - P(Z \leq 2)\} = 2P(Z \leq 2) - 1 \approx 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544 \end{aligned}$$

é a probabilidade pedida.



A área da zona raiada é igual á probabilidade pedida $P(-2 \leq Z \leq 2)$.

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - y + 3z = m, \\ my - 2z = -2, \\ x + (m-1)y + (m+3)z = m. \end{cases}$$

b) Resólvoo, se é posible, nos casos $m = 0$ e $m = 2$.

Solución:

1.a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 & m \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 0 & m & m & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 0 & 0 & m+2 & 2 \end{array} \right)$$

polo que o sistema dado equivale ao que escribimos a continuación, que ten a vantaxe de ser triangular:

$$\begin{cases} x - y + 3z = m, \\ my - 2z = -2, \\ (m+2)z = 2. \end{cases}$$

De ser compatible, este sistema pode ser resolto de abaixo arriba, empezando polo cálculo de z , seguindo co de y e terminando co de x . Sempre que $m \neq -2$, téñense que $z = \frac{2}{m+2}$ e que a segunda ecuación queda reducida á igualdade $my = 2z - 2 = \frac{4}{m+2} - 2 = \frac{-2m}{m+2}$, de onde se infire á súa vez que $y = \frac{-2}{m+2}$ cando, ademais de ser $m \neq -2$, é $m \neq 0$.

Resulta agora clara a discusión que segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$: o sistema é compatible determinado (ten unha única solución). A solución é a seguinte: $z = \frac{2}{m+2}$, $y = \frac{-2}{m+2}$, $x = y - 3z + m = \frac{-2}{m+2} - \frac{6}{m+2} + m = \frac{-2-6+m(m+2)}{m+2} = \frac{m^2+2m-8}{m+2} = \frac{(m-2)(m+4)}{m+2}$.
- Caso $m = -2$: o sistema é incompatible (non ten solución), porque a terceira ecuación do sistema triangular queda $0 = 2$.
- Caso $m = 0$: o sistema triangular é

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0, \\ -2z = -2, \\ 2z = 2, \end{cases}$$

de onde $z = 1$, $y = \lambda \in \mathbb{R}$, e $x = y - 3z = \lambda - 3$. É dicir, o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).

Alternativa para 1.a): Sexan $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{pmatrix}$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 & m \end{pmatrix}$,

respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, é seguro que $2 \leq \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3$.

MATEMÁTICAS II

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{vmatrix} = m(m+3) + 2 - 3m + 2(m-1) = m^2 + 3m + 2 - 3m + 2m - 2 = m^2 + 2m = m(m+2),$$

e polo tanto $\det A = 0$ se, e só se, $m \in \{-2, 0\}$. Consecuentemente, a discusión é a seguinte:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$: o sistema é compatible determinado (ten unha única solución), xa que $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = n.$ de incógnitas.
- Caso $m = -2$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 4 - 6 = -4 \neq 0$, tense $\text{rank } A = 2 < \text{rank } A^* = 3$, e polo tanto o sistema é incompatible (non ten solución).
- Caso $m = 0$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$, tense $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 2 < n.$ de incógnitas, e polo tanto o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).

1.b) Se $m = 0$, as infinitas solucións son $\begin{cases} x = \lambda - 3, \\ y = \lambda, \\ z = 1, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}.$ (Ver apartado 1.a).)

Se $m = 2$, a solución é $z = \frac{2}{m+2} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{-2}{m+2} = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{(m-2)(m+4)}{m+2} = 0$. (Ver apartado 1.a).)

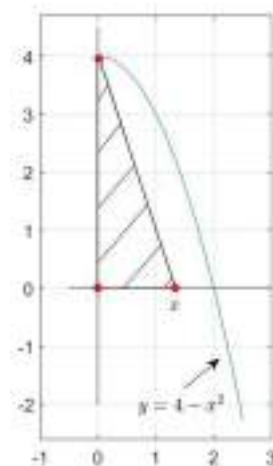
Nota: se se opta pola solución que arriba chamamos alternativa para responder ao apartado 1.a), a solución do apartado 1.b) pasa por escribir o sistema orixinal nos casos particulares $m = 0$ e $m = 2$ e resolver cada un deles mediante un método calquera.

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

- De entre tódolos triángulos rectángulos contidos no primeiro cuadrante que teñen un vértice na orixe, outro sobre a parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre o eixe X e o outro paralelo ao eixe Y , obtén os catetos e a hipotenusa daquel cuxa área é máxima.
- Enuncia os teoremas de Bolzano e de Rolle.

Solución:

2.a) Se se entende que paralelo pode ser coincidente, non se pode descartar o caso no que o punto $P(0,4)$ é un vértice, co cal un dos catetos do triángulo está sobre o eixe Y . Teríamos unha situación como a que se representa no debuxo da dereita. Neste marco non hai triángulo de área máxima. En efecto, a área vén dada pola función $A(x) = \frac{4x}{2} = 2x$, con $x \in (0, \infty)$, que non ten máximo.



MATEMÁTICAS II

Supoñamos agora que ningún cateto pode estar sobre o eixe Y . Entón a situación anterior queda excluída e a única posibilidade é a representada no novo debuxo, á dereita, onde o triángulo ten base x e altura $4 - x^2$. Hai que buscar o máximo da función $A(x) = \frac{x(4-x^2)}{2}$, con $x \in (0,2)$.

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{1}{2}\{4 - x^2 + x(-2x)\} = \frac{1}{2}(-3x^2 + 4) = -\frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{4}{3}\right) \\ &= -\frac{3}{2}\left(x + \sqrt{\frac{4}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{4}{3}}\right) \\ &= -\frac{3}{2}\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \end{aligned}$$

onde $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547 \in (0,2)$. Logo A é crecente (A' ten signo positivo) no intervalo $(0, \frac{2}{\sqrt{3}})$ e é decrecente (A' ten signo negativo) no intervalo $(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2)$. Posto que A é continua, conclúese que ten un único máximo absoluto en $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Danse a continuación as medidas dos catetos e da hipotenusa do triángulo de área máxima (u indicará "unidade de lonxitude").

Catetos: $x = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ u} \approx 1.1547 \text{ u e}$

$$y = 4 - x^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3} \text{ u} = 2.\bar{6} \text{ u.}$$

Hipotenusa: En virtude do teorema de Pitágoras, $h^2 = \frac{4}{3} + \frac{64}{9} = \frac{12+64}{9} = \frac{78}{9} = \frac{26}{3}$, polo que a medida da hipotenusa é

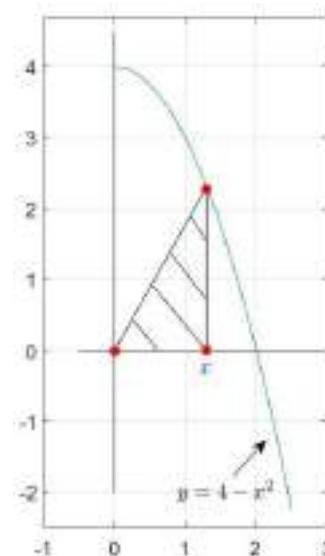
$$h = \sqrt{\frac{26}{3}} \text{ u} \approx 2.9439 \text{ u.}$$

2.b)

- **Teorema de Bolzano:** Sexa $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Se $f(a)f(b) < 0$, entón existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
- **Teorema de Rolle:** Sexa $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, entón existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

3. Pídese:

- Para o plano $\pi: 3x + 2y - z = 0$ e a recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$, calcular o punto de corte de r con π e obter a ecuación implícita do plano π^* que é perpendicular a π e contén a r .
- Estudar a posición relativa dos planos $\pi_1: 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ e $\pi_2: x = 0$, e calcular o ángulo $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$ que forman.



MATEMÁTICAS II

Solución:

3.a) Punto de corte:

É útil escribir as ecuacións paramétricas de r , que son r :
$$\begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = -1 - 2\lambda, \\ z = 3\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

e substituír os valores de x, y e z na ecuación do plano para obter o valor do parámetro λ no punto de corte:

$3(2 + \lambda) + 2(-1 - 2\lambda) - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow 6 + 3\lambda - 2 - 4\lambda - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow -4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$,
de onde $x = 2 + \lambda = 3$, $y = -1 - 2\lambda = -3$ e $z = 3\lambda = 3$. É dicir, o punto de corte pedido é $P(3, -3, 3)$.

Ecuación implícita de π^* :

$\vec{u} = \vec{n}_\pi(3, 2, -1)$ e $\vec{v}(1, -2, 3)$ son xeradores de π^* , e $P(2, -1, 0) \in r \subset \pi^*$, polo que

$$\pi^*: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Como

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6(x-2) - (y+1) - 6z - 2z - 2(x-2) - 9(y+1) = 4(x-2) -$$

$$10(y+1) - 8z = 4x - 8 - 10y - 10 - 8z = 4x - 10y - 8z - 18,$$

a ecuación implícita pedida é $\pi^*: 4x - 10y - 8z - 18 = 0$ ou, equivalentemente,

$$\pi^*: 2x - 5y - 4z - 9 = 0.$$

3.b) $\vec{n}_{\pi_1}(2, -5, -4)$ e $\vec{n}_{\pi_2}(1, 0, 0)$ son normais, respectivamente, a π_1 e π_2 , logo é claro que os dous planos se cortan nunha recta, porque $\vec{n}_{\pi_1}$ e $\vec{n}_{\pi_2}$ non son paralelos.

O ángulo α que forman π_1 e π_2 coincide co ángulo que forman os vectores $\vec{n}_{\pi_1}$ e $\vec{n}_{\pi_2}$, así

que $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{\|\vec{n}_{\pi_1}\| \|\vec{n}_{\pi_2}\|}$. Téñense

- $\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 2$,
- $\|\vec{n}_{\pi_1}\| = \sqrt{4 + 25 + 16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ e
- $\|\vec{n}_{\pi_2}\| = 1$,

de onde, en primeira instancia, $\cos \alpha = \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15} \approx 0.2981424$ e, en segunda,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{15}\right) \approx 72.6539^\circ.$$

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral tales que $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ e $P(A \cup B) = 0.5$. Calcula $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A \cap B)$ e $P(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razona se A e B son ou non sucesos independentes.

MATEMÁTICAS II

- b) A probabilidade de que un determinado xogador de fútbol marque gol desde o punto de penalti é $p = 0.7$. Se lanza 5 penaltis, calcula as seguintes tres probabilidades: de que non marque ningún gol; de que marque polo menos 2 goles; e de que marque 5 goles. Se lanza 2100 penaltis, calcula a probabilidade de que marque polo menos 1450 goles. Estase a asumir que os lanzamentos son sucesos independentes.

Solución:

4.a) Temos

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$.
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$.
- Da igualdade $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dedúcese que $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.2 + 0.4 - 0.5 = 0.1$.
- Segundo unha das leis de De Morgan, $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$, de onde $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.1 = 0.9$.

Por último, os sucesos A e B non son independentes, porque $P(A \cap B) = 0.1 \neq 0.08 = 0.2 \cdot 0.4 = P(A)P(B)$.

- 4.b) Se $X =$ "n.º de goles en 5 lanzamentos de penalti", entón $X \rightarrow B(5, 0.7)$, distribución binomial de parámetros $n = 5$ e $p = 0.7$. Tense entón $q = 1 - p = 0.3$ e, polo tanto,

- $P(X = 0) = \binom{5}{0} p^0 q^5 = 0.3^5 = 2.43 \times 10^{-3}$.
- Como $P(X = 1) = \binom{5}{1} p^1 q^4 = 5 \cdot 0.7 \cdot 0.3^4 = 0.02835$, tense que $P(X \geq 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\} = 1 - \{0.00243 + 0.02835\} = 1 - 0.03078 = 0.96922$.
- $P(X = 5) = \binom{5}{5} p^5 q^0 = 0.7^5 = 0.16807$.

Supoñamos agora que $X =$ "n.º de goles en 2100 lanzamentos de penalti", co cal $X \rightarrow B(2100, 0.7)$. Os valores de n , p e q neste caso son $n = 2100$, $p = 0.7$ e $q = 0.3$. A probabilidade $P(X \geq 1450)$ é difícil de calcular directamente. É posible, non obstante, razoalo do xeito seguinte: ao ser $np = 1470 > 5$ e $nq = 630 > 5$, a variable X pode ser aproximada por unha normal $\tilde{X}$ de media np e desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{441} = 21$.

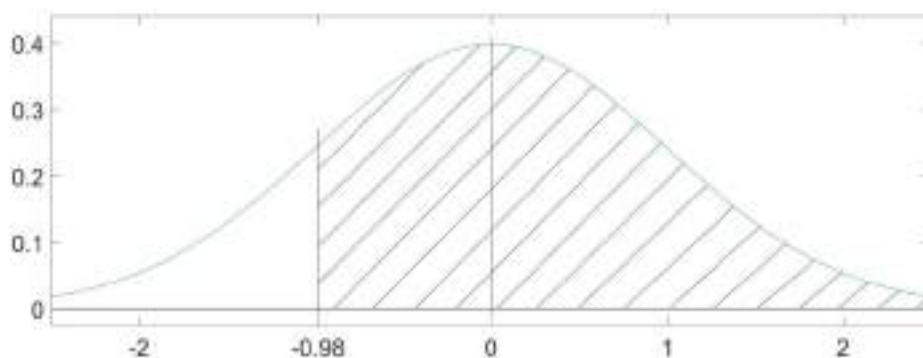
$$\tilde{X} \rightarrow N(1470, 21) \Rightarrow Z = \frac{\tilde{X} - 1470}{21} \rightarrow N(0, 1),$$

de onde

corrección de $\frac{1}{2}$ punto

$$\begin{aligned} P(X \geq 1450) &\approx P(\tilde{X} > 1449.5) = P\left(Z > \frac{1449.5 - 1470}{21}\right) = P\left(Z > \frac{-20.5}{21}\right) \approx P(Z > -0.98) \\ &= P(Z < 0.98) \approx 0.8365. \end{aligned}$$

MATEMÁTICAS II



A área da zona raiada é igual á probabilidade pedida $P(Z > -0.98)$.

OPCIÓN B

EXEMPLOS DE RESPUESTAS / SOLUCIONES

ABAU
CONVOCATORIA DE XULLO
Ano 2019
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

OPCIÓN A

1)

- a) 0.75 puntos.**
- b) 1.25 puntos.**

2)

- a) 1 punto.**
- b) 2 puntos:**
 - i) 0.5 puntos polo debuxo do triángulo.
 - ii) 0.5 puntos pola obtención da ecuación da recta tanxente e do terceiro vértice.
 - iii) 0.5 puntos por cada unha das dúas áreas pedidas.

3)

- a) 1 punto.**
- b) 1 punto.**
- c) 1 punto.**

4)

- a) 1 punto.**
- b) 1 punto.**

OPCIÓN B

1)

- a) 1.25 puntos.**
- b) 0.75 puntos.**

2)

- a) 2 puntos.**
- b) 1 punto.**

3)

- a) 1.5 puntos.**
- b) 1.5 puntos.**

4)

- a) 0.75 puntos.**
- b) 1.25 puntos.**

MATEMÁTICAS II

(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

- 1.a) Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula os valores de m para que a matriz inversa de M sexa $\frac{1}{4}M$.
b) Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula a matriz X que verifica: $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$, sendo B^t e C^t as traspostas de B e C respectivamente.
- 2.a) Calcula: intervalos de crecemento e decrecemento e máximos e mínimos relativos de $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$
b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = x^2 - 4x$ e a recta $y = x - 4$. (Para o debuxo da parábola, indica: puntos de corte cos eixes, o vértice e concavidade ou convexidade).
3. a) Determina o valor de λ para que os puntos $A(3,0,-1)$, $B(2,2,-1)$, $C(1,-2,-5)$ e $D(\lambda,6,-1)$ sexan coplanares e calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que os contén.
b) Determina a posición relativa do plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ e a recta r que pasa polos puntos $P(-4,4,2)$ e $Q(4,8,-4)$. Se se cortan, calcula o punto de corte.
c) Calcula o punto simétrico do punto $P(-4,4,2)$ respecto do plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$.
4. Nas rebaixas duns grandes almacéns están mesturadas e á venda 200 bufandas da marca A, 150 da marca B e 50 da marca C. A probabilidade de que unha bufanda da marca A sexa defectuosa é 0,01; 0,02 se é da marca B e 0,04 se é da marca C. Unha persoa elixe unha bufanda ao azar
a) Calcula a probabilidade de que a bufanda elixida sexa da marca A ou defectuosa.
b) Calcula a probabilidade de que a bufanda elixida non sexa defectuosa nin da marca C.
c) Se a bufanda elixida non é defectuosa, cal é a probabilidade de que sexa da marca B?

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións:
$$\begin{cases} 3x - 6y + mz = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = m \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 3$.
2. a) Calcula a e b para que a función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + ax + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + 2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sexa continua e derivable en $x = 0$.
b) Calcula os vértices do rectángulo de área máxima que se pode construír, se un dos vértices é o $(0,0)$, outro está sobre o eixe X , outro sobre el eixe Y e o outro sobre a recta $2x + 3y = 8$.
c) Calcula $\int_0^3 x\sqrt{x+1} \, dx$.
3. a) Dado o plano $\pi: 2x - y - 2z - 3 = 0$, calcula o valor de a para que a recta r que pasa polos puntos $P(a,a,a)$ e $Q(1,3,0)$ sexa paralela ao plano π .
b) Para $a = 1$, calcula a distancia de r a π .
c) Para $a = 1$, calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a π e contén a r .
4. a) Un exame tipo test consta de 10 preguntas, cada unha con 4 respostas das cales só unha é correcta. Se se contesta ao azar, cal é a probabilidade de contestar ben polo menos dúas preguntas?
b) A duración dun certo tipo de pilas eléctricas é unha variable que segue unha distribución normal de media 50 horas e desviación típica 5 horas. Calcula a probabilidade de que unha pila eléctrica deste tipo, elixida ao azar, dure menos de 42 horas.

MATEMÁTICAS II

(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
 - a) Que relación existe entre a súa inversa A^{-1} e a súa trasposta A^t ?
 - b) Estuda, segundo os valores de λ , o rango de $A - \lambda I$, sendo I a matriz identidade de orde 3. Calcula as matrices X que verifican $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. a) Enuncia o teorema de Rolle. Calcula a , b e c para que a función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & \text{se } x < 1 \\ bx + c & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ cumpra as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo $[0,2]$ e calcula o punto no que se cumpre o teorema.
b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = x^2 - 2x$ e a recta $y = x$. (Para o debuxo da parábola, indica: puntos de corte cos eixes de coordenadas, o vértice e concavidade ou convexidade).
3. Dada a recta $r: \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$
 - a) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa polo punto $A(1,1,1)$ e é perpendicular a r .
 - b) Calcula a ecuación implícita o xeral do plano que pasa polos puntos $P(-1,0,6)$ e $Q(3,-2,4)$ e é paralelo á recta r .
 - c) Calcula a distancia da recta r ao plano $x + y + z - 5 = 0$.
4. Nun bombo temos 10 bolas idénticas numeradas do 0 ao 9 e cada vez que facemos una extracción devolvemos a bola ao bombo
 - a) Se facemos 5 extraccións, calcula a probabilidade de que o 7 saia menos de dúas veces.
 - b) Se facemos 100 extraccións, calcula a probabilidade de que o 7 saia menos de nove veces.

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións: $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$
b) Resólveo, se é posible, cando $m = 1$.
2. a) Calcula, se existe, o valor de m para que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + mx^2 - 1}{\sin(x^2)} = 3$
b) Calcula os valores de a, b, c e d para que a función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ teña un punto de inflexión no punto $(0,5)$ e a tanxente á súa gráfica no punto $(1,1)$ sexa paralela ao eixe X .
c) Calcula $\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx$ (Nota: $\ln = \text{logaritmo neperiano}$)
3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $P(9,4,1)$ e $Q(1,1,1)$. Dada a recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1}$
 - a) Estuda a posición relativa das rectas r e s . Calcula, se se cortan, o punto de corte.
 - b) Calcula, se existe, a ecuación implícita ou xeral do plano que contén as rectas r e s .
 - c) Calcula a distancia do punto $O(0,0,0)$ á recta s .
4. Nunha fábrica hai tres máquinas A, B e C que producen a mesma cantidade de pezas. A máquina A produce un 2% de pezas defectuosas, a B un 4% e a C un 5%.
 - a) Calcula a probabilidade de que unha peza elixida ao azar sexa defectuosa.
 - b) Se se elixe unha peza ao azar e resulta que non é defectuosa, cal é a probabilidade de que fora fabricada pola máquina A?

ABAU
CONVOCATORIA DE XUÑO
Ano 2018
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

OPCIÓN A

1) a) 1 punto

b) 1 punto

2) a) 1,5 puntos

- 0,75 puntos pola determinación do máximo relativo.
- 0,75 puntos pola determinación dos intervalos de crecemento e decrecemento.

b) 1,5 puntos

- 0,75 puntos polo debuxo da rexión.
- 0,75 puntos pola formulación e cálculo da área coma unha integral definida.

3) a) 1 punto:

- 0,5 puntos pola determinación de λ .
- 0,5 puntos pola ecuación do plano.

b) 1 punto

- 0,5 puntos pola posición relativa do plano e a recta.
- 0,5 puntos polo cálculo do punto de corte.

c) 1 punto

4) a) 0,75 puntos

b) 0,5 puntos

c) 0,75 puntos

OPCIÓN B

1) a) 1 punto

b) 1 punto

2) a) 1 punto:

➤ 0,5 puntos pola continuidade.

➤ 0,5 puntos pola derivabilidade.

b) 1 punto

c) 1 punto

3) a) 1 punto

b) 1 punto

c) 1 punto

4) a) 1 punto

b) 1 punto

ABAU
CONVOCATORIA DE SETEMBRO
Ano 2018
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

OPCIÓN A

1) a) 0,5 puntos

b) 1,5 puntos

- 0,5 puntos pola determinación do rango de $A - \lambda I$, segundo os valores de λ .
- 1 punto pola determinación das matrices X .

2) a) 1,5 puntos

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Rolle.
- 0,5 puntos pola determinación de a, b e c .
- 0,5 puntos pola determinación do punto no que se cumpre o teorema de Rolle.

b) 1,5 puntos

- 0,5 puntos polo debuxo da rexión.
- 0,5 puntos pola formulación da área.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

3) a) 1 punto

b) 1 punto

c) 1 punto

4) a) 1 punto

b) 1 punto

OPCIÓN B

1) a) 1 punto

b) 1 punto

2) a) 1 punto

b) 1 punto

c) 1 punto

3) a) 1 punto:

- 0,5 puntos polo estudo da posición relativa das rectas.
- 0,5 puntos polo cálculo do punto de corte.

b) 1 punto

c) 1 punto

4) a) 1 punto

b) 1 punto

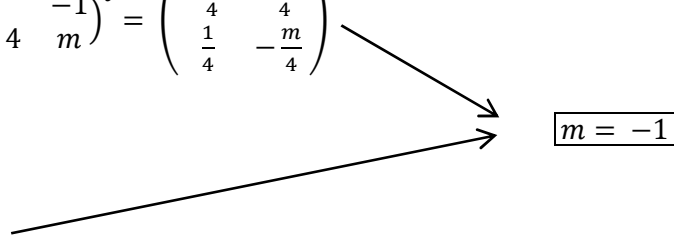
Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

$$\text{a) } |M| = \begin{vmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - m - 4 = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$$

$$M^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -m-4 & m \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{m+4}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{m}{4} \end{pmatrix}$$


$$\frac{1}{4} M = \begin{pmatrix} \frac{m}{4} & \frac{m+4}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Outra forma de resolvelo:

$$M^{-1} = \frac{1}{4} M \Leftrightarrow \frac{1}{4} M \cdot M = I \Leftrightarrow M^2 = 4I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m^2 + m + 4 & m^2 + 5m + 4 \\ m + 1 & m + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

E polo tanto

$$\boxed{m = -1}$$

$$\text{b) } B^t \cdot A \cdot X + C^t = X \Leftrightarrow (B^t \cdot A - I)X = -C^t$$

$$B^t \cdot A - I = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|B^t \cdot A - I| = -3 \neq 0 \Rightarrow \exists (B^t \cdot A - I)^{-1}$$

$$(B^t \cdot A - I)^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \end{pmatrix}$$

Entón:

$$X = -(B^t \cdot A - I)^{-1} \cdot C^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}}$$

Outra forma:

$$(B^t \cdot A - I)X = -C^t \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 3z = -4 \\ -y = 2 \\ -x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -4/3 \\ y = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{E así: } X = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a) $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Polo tanto, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \frac{2x - x^2}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{-x^3 - 3x^2(2-x)}{x^6} = \frac{-x - 3(2-x)}{x^4} = \frac{2x-6}{x^4}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ f''(2) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Máximo relativo en } x = 2}$$

Para estudar o crecemento e decrecemento, podemos facer a seguinte táboa (temos un máximo relativo en $x = 2$ e o 0 non está no dominio da función):

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0
$f(x)$			

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{Crecente en } (0, 2) \\ \text{Decrecente en } (-\infty, 0) \text{ e en } (2, \infty) \end{array}}$

b) Estudo da parábola:

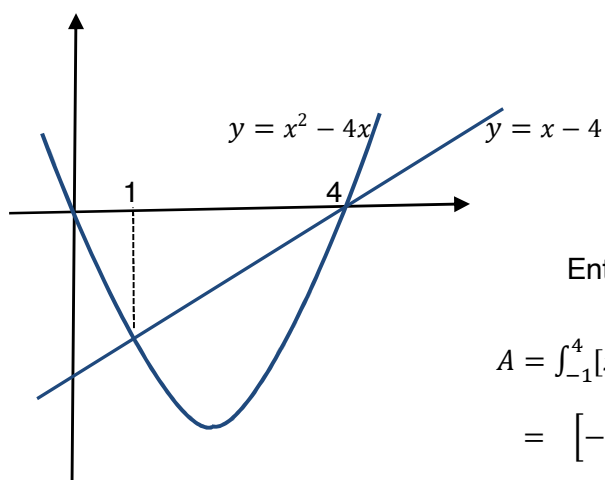
$y = x^2 - 4x = x(x - 4) \Rightarrow$ Puntos de corte cos eixes: $(0, 0)$ e $(4, 0)$

$y' = 2x - 4 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow$ Vértice: $(2, -4)$.

$y'' = 2 \Rightarrow$ Convexa.

Puntos de corte da recta e a parábola:

$$x^2 - 4x = x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \begin{array}{l} 4 \\ 1 \end{array} \Rightarrow (1, -3), (4, 0)$$



Entón, a área ven dada pola integral definida

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^4 [x - 4 - (x^2 - 4x)] dx = \int_{-1}^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_{-1}^4 = -\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{9}{2} u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

- a) Os vectores $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-2, -2, -4)$ non son proporcionais. Polo tanto, os puntos A , B e C non están aliñados e determinan un plano π (o punto $A \in \pi$ e os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ determinan π)

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8(x-3) - 4y + 6(z+1) = 0$$

$$\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$$

Para determinar λ , impoñemos que $D \in \pi$:

$$4\lambda + 12 + 3 - 15 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Tamén poderíamos determinar λ coa condición $\text{rang}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 2$

- b) O vector director da recta r e o vector normal ao plano π son:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (8, 4, -6) \\ \vec{n}_\pi = (4, 2, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{n}_\pi \Rightarrow \boxed{r \text{ e } \pi \text{ córtanse (son perpendiculares)}}$$

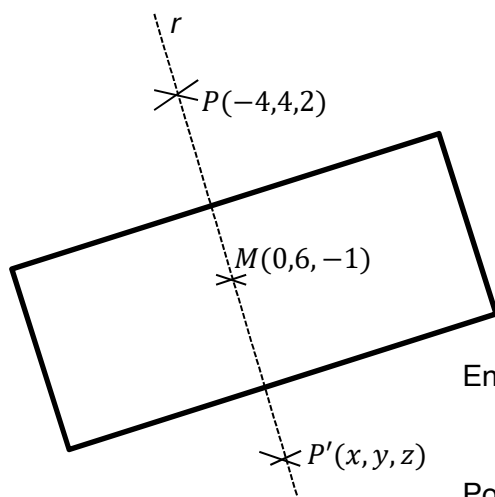
Para determinar o punto de corte da recta e o plano, consideramos as ecuacións paramétricas da recta ($P \in r$, $\vec{v}_r$ é un vector director) e substituímos na ecuación do plano

$$r: \begin{cases} x = -4 + 8\lambda \\ y = 4 + 4\lambda \\ z = 2 - 6\lambda \end{cases} \Rightarrow -16 + 32\lambda + 8 + 8\lambda - 6 + 18\lambda - 15 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/2$$

Substituíndo este valor de λ nas ecuacións paramétricas, obtemos o punto de corte da recta e o plano

$$\boxed{M(0, 6, -1)}$$

c)



Temos que:

M é o punto de corte de r e π
 $P(-4, 4, 2)$ é un punto de r
 r é perpendicular a π

Entón M é o punto medio de P e o seu simétrico $P'(x, y, z)$

Polo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \frac{x-4}{2} \\ 6 = \frac{y+4}{2} \\ -1 = \frac{z+2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P'(4, 8, -4)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

a) Sexan:

A = "A bufanda é da marca A"

B = "A bufanda é da marca B"

C = "A bufanda é da marca C"

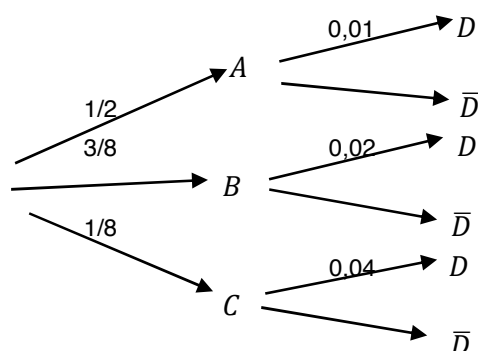
D = "A bufanda é defectuosa"

Entón temos:

$$P(A) = \frac{200}{200+150+50} = \frac{1}{2} = 0,5; \quad P(B) = \frac{150}{200+150+50} = \frac{3}{8} = 0,375; \quad P(C) = \frac{50}{200+150+50} = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$P(D/A) = 0,01; \quad P(D/B) = 0,02; \quad P(D/C) = 0,04$$

Podemos facer o seguinte diagrama en árbore:



a) Pola fórmula da probabilidade total, podemos calcular a probabilidade de que unha bufanda, elexida ao azar, sexa defectuosa:

$$P(D) = P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B) + P(D/C) \cdot P(C) = 0,01 \cdot 0,5 + 0,02 \cdot 0,375 + 0,04 \cdot 0,125 = 0,0175$$

E a probabilidade de que unha bufanda, elexida ao azar, sexa da marca A ou defectuosa será:

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = 0,5 + 0,0175 - 0,5 \cdot 0,01 = \boxed{0,5125}$$

b) Para calcular a probabilidade de que unha bufanda, elexida ao azar, non sexa defectuosa nin da marca C usamos as leis de Morgan

$$\begin{aligned} P(\bar{D} \cap \bar{C}) &= P(\overline{D \cup C}) = 1 - P(D \cup C) = 1 - [P(D) + P(C) - P(D \cap C)] \\ &= 1 - 0,0175 - 0,125 + 0,04 \cdot 0,125 = \boxed{0,8625} \end{aligned}$$

c) Se sabemos que a bufanda non é defectuosa, queremos calcular a probabilidade de que sexa da marca B

$$P(B/\bar{D}) = \frac{P(B \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(B \cap \bar{D})}{1 - P(D)} = \frac{0,98 \cdot 0,375}{1 - 0,0175} = \boxed{0,374}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C :

$$\left. \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 3 & -6 & m \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m - 6 + 2m - 3 = 3m - 9 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{cases} \text{rang}(C) = 2 \text{ se } m = 3 \\ \text{rang}(C) = 3 \text{ se } m \neq 3 \end{cases}$$

Cálculo do rango da matriz ampliada (lembramos que sempre $\text{rang}(A) \geq \text{rang}(C)$):

- $m \neq 3 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$ (neste caso $\text{rang}(C) = 3$)
- $m = 3 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$ (se $m = 3$, 1ª ecuación = 3*2ª ecuación e $\text{rang}(C) = 2$)

Discusión:

$m = 3 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(A) < n^{\circ} \text{ incógnitas. Sistema compatible indeterminado.}$
 $m \neq 3 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3 = \text{rang}(A) = n^{\circ} \text{ incógnitas. Sistema compatible determinado.}$

b) Para $m = 3$ xa vimos que era un sistema compatible indeterminado (infinitas solucións).

Un sistema equivalente ao dado é:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -z \\ x + y = 3 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{cases} 3y = z + 3 \Rightarrow y = \frac{z}{3} + 1 \\ 3x = -z + 6 \Rightarrow x = -\frac{z}{3} + 2 \end{cases}$$

As infinitas solucións son

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\lambda}{3} + 2 \\ y &= \frac{\lambda}{3} + 1; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z &= \lambda \end{aligned}$$

Tamén poderíamos resolver o exercicio polo método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1^a) - 3*(2^a) \\ (3^a) - (2^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & m-3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & m \end{array} \right)$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Se $m = 3$ suprimíse a primeira fila (queda unha fila de 0) e o sistema é compatible indeterminado

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -z \\ 3y = 3 + z \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x = -z + 2\left(1 + \frac{z}{3}\right) = 2 - z/3 \\ y = 1 + \frac{z}{3} \end{array}$$

as infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 2 - \frac{\lambda}{3} \\ y = 1 + \frac{\lambda}{3}; \\ z = \lambda \end{array} \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

se $m \neq 3$ o sistema é compatible determinado. Para cada valor de m , temos un sistema distinto con solución única.

Exercicio 2:

a) Para que a función sexa continua en $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{2x} + ax + b) = 1 + b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}(x^2 + 2)\right) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad 1 + b = 1 \Rightarrow b = 0$$

Por outra parte

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2e^{2x} + a) = 2 + a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{array}$$

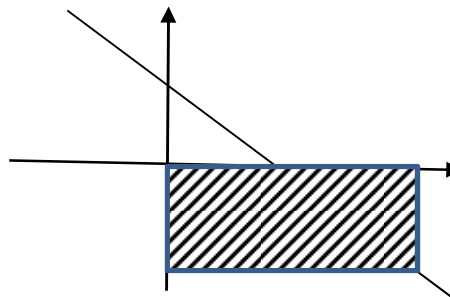
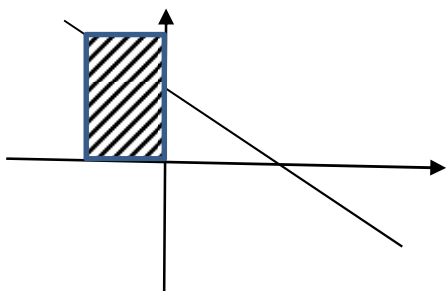
Polo tanto, para que a función sexa derivable en $x = 0$, debe cumprirse:

$$\left. \begin{array}{l} b = 0 \\ 2 + a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a = -2; b = 0}$$

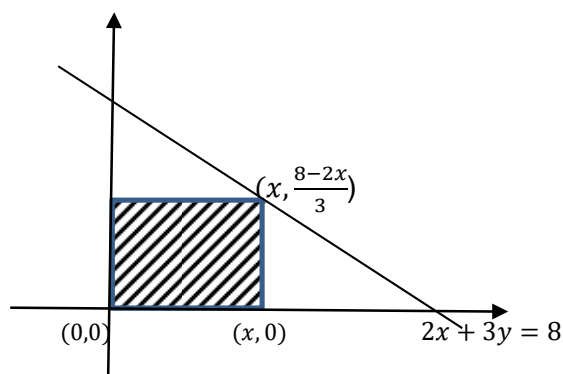
Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

b) A área non está acotada se o rectángulo está situado no segundo ou cuarto cuadrante



Se o rectángulo está situado no primeiro cuadrante:



Función a maximizar (área do rectángulo):

$$A(x) = \frac{x(8-2x)}{3} = \frac{8x-2x^2}{3}$$

Determinamos os puntos críticos:

$$A'(x) = \frac{1}{3}(8-4x)$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$A''(x) = -4/3$$

$\Rightarrow$ máximo en $x = 2$

Polo tanto:

$$\boxed{\text{Vértices: } (0,0), (2,0), (0,4/3), (2,4/3)}$$

c) Calculamos a integral indefinida utilizando o cambio de variable: $x+1 = t^2$; $dx = 2tdt$

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+1} dx &= \int (t^2 - 1) \cdot 2t^2 dt = \int (2t^4 - 2t^2) dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + k = \\ &= \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + k \end{aligned}$$

E calculamos a integral definida aplicando a regra de Barrow:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx = \left[\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \right]_0^3 = \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right) = \frac{62}{5} - \frac{14}{3} = \boxed{\frac{116}{15}}$$

Tamén poderíamos calcular a integral indefinida polo método de integración por partes:

$$\int x\sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + k$$

E aplicando a regra de Barrow:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx = \left[\frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} \right]_0^3 = \frac{48}{3} - \frac{128}{15} + \frac{4}{15} = \frac{240}{15} - \frac{124}{15} = \boxed{\frac{116}{15}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) A recta que pasa polos puntos P e Q ten como vector director:

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (1 - a, 3 - a, -a)$$

Por outra parte, un vector normal ao plano é:

$$\vec{n}_\pi = (2, -1, -2).$$

Entón

$$r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \Leftrightarrow 2(1 - a) - (3 - a) + 2a = 0 \Leftrightarrow 2 - 2a - 3 + a + 2a = 0$$

$$\boxed{a = 1}$$

b) Polo apartado anterior, sabemos que se $a = 1$, a recta e o plano son paralelos, polo tanto a distancia entre a recta e o plano é igual á distancia entre un punto da recta (por exemplo P) e o plano

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|2 - 1 - 2 - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \boxed{4/3 \text{ u}}$$

c) Sexa α o plano buscado. O plano α está determinado polos elementos seguintes

$$P(1,1,1) \in r \Rightarrow P(1,1,1) \in \alpha$$

$$\vec{v}_r = (0, 2, -1)$$

$$\vec{n}_\pi = (2, -1, -2)$$

Son vectores contidos no plano α

Polo tanto:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow -5(x-1) - 2(y-1) - 4(z-1) = 0$$
$$\Rightarrow -5x - 2y - 4z + 11 = 0$$

$$\boxed{\alpha : 5x + 2y + 4z - 11 = 0}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

- a) Sexa $X = n^\circ$ de respostas acertadas. Trátase dunha distribución binomial $B(10; 0,25)$, pois a probabilidade de contestar ben unha pregunta é a mesma nos dez casos: 0,25

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^9 = 1 - 0,0563 - 0,1877 \\ &= \boxed{0,756} \end{aligned}$$

- b) Sea X la duración, en horas, de las pilas. X sigue una distribución normal $N(50; 5)$

$$\begin{array}{ccc} \text{Tipificación} & \frac{X-50}{5} = Z \longrightarrow & N(0,1) \\ \downarrow & \swarrow & \\ P(X < 42) = P\left(\frac{X-50}{5} < \frac{42-50}{5}\right) & = P(Z < -1,6) = P(Z > 1,6) = 1 - P(Z \leq 1,6) \\ & = 1 - 0,9452 = \boxed{0,0548} \end{array}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^t \cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{A^t = A^{-1}}$$

Tamén poderíamos calcular A^{-1} utilizando Gauss: no primeiro paso intercambiamos a primeira e a segunda fila. No segundo paso intercambiamos a segunda e terceira fila e finalmente cambiamos de signo a tódalas filas

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e vemos que } \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^t}$$

Tamén se podería calcular A^{-1} utilizando determinantes:

$$|A| = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^t$$

b)

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 1$$

$$\text{Polo tanto: } |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 1 = 0.$$

$\lambda = -1$ é unha solución da ecuación $\lambda^3 + 1 = 0$. Como $\lambda^3 + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$ e $\lambda^2 - \lambda + 1$ non ten solucións reais, temos

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Se } \lambda = -1, & \quad \text{entón } \text{rang}(A - \lambda I) = 2 \\ \text{Se } \lambda \neq -1, & \quad \text{entón } \text{rang}(A - \lambda I) = 3 \end{aligned}}$$

$$AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A + I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e vimos que } A + I \text{ non ten inversa. Entón:}$$

$$(A + I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{x = y = z\}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Teorema de Rolle: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) e con $f(a) = f(b)$ entón existe polo menos un punto $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.

Se $x \neq 1$, $f(x)$ é continua e derivable pois son funcións polinómicas,

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = b + c \\ f(1) = b + c \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Para que sexa continua en } x = 1} \\ 2 + a = b + c \end{array}$$
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 4 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = b \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Para que coincidan as derivadas laterais}} \\ 4 + a = b \end{array}$$

$$f(0) = f(2) \quad \Rightarrow \quad 0 = 2b + c$$

Polo tanto, para que se cumpran as hipóteses do teorema de Rolle,

$$\left. \begin{array}{l} a - b - c = -2 \\ a - b = -4 \\ 2b + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{c = -2; b = 1; a = -3}$$

Para estes valores, $f'(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

$$\text{Entón } f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 4\xi - 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\xi = 3/4}$$

b) Estudo da parábola:

$$y = x^2 - 2x = x(x - 2) \Rightarrow \text{Puntos de corte cos eixes: } (0,0) \text{ e } (2,0)$$

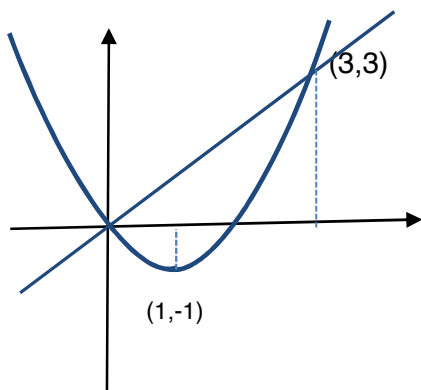
$$y' = 2x - 2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow \text{Vértice: } (1, -1).$$

$$y'' = 2 \Rightarrow \text{Convexa.}$$

Puntos de corte da recta e a parábola:

$$x^2 - 2x = x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 3. \text{ Córtanse nos puntos } (0,0) \text{ e } (3,3)$$

$y = x^2$ $y = x$



Entón, a área ven dada pola integral definida

$$A = \int_0^3 [x - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx =$$
$$= \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{9}{2} u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) Determinamos un vector director da recta r :

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, -2)$$

Como se pide un plano π_1 perpendicular á recta, entón $\vec{v}_r$ é un vector normal ao plano:

$$r \perp \pi_1 \Leftrightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{n}_{\pi_1}$$

e π_1 queda determinado polo punto $A(1,1,1)$ polo que pasa e o vector normal $\vec{n}_{\pi_1} = (2, 0, -2)$

$$\pi_1: 2(x-1) - 2(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_1: x - z = 0}$$

b) Este novo plano, π_2 , queda determinado polos elementos:

- $P(-1, 0, 6)$ que é un punto pertencente ao plano
- $\overrightarrow{PQ} = (4, -2, -2)$ é un vector do plano
- $\vec{v}_r = (2, 0, -2)$ é un vector do plano

Temos entón:

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x+1 & y & z-6 \\ 4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4(x+1) + 4y + 4(z-6) = 0$$

$$\boxed{\pi_2: x + y + z - 5 = 0}$$

c) Pídenos calcular a distancia da recta r ao plano π_2 . Vimos no apartado anterior que son paralelos, polo tanto podemos calcular esa distancia como a distancia dun punto calquera da recta ao plano:

$$P_r(1, 0, 1) \in r$$
$$d(r, \pi_2) = d(P_r, \pi_2) = \frac{|1 + 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{d(r, \pi_2) = \sqrt{3} u}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

Sexa X = “nº de extraccións nas que obtemos un 7”

- a) Evidentemente trátase de probas independentes, nas que a probabilidade de éxito non cambia

$$\left. \begin{array}{l} \text{número de extraccións} = n = 5 \\ \text{probabilidade de éxito} = p = 0,1 \end{array} \right\} X \rightarrow Bi(5; 0,1)$$

$$P(X < 2) = p(X = 0) + p(X = 1) = \binom{5}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^4 = 0,5905 + 0,3281 = 0,9185$$

$$\boxed{P(X < 2) = 0,9185}$$

- b) Neste caso

$$X \rightarrow Bi(100; 0,1)$$

Pero como

$$n \cdot p = 10 > 5$$

$$n \cdot q = 90 > 5$$

aproximamos a binomial X pola normal X' con media $\mu = n \times p = 100 \times 0,1 = 10$ e desviación típica $\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{100 \times 0,1 \times 0,9} = 3$

$$X \rightarrow Bi(100; 0,1) ; \quad X' \rightarrow N(10; 3)$$

Ademais aplicamos a corrección de medio punto ou corrección de Yates. Así

$$\begin{array}{ccc} \text{Tipificación} & & Z = \frac{X' - 10}{3} \rightarrow N(0,1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(X < 9) = P(X' \leq 8,5) = P\left(\frac{X' - 10}{3} \leq \frac{8,5 - 10}{3}\right) & = & P(Z \leq -0,5) = P(Z \geq 0,5) \\ & = & 1 - P(Z \leq 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085 \end{array}$$

$$\boxed{P(X < 9) = 0,3085}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

Dúas columnas proporcionais

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

Cálculo do rango de A :

Sempre $\text{rang}(A) \geq \text{rang}(C)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m - m - 2 = m - 1$$

$$\Rightarrow \text{rang}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } m \neq 1 \\ 2 & \text{se } m = 1 \end{cases}$$

Discusión:

$m = 1$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2 < 3 = n^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible indeterminado.

$m \neq 1$, $\text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A)$. Sistema incompatible.

b) Para $m = 1$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 + z \\ x = 1 + z \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

As infinitas solución son:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + mx^2 - 1}{\sin(x^2)} \stackrel{\frac{0}{0} \text{ (L'Hopital)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin 2x + 2mx}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4\cos 2x + 2m}{2x\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)} = \frac{-4 + 2m}{2}$$

Entón:

$$\frac{-4 + 2m}{2} = 3 \Rightarrow -4 + 2m = 6 \Rightarrow \boxed{m = 5}$$

b)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\text{Punto de inflexión no punto } (0,5): \begin{cases} f''(0) = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0} \\ f(0) = 5 \Rightarrow \boxed{d = 5} \end{cases}$$

Entón $f(x) = ax^3 + cx + 5$. Ademais

$$\text{Pasa polo punto } (1,1): f(1) = 1 \Rightarrow a + c + 5 = 1$$

$$\text{Tanxente á gráfica de } f(x) \text{ no punto } (1,1) \text{ paralela ao eixe } X: f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + c = 0$$

$$\begin{cases} 3a + c = 0 \\ a + c + 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -3a \\ a - 3a + 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 2}; \boxed{c = -6}$$

c) Podemos calcular a integral indefinida utilizando primeiro o método de substitución e despois o método de integración por partes:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt && \text{desfacemos o cambio} \\ \int \sqrt{x} \ln x dx &= \int 4t^2 \ln t dt = \int \frac{4}{3} t^3 \ln t dt - \frac{4}{3} \int t^2 dt = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} x \sqrt{x} + k \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} u = \ln t \Rightarrow du = dt/t \\ dv = 4t^2 \Rightarrow v = \frac{4}{3} t^3 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

ou ben calculala directamente por partes:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \ln x dx &= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \int \frac{2}{3} x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} + k \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = dx/x \\ dv = x^{1/2} dx \Rightarrow v = \frac{2}{3} x^{3/2} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Aplicando a regra de Barrow:

$$\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} \right]_1^e = \frac{2}{3} e^{3/2} - \frac{4}{9} e^{3/2} + \frac{4}{9}$$

$$\boxed{\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2}{9} e^{3/2} + \frac{4}{9}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a)

$$r: \begin{cases} P_r(9,4,1) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (-8, -3, 0) \end{cases} \quad s: \begin{cases} P_s(1,0,5) \in s \\ \vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (2, 1, -1) \end{cases}$$

Os vectores directores $\vec{v}_r = (-8, -3, 0)$ e $\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (2, 1, -1)$ das rectas non son proporcionais, polo tanto as rectas córtanse ou crúzanse. Para saber se se cortan ou se cruzan, calculamos o rango($\vec{P}_r, \vec{P}_s, \vec{v}_r, \vec{v}_s$):

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ -8 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{As rectas córtanse}}$$

Para calcular o punto de corte pasamos ás ecuacións paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = 9 - 8\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = 5 - \mu \end{cases}$$

Entón:

$$\begin{cases} 9 - 8\lambda = 1 + 2\mu \\ 4 - 3\lambda = \mu \\ 1 = 5 - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 = 9 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{Punto de corte } (9,4,1)}$$

b) Sexa π o plano buscado. O plano π está determinado por ($\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ non son proporcionais):

- O punto de corte das rectas (9,4,1) (π contén a r e a s)
- Un vector director $\vec{v}_r$ da recta r é un vector contido no plano (π contén á recta r)
- Un vector director $\vec{v}_s$ da recta r é un vector contido no plano (π contén á recta s)

$$\pi: \begin{vmatrix} x-9 & y-4 & z-1 \\ -8 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x-9) - 8(y-4) - 2(z-1) = 0$$

$$\boxed{\pi: 3x - 8y - 2z - 28 + 7 = 0}$$

c) Utilizamos a fórmula da distancia dun punto a unha recta:

$$\overrightarrow{OP_s} = (1,0,5) \Rightarrow \overrightarrow{OP_s} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-5, 11, 1)$$

$$d(O, s) = \frac{|\overrightarrow{OP_s} \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{5^2 + 11^2 + 1^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{\frac{147}{6}} = \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

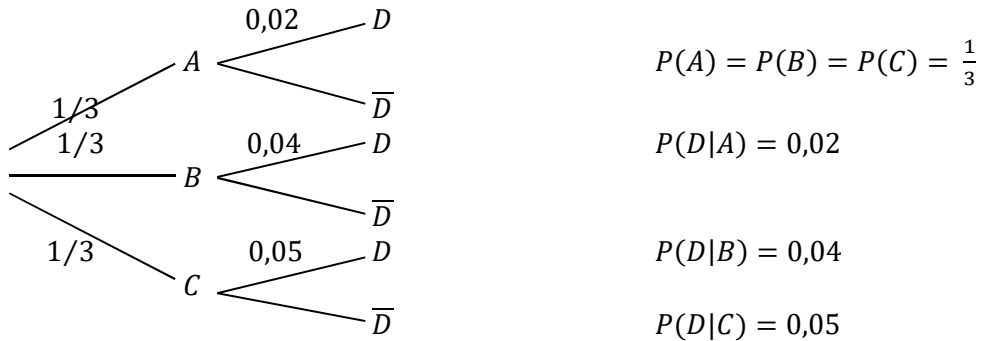
$$\boxed{d(O, s) = \frac{7\sqrt{2}}{2} u}$$

Exemplos de resposta / Soluciones

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

Podemos facer o seguinte diagrama en árbore (D =peza defectuosa):



a) Pola fórmula da probabilidade total:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C) = 0,02 \cdot \frac{1}{3} + 0,04 \cdot \frac{1}{3} + 0,05 \cdot \frac{1}{3} \\ &= 0,11 \cdot \frac{1}{3} = 0,03667 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(D) = 0,03667}$$

b)

$$P(A|\bar{D}) = \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D}|A) \cdot P(A)}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D}|A) \cdot P(A)}{1 - P(D)} = \frac{(1 - 0,02) \cdot \frac{1}{3}}{1 - 0,03667} = 0,3391$$

$$\boxed{P(A|\bar{D}) = 0,3391}$$

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 2 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 3 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina, segundo os valores de λ , o rango da matriz $AA^t - \lambda I$, sendo A^t a matriz trasposta de A e I a matriz unidade de orde 2.

b) Determina a matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifica a ecuación matricial $AA^t X = 6X$.

2. a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - \cos 2x}$

b) Deséxase construír unha caixa de base cadrada, con tapa e cunha capacidade de 80 dm^3 . Para a tapa e a superficie lateral quérese utilizar un material que custa 2€/dm^2 e para a base outro que custa 3€/dm^2 . Calcula as dimensións da caixa para que o seu custo sexa mínimo

c) Calcula $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$

3. Dados os planos $\pi_1: x + y - z + 2 = 0$; $\pi_2: \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa de π_1 e π_2 . Se se cortan, calcula o ángulo que forman.

b) Sexa r a recta que pasa polo punto $P(1,1,1)$ e é perpendicular a π_1 . Calcula o punto de corte de r e π_1 .

c) Calcula o punto simétrico do punto $P(1,1,1)$ respecto do plano π_1

4. a) Nun experimento aleatorio, sexan A e B dous sucesos con $P(\bar{A}) = 0,4$; $P(B) = 0,7$. Se A e B son independentes, calcula $P(A \cup B)$ e $P(A - B)$. (Nota: $\bar{A}$ suceso contrario ou complementario de A).

b) Nun grupo de 100 persoas hai 40 homes e 60 mulleres. Elíxense ao azar 4 persoas do grupo, ¿cal é a probabilidade de seleccionar máis mulleres que homes?

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 1$.

2. a) Calcula os valores a, b para que a función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{se } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$ sexa derivable en $x = 3$ e determina o punto no que a tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á recta $x + 3y = 0$.

b) Se $P(x)$ é un polinomio de terceiro grao, cun punto de inflexión no punto $(0,5)$ e un extremo relativo no punto $(1,1)$, calcula $\int_0^1 P(x) dx$.

3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $P(1,0,5)$ e $Q(5,2,3)$

a) Calcula a distancia do punto $A(5, -1, 6)$ á recta r .

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a r e pasa polo punto $A(5, -1, 6)$.

c) Calcula a área do triángulo de vértices os puntos $P(1,0,5)$, $A(5, -1, 6)$ e o punto de corte da recta r co plano $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$.

4. Nun estudo realizado nun centro de saúde, observouse que o 30% dos pacientes son fumadores e destes, o 60% son homes. Entre os pacientes que non son fumadores, o 70% son mulleres. Elixido un paciente ao azar,

a) Calcula a probabilidade de que o paciente sexa muller

b) Se o paciente elixido é home, ¿cal é a probabilidade de que sexa fumador?

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 2 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 3 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

a) Determina, segundo os valores de k , o rango das matrices AB e BA .

b) Para o valor $k = 0$, determina as matrices X que verifican $ABX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Calcula: i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3e^{2x}}{x + e^{2x}}$; ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3e^{2x}}{x + e^{2x}}$

b) A derivada dunha función $f(x)$, que ten por dominio $(0, \infty)$, é $f'(x) = 1 + \ln x$. Determina a función $f(x)$ tendo en conta que a súa gráfica pasa polo punto $(1, 4)$.

c) Determina, se existen, os máximos e mínimos relativos de $f(x)$.

3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $(0, 1, 3)$ e $(1, 1, 1)$ e s a recta $s: \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa.

b) ¿É s paralela ao plano YZ ? ¿Está contida no devandito plano?

c) Calcula a distancia da recta r ao plano $\pi: 2x + z = 0$.

4. Sexan A e B dous sucesos con $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,6$ e $P(A \cup B) = 0,9$

a) ¿Son A e B sucesos independentes? Xustifica a resposta.

b) Calcula $P(A - B)$ e $P(A/\bar{B})$. (Nota: $\bar{B}$ suceso contrario ou complementario de B).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x - y + z = m \\ x + my - 2z = m \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 0$.

2. Dada a función $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

a) Estuda, en $x = 0$, a continuidade e derivabilidade de $f(x)$.

b) Determina os puntos da gráfica de $f(x)$ nos que a recta tanxente é paralela á recta $x - 4y = 0$ e determina as ecuacións desas rectas tanxentes.

c) Calcula $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

3. Dados os planos $\alpha: 2x - 2y + 4z - 7 = 0$; $\beta: \begin{cases} x = 1 - \lambda + 3\mu \\ y = 5 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases}$; e a recta $r: \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa dos planos α e β . Calcula a distancia entre eles.

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a α e contén á recta r .

c) Sexan P e Q os puntos de corte da recta r cos planos XY e YZ respectivamente. Calcula a distancia entre P e Q .

4. O total de vendas diarias nun pequeno restaurante é unha variable que segue unha distribución normal de media 1220€ ao día e desviación típica 120€ ao día.

a) Calcula a probabilidade de que nun día elixido ao azar as vendas excedan de 1400€.

b) Se o restaurante debe vender polo menos 980€ ao día para cubrir os gastos, ¿cal é a probabilidade de que un día elixido ao azar, o restaurante non cubra gastos?

ABAU
CONVOCATORIA DE XUÑO
Ano 2017
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

OPCIÓN A

1) a) 1 punto:

- 0,25 puntos pola obtención da matriz $AA^t - \lambda I$
- 0,75 puntos pola determinación do rango (0,25 por cada caso: $\lambda=0$; $\lambda=6$; $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq 6$)

b) 1 punto

2) a) 0,5 puntos

b) 1,25 puntos

- 0,5 puntos pola obtención da función a minimizar
- 0,5 puntos pola obtención dos valores que minimizan o custo
- 0,25 puntos pola xustificación do mínimo.

c) 1,25 puntos

- 0,5 puntos pola integral por partes
- 0,5 puntos pola integral racional
- 0,25 puntos pola aplicación de Barrow

3) a) 1 punto:

- 0,5 puntos pola xustificación de que os planos se cortan
- 0,5 puntos pola xustificación de que son perpendiculares

b) 1 punto

c) 1 punto

4) a) 1 punto:

- 0,5 puntos polo cálculo de $P(A \cup B)$.
- 0,5 puntos polo cálculo de $P(A - B)$.

b) 1 punto:

- 0,5 puntos pola formulación do problema
- 0,5 puntos polo cálculo da probabilidade pedida

OPCIÓN B

1) a) 1 punto

b) 1 punto

2) a) 1,5 puntos:

- 0,5 puntos pola condición de continuidade
- 0,5 puntos pola condición de derivable.
- 0,5 puntos pola obtención do punto no que a tanxente á gráfica da función é paralela á recta dada.

b) 1,5 puntos:

- 1 punto pola obtención do polinomio de terceiro grao (0,5 puntos pola determinación dos coeficientes a partir da condición de punto de inflexión e 0,5 puntos pola determinación dos coeficientes a partir da condición de extremo relativo)
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida (0,25 puntos polo cálculo dunha primitiva e 0,25 puntos pola aplicación de Barrow)

3) a) 1 punto

b) 1 punto

c) 1 punto:

- 0,5 puntos pola determinación do punto de corte da recta co plano.
- 0,5 puntos polo cálculo da área do triángulo.

4) a) 1 punto

b) 1 punto

ABAU
CONVOCATORIA DE SETEMBRO
Ano 2017
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

OPCIÓN A

1) a) 1 punto:

- 0,5 puntos pola determinación do rango de AB
- 0,5 puntos pola determinación do rango de BA

b) 1 punto

2) a) 1 punto:

- 0,5 puntos polo apartado i)
- 0,5 puntos polo apartado ii)

b) 1 punto:

- 0,75 puntos pola integral indefinida
- 0,25 puntos pola determinación da constante

c) 1 punto:

- 0,5 puntos pola determinación do punto crítico
- 0,5 puntos pola determinación do mínimo relativo

3) a) 1 punto

b) 1 punto:

- 0,5 puntos pola xustificación de que a recta s é paralela ao YZ
- 0,5 puntos pola xustificación de que a recta s non está contida no plano YZ

c) 1 punto

4) a) 1 punto:

- 0,5 puntos polo cálculo de $P(A \cap B)$.
- 0,5 puntos pola xustificación de que os sucesos non son independentes

b) 1 punto:

- 0,5 puntos polo cálculo de $P(A - B)$.
- 0,5 puntos polo cálculo de $P(A/\bar{B})$.

OPCIÓN B

1) a) 1 punto

b) 1 punto

2) a) 1 punto:

- 0,5 puntos pola continuidade
- 0,5 puntos pola condición de derivabilidade

b) 1 punto:

- 0,5 puntos pola determinación dos puntos nos que a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á recta $x - 4y = 0$
- 0,5 puntos polas ecuacións das rectas tanxentes á gráfica de $f(x)$ nos puntos $x = -1$ e $x = 1$

c) 1 punto:

- 0,75 puntos polo cálculo da integral indefinida
- 0,25 puntos pola aplicación da regra de Barrow

3) a) 1 punto:

- 0,5 puntos polo estudo da posición relativa dos planos
- 0,5 puntos polo cálculo da distancia entre os planos

b) 1 punto

c) 1 punto:

- 0,5 puntos pola determinación de P e Q
- 0,5 puntos polo cálculo da distancia de P a Q

4) a) 1 punto

b) 1 punto

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

$$\text{a) } AA^t - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(AA^t - \lambda I) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 6\lambda = \lambda(\lambda - 6)$$

Polo tanto:

$\begin{aligned} \text{Se } \lambda \neq 0 \text{ e } \lambda \neq 6, \text{ rang}(AA^t - \lambda I) &= 2 \\ \text{Se } \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 6, \text{ rang}(AA^t - \lambda I) &= 1 \end{aligned}$

b)

$$AA^t X = 6X \Leftrightarrow (AA^t - 6I)X = 0$$

Sabemos polo apartado a) que a matriz $AA^t - 6I$ non ten inversa, polo que imos obter infinitas solucións

$$(AA^t - 6I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x - 3y = 0 \Rightarrow x = y$$

As infinitas solucións son

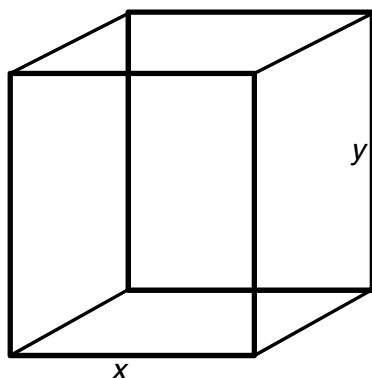
$X = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}$
--

Exercicio 2:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - \cos 2x} \overset{\frac{0}{0} \text{ (L'Hôpital)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x \cos x - 6x}{2xe^{x^2} + 2\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2 x - 2\sin^2 x - 6}{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} + 4\cos 2x} = -\frac{4}{6} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

b)



Sexan:

x = medida da base en dm

y = medida da altura en dm

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Como o volumen é 80dm^3 , temos que

$$x^2y = 80 \Rightarrow y = \frac{80}{x^2}$$

e o custo, función a minimizar, será

$$C(x) = 3x^2 + 2x^2 + 8x \cdot \frac{80}{x^2} = 5x^2 + \frac{640}{x}$$

Calculamos puntos críticos:

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 10x - \frac{640}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 10x^3 = 640 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4$$

Ademais

$$C''(x) = 10 + \frac{1280}{x^3} \Rightarrow C''(4) > 0$$

E polo tanto $C(x)$ ten un mínimo en $x = 4$. Para este valor resulta que $y = \frac{80}{16} = 5$

$$\boxed{\text{Dimensións: } x = 4 \text{ dm; } y = 5 \text{ dm}}$$

c)

Calculamos a integral indefinida

$$\begin{aligned} \int x \ln(1+x) dx &= \frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \int \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx = \\ &\left\{ \begin{array}{l} u = \ln(1+x) \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x} \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{grao numerador} > \text{grao denominador.} \\ \text{Facemos a división} \end{array} \right) \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln|1+x| + K \end{aligned}$$

Aplicamos a regra de Barrow:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \ln(1+x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln|1+x| \right]_0^1 = \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 x \ln(1+x) dx = \frac{1}{4}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) Os vectores normais aos planos son:

$$\vec{n}_{\pi_1} = (1, 1, -1)$$
$$\vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (3, -1, 2)$$

Como os vectores normais non son proporcionais, entón

Os planos córtanse

O ángulo α que forman os planos é o ángulo que forman os vectores normais

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}}{|\vec{n}_{\pi_1}| |\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{3 - 1 - 2}{\sqrt{1 + 1 + 1} \cdot \sqrt{9 + 1 + 4}} = 0$$

Polo tanto

$$\alpha = \pi/2; \pi_1 \text{ e } \pi_2 \text{ son perpendiculares}$$

b) Como a recta r é perpendicular ao plano π_1 , o vector $\vec{n}_{\pi_1}$ é un vector director de r . Ademais, a recta pasa polo punto $P(1,1,1)$. Con estes elementos podemos escribir as ecuacións paramétricas da recta:

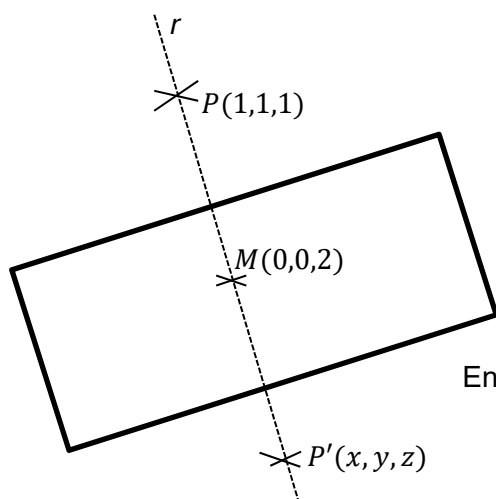
$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Para calcular o punto de corte da recta co plano, substituímos na ecuación de π_1

$$1 + \lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Sustituindo este valor de λ nas ecuacións paramétricas, obtemos o punto de corte da recta e o plano

$$M(0,0,2)$$



Temos que:

M é o punto de corte de r e π_1

$P(1,1,1)$ é un punto de r

r é perpendicular a π_1

Entón M é o punto medio de P e o seu simétrico $P'(x, y, z)$

Polo tanto:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{x+1}{2} \\ 0 &= \frac{y+1}{2} \\ 2 &= \frac{z+1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{P'(-1, -1, 3)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

a) $P(\bar{A}) = 0,4 \Rightarrow P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$

Como A e B son independentes:

$$P(A) = P(A/B)$$

Pero

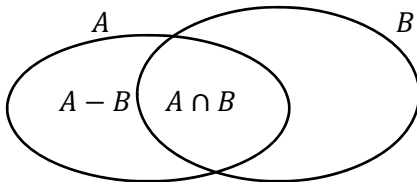
$$\left. \begin{array}{l} P(A) = P(A/B) \\ P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$$

Entón

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,7 - 0,42 = 0,88$$

$$\boxed{P(A \cup B) = 0,88}$$

Por outra parte,



$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

↑
Disxunta

Polo tanto

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A - B) = 0,6 - 0,42 = 0,18$$

$$\boxed{P(A - B) = 0,18}$$

b) Se chamamos

M = A persoa elexida é muller

H = A persoa elexida é home

Hai cinco casos posibles: MMMH, MMHM, MHMM, HMMM, MMMM

$$\begin{aligned} &P(MMMH) + P(MMHM) + P(MHMM) + P(HMMM) + P(MMMM) \\ &= \frac{6}{10} \cdot \frac{59}{99} \cdot \frac{58}{98} \cdot \frac{40}{97} + \frac{6}{10} \cdot \frac{59}{99} \cdot \frac{40}{98} \cdot \frac{58}{97} + \frac{6}{10} \cdot \frac{40}{99} \cdot \frac{59}{98} \cdot \frac{58}{97} + \frac{4}{10} \cdot \frac{60}{99} \cdot \frac{59}{98} \cdot \frac{58}{97} + \frac{6}{10} \cdot \frac{59}{99} \cdot \frac{58}{98} \cdot \frac{57}{97} \\ &= 0,3490 + 0,1243 = \boxed{0,4733} \end{aligned}$$

Tamén podemos resolvelo utilizando a aproximación pola distribución binomial

X = nº de mulleres nun grupo de 4 persoas

$$X \longrightarrow B(4; 0,6)$$

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} \cdot 0,6^3 \cdot (1 - 0,6) + \binom{4}{4} \cdot 0,6^4 = 0,3456 + 0,1296$$

Polo tanto

$$\boxed{P(X \geq 3) = 0,4752}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C :

$$\left. \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 1 + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

Cálculo do rango da matriz ampliada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m - m - 2 = m - 1$$

➤ $m \neq 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$

➤ $m = 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$

Discusión:

$m = 1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(A) < n^{\circ} \text{ incógnitas. Sistema compatible indeterminado.}$
 $m \neq 1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A) \text{ Sistema incompatible}$

c) Para $\boxed{m=1}$ xa vimos que era un sistema compatible indeterminado (infinitas solucións). Un sistema equivalente ao dado é:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 1 + z \\ x = 1 + z \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0$$

As infinitas solucións son

$$\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 0; \\ z = \lambda \end{array} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a) Para que a función sexa derivable en $x = 3$ ten que ser continua en $x = 3$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax^2 + b) = 9a + b \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x - 2) = 0 \\ f(3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 9a + b = 0$$

Por outra parte

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2ax = 6a$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-2} = 1$$

Polo tanto, para que a función sexa derivable en $x = 3$, debe cumprirse:

$$9a + b = 0$$

$$6a = 1 \Rightarrow a = 1/6$$

$$\Rightarrow b = -3/2$$

Temos entón

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2} & \text{se } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x & \text{se } x < 3 \\ \frac{1}{x-2} & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Hai que determinar un punto $(x_0, f(x_0))$ tal que $f'(x_0) = -\frac{1}{3} =$ pendente de $x + 3y = 0$

$$\frac{1}{3}x_0 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_0 = -1 < 3 \text{ que está no dominio de definición de } \frac{1}{3}x$$

$$\frac{1}{x_0-2} = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_0 = -1 > 3 \text{ Polo tanto non está no dominio de definición de } \ln(x-2)$$

$$\text{Punto: } \left(-1, -\frac{4}{3}\right)$$

b) $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$P''(x) = 6ax + 2b$$

A gráfica de $P(x)$ pasa polo punto (0,5)

$$P(0) = 5 \Rightarrow d = 5$$

$P(x)$ ten un punto de inflexión en $x = 0$

$$P''(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$P(x) = ax^3 + cx + 5$$

A gráfica de $P(x)$ pasa polo punto (1,1)

$$P(1) = 1 \Rightarrow a + c + 5 = 1$$

$P(x)$ ten un extremo relativo en $x = 1$

$$P'(1) = 0 \Rightarrow 3a + c = 0$$

$$\Rightarrow a = 2; c = -6$$

Entón

$$\int_0^1 P(x)dx = \int_0^1 (2x^3 - 6x + 5)dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 5x \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 3 + 5 = \frac{5}{2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) Calculamos un vector director da recta;

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (4, 2, -2)$$

E utilizando a fórmula da distancia dun punto a unha recta

$$d(A, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\|}{\|\vec{v}_r\|} = \frac{\sqrt{144+144}}{\sqrt{16+4+4}} = \sqrt{12} = \boxed{2\sqrt{3} u}$$

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (0, -12, -12)$$

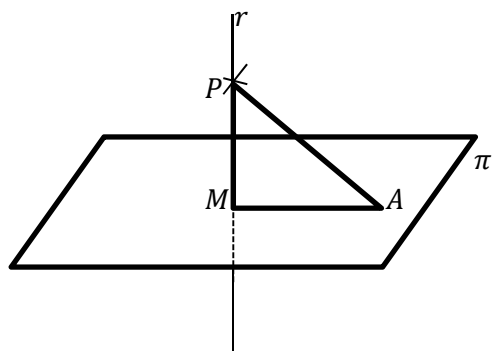
b) Sexa π o plano buscado e $\vec{n}_\pi$ un vector normal do plano

$$r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{n}_\pi$$

$$A \in \pi$$

$$\Rightarrow \pi : 4(x-5) + 2(y+1) - 2(z-6) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : 2x + y - z - 3 = 0}$$

c)



Para calcular o punto de corte, M , da recta r co plano π escribimos as ecuacións paramétricas da recta e substituímos na ecuación do plano

$$\left. \begin{array}{l} P(1,0,5) \in r \\ \vec{v}_r = (4,2,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 2(1+4\lambda) + 2\lambda - (5-2\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow 12\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

Levando este valor ás ecuacións paramétricas da recta obtemos $M(3,1,4)$. Como a recta é perpendicular ao plano, o triángulo é rectángulo con ángulo recto en M . Polo tanto

$$\text{Área } \triangle AMP = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{PM}| = \frac{1}{2} |(-2,2,-2)| \cdot |(2,1,1)| = \frac{1}{2} \sqrt{12} \cdot \sqrt{6} = \boxed{3\sqrt{2} u^2}$$

Tamén se podería calcular

$$\text{Área } \triangle AMP = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AP}| = \frac{1}{2} \sqrt{72} = \boxed{3\sqrt{2} u^2}$$

$$\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,6,6)$$

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

Se chamamos

H = “Un paciente é home”

M = “Un paciente é muller”

F = “Un paciente é fumador”

Datos:

$$P(F) = 0,3$$

$$P(H/F) = 0,6$$

$$P(M/\bar{F}) = 0,7$$

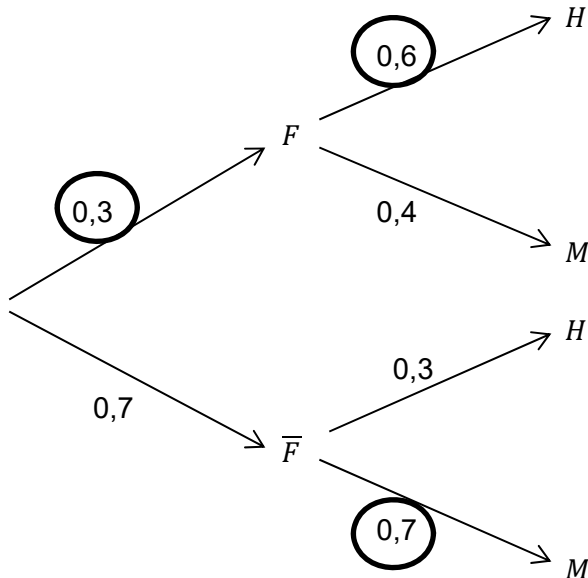
a) Polo teorema de probabilidades totales:

$$P(M) = P(M/F) \cdot P(F) + P(M/\bar{F}) \cdot P(\bar{F}) = 0,4 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,7 = 0,12 + 0,49 = \boxed{0,61}$$

b) Pola regra de Bayes:

$$P(F/H) = \frac{P(F \cap H)}{P(H)} = \frac{P(H/F) \cdot P(F)}{P(H)} = \frac{0,6 \cdot 0,3}{1 - 0,61} = \boxed{0,461}$$

Pódese facer un diagrama en árbol:



Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

$$\text{a) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ k+3 & k+1 & -3k-1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Así

$$|AB| = -4k - 4 - 6k - 18 - 12k - 4 + 12k + 12 + 6k + 2 + 4k + 12 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{rang}(AB) = 2}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & -2 \\ k+2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} k-2 & -2 \\ k+2 & 0 \end{vmatrix} = 2(k+2)$$

Polo tanto

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Se } k = -2, & \text{entón } \text{rang}(BA) = 1 \\ \text{Se } k \neq -2, & \text{entón } \text{rang}(BA) = 2 \end{array}}$$

b) Vimos que $\det(A \cdot B) = 0$ e polo tanto $A \cdot B$ non ten inversa. Se $k = 0$

$$A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

Como a terceira ecuación é suma das dúas primeiras, podemos prescindir dela

$$\begin{cases} x + y = 3z \\ 3x + y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3z - x \\ 3x + 3z - x = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4z \\ x = -z \end{cases}$$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 4\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercício 2:

a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+6e^{2x}}{1+2e^{2x}} = \boxed{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+6e^{2x}}{1+2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{4e^{2x}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ (L'Hôpital)} \right) \boxed{3}$$

b) $f(x)$ é a primitiva de $f'(x)$ passando pelo ponto (1,4)

$$\int (1 + \ln x) dx = x + \int \ln x dx = x + x \ln x - \int dx = x \ln x + K$$
$$\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = dx/x \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$f(1) = 4 \Rightarrow K = 4$$

Polo tanto

$$\boxed{f(x) = x \ln x + 4}$$

c)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1/e \text{ ponto crítico}$$

$$f''(x) = 1/x \Rightarrow f''(1/e) = e > 0$$

Polo tanto o ponto crítico é um mínimo

$$\boxed{\text{Mínimo relativo } (1/e, 4 - 1/e)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) Determinamos un punto e un vector director das rectas r e s :

$$r: \begin{cases} P_r = (0,1,3) \in r \\ \vec{v}_r = (1,1,1) - (0,1,3) = (1,0,-2) \end{cases} \quad s: \begin{cases} P_s = (1,0,0) \in s \\ \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (0,2,1) \end{cases}$$

Como os vectores directores das rectas non son proporcionais, as rectas córtanse ou crúzanse. Para saber se se cortan ou se se cruzan, estudamos o $\text{rang}(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s})$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4 + 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) = 3$$

Polo tanto

As rectas crúzanse

b)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vector normal ao plano } YZ: \vec{n} = (1,0,0) \\ \text{Vector director de } s: \vec{v}_s = (0,2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{v}_s \Rightarrow \boxed{s \text{ é paralela ao plano } YZ}$$

Para ver que a recta non está contida no plano chega encontrar un punto da recta que non esté no plano YZ ($\alpha: x = 0$):

$$\left. \begin{array}{l} P_s = (1,0,0) \in s \\ P_s = (1,0,0) \notin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{s \text{ non está contida no plano } YZ}$$

c)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1,0,-2) \\ \vec{n}_\pi = (2,0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{v}_r$$

Como o vector normal ao plano é perpendicular ao vector director da recta, a recta r é paralela ao plano π . Podemos polo tanto calcular a distancia da recta ao plano como a distancia dun punto calquera da recta ao plano:

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{5}}$$

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercício 4:

a)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

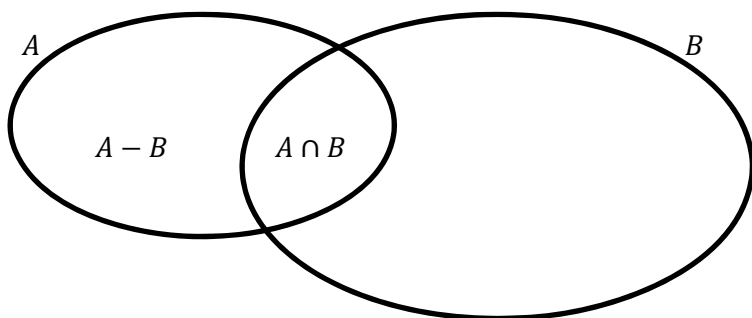
$$P(A \cap B) = 0,7 + 0,6 - 0,9 = 0,4$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3} \neq P(A) \Rightarrow \boxed{A \text{ e } B \text{ non son independentes}}$$

Tamén

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \boxed{A \text{ e } B \text{ non son independentes}}$$

b)



Disxuntos

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \Rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A - B) = 0,7 - 0,4 \Rightarrow \boxed{P(A - B) = 0,3}$$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A - B)}{1 - P(B)} = \frac{0,3}{1 - 0,6} = 3/4 \Rightarrow \boxed{P(A/\bar{B}) = 0,75}$$

Tamén podemos utilizar a probabilidade calculada no apartado anterior: $P(A \cap B) = 0,4$ e construír a táboa

	B	$\bar{B}$	
A	<u>0,4</u>	0,3	<u>0,7</u>
$\bar{A}$	0,2	0,1	0,3
	<u>0,6</u>	0,4	<u>1</u>

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,7 - 0,4 = \boxed{0,3}$$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,3}{0,4} = \boxed{0,75}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -2 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & m \\ 1 & m & -2 & m \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C :

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -2 \end{vmatrix} = 6 - 2 - 3m - 4 = -3m$$

$$\Rightarrow \text{rang}(C) = \begin{cases} 2 & \text{se } m = 0 \\ 3 & \text{se } m \neq 0 \end{cases}$$

Cálculo do rango de A :

Sempre $\text{rang}(A) \geq \text{rang}(C)$

A^* é unha matriz $3 \times 4 \Rightarrow \text{rang}(A) \leq 3$

$m \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3$

$m = 0 \Rightarrow$ a última columna de A é de ceros

$$\Rightarrow \text{rang}(C) = \text{rang}(A), \forall m$$

Discusión:

$m = 0$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2 < 3 = n^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible indeterminado.
 $m \neq 0$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible determinado.

b) Para $m = 0$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x - y = -z \end{cases}$$

Entón:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -(-2z) = 2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -(-3z) = 3z$$

As infinitas solucións son:

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Tamén podemos resolvelo por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & m \\ 3 & -2 & 0 & : & 0 \\ 1 & m & -2 & : & m \end{pmatrix} \xrightarrow[3^a - 1^a]{2^a - 3 \cdot 1^a} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & m \\ 0 & 1 & -3 & : & -3m \\ 0 & m+1 & -3 & : & m \end{pmatrix} \xrightarrow{3^a - 2^a} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & m \\ 0 & 1 & -3 & : & 0 \\ 0 & m & 0 & : & m \end{pmatrix}$$

➤ Se $m \neq 0$

$$3^a \text{ fila: } my = 3m \Rightarrow y = 3$$

$$2^a \text{ fila: } 3 - 3z = -3m \Rightarrow z = m + 1$$

$$1^a \text{ fila: } x - 3 + m + 1 = m \Rightarrow x = 2$$

} $\Rightarrow$ *Sistema compatible determinado. Solución única*

➤ Se $m = 0$

Podemos prescindir da 3ª ecuación. Pasando a 3ª columna ao termo independente (Sistema compatible indeterminado. Infinitas solución):

$$\left. \begin{array}{l} x - y = -z \\ y = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2z$$

$\Rightarrow$ As infinitas solucións son

$\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1+x} = 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ é continua en } x = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(1-x)^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1+x)^2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{As derivadas laterais son finitas e coinciden. Polo} \\ \text{tanto } \boxed{f(x) \text{ é derivable en } x = 0} \end{array}$$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{(1+x)^2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad \frac{1}{4} = \text{pendente da recta } x - 4y = 0$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \begin{matrix} \swarrow -1 \\ \searrow -3 \end{matrix} \text{ (non é } \leq 0)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 4 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \begin{matrix} \swarrow -3 \\ \searrow 1 \end{matrix} \text{ (non é } \geq 0)$$

Recta tanxente en $x = -1$:

$$y - f(1) = f'(1)(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}$$

Recta tanxente en $x = 1$:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}}$$

c)

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{x}{1-x} dx = \int_{-1}^0 \left(-1 + \frac{1}{1-x} \right) dx = [-x - \ln|1-x|]_{-1}^0 = -(1 - \ln 2)$$

$$\boxed{\int_{-1}^0 f(x) dx = \ln 2 - 1}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) Vectores normais aos planos α e β :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_\alpha = (2, -2, 4) \\ \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 2, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_\beta \Rightarrow \boxed{\alpha \text{ e } \beta \text{ son paralelos}}$$

Como os planos son paralelos, collemos un punto arbitrario nun dos planos e calculamos a distancia dese punto ao outro plano.

$P(1, 5, 4) \in \beta$

$$d(\alpha, \beta) = d(P, \alpha) = \frac{|2 - 10 + 16 - 7|}{\sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{12} \text{ unidades}}$$

b) Sexa π o plano buscado. O plano π está determinado por:

- Un punto arbitrario de r , por exemplo $P_r(3, 5, 0)$ (π contén á recta r)
- $\vec{n}_\alpha$ é un vector contido no plano ($\pi \perp \alpha$)
- Un vector director $\vec{v}_r$ da recta r é un vector contido no plano (π contén á recta r)

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 0, 1)$$

$$\pi: 0 = \begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2(x-3) - 8(y-5) - 4z - 2(y-5)$$

$$\boxed{\pi: x + 5y + 2z - 28 = 0}$$

c)

$$P: \begin{cases} z = 0 \\ x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow P(3, 5, 0)$$

$$Q: \begin{cases} x = 0 \\ x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow Q\left(0, 5, \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow d(P, Q) = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$$

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercício 4:

Sexa X = total (en €) de vendas diarias

$$X \rightarrow N(1220; 120)$$

a)

$$\begin{array}{ccc} \text{Tipificação} & & \frac{X-1220}{120} = Z \rightarrow N(0,1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(X > 1400) = P\left(\frac{X-1220}{120} > \frac{1400-1220}{120}\right) & = & P(Z > 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 \\ & & \boxed{P(X > 1400) = 0,0668} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ccc} \text{Tipificação} & & \frac{X-1220}{120} = Z \rightarrow N(0,1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(X < 980) = P\left(\frac{X-1220}{120} < \frac{980-1220}{120}\right) & = & P(Z < -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 \\ & & \boxed{P(X < 980) = 0,0228} \end{array}$$

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

- Calcula todas as matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}$ de rango 2 tales que a súa inversa sexa $A - 2I$, é dicir, $A^{-1} = A - 2I$, sendo I a matriz unidade de orde 2.
 - Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} m+2 & -1 & m+1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ -1 & -2 & m+1 \end{pmatrix}$
 - Calcula, segundo os valores de m , o rango de M .
 - Para o valor $m = -1$, calcula todas as matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Calcula o valor de m para que os puntos $A(m, -1, m)$, $B(1, -5, -1)$, $C(3, 1, 0)$ e $D(2, -1, 0)$ estean nun mesmo plano. Calcula a ecuación implícita ou xeral dese plano.
 - Calcula o ángulo que forman o plano $\pi: 2x - y + 2z - 5 = 0$ e a recta r que pasa polos puntos $P(3, -4, -7)$ e $Q(1, -3, -9)$.
 - Calcula os puntos da recta r do apartado anterior que distan 9 unidades do plano π .
- Definición e interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial.
 - Calcula os límites seguintes:
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)}$
- A derivada dunha función $f(x)$, cuxo dominio é $(0, \infty)$, é $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$
 - Determina a función $f(x)$ sabendo que a súa gráfica pasa polo punto $(1, 0)$.
 - Determina os intervalos de concavidade e convexidade de $f(x)$.

OPCIÓN B

- Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema:
$$\begin{aligned} mx + 3y + 4z &= m \\ x - 4y - 5z &= 0 \\ x - 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$$
 - Resólveo cando $m = 0$ e cando $m = 1$.
- Dada a recta $r: \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$
 - Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $P(2, 5, -2)$ e é perpendicular á recta r .
 - Estuda a posición relativa da recta r e a recta s que pasa polos puntos $P(2, 5, -2)$ e $Q(-1, 4, 2)$.
 - Calcula o punto da recta r que equidista dos puntos $P(2, 5, -2)$ e $Q(-1, 4, 2)$.
- Enunciado e interpretación xeométrica do teorema de Rolle.
 - Sexa $f(x) = 2x + \frac{5}{2} \ln(1+x^2)$. Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente a $x = 0$. Determina, se existen, os máximos e mínimos relativos de $f(x)$.
- Dada a función $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3(x-2)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
 - ¿É $f(x)$ derivable en $x = 1$, para algún valor de a ?
 - Para $a = 1$, calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $f(x)$ e o eixe OX .

MATEMÁTICAS II

(O alumnola debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a-2 & 1 \\ a-1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula, segundo os valores de a , o rango de A . Calcula, se existe, a inversa de A cando $a = 0$.

b) Para $a = 0$, calcula a matriz B que verifica $ABA^{-1} - A = 2I$.

c) Para $a = 1$, calcula todas as matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Dados os planos $\pi_1: 3x + 3z - 8 = 0$; $\pi_2: \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \lambda - \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = 3 + 2\lambda + \mu \end{cases}$

a) Calcula o ángulo que forman π_1 e π_2 . Calcula as ecuacións paramétricas da recta que pasa por $(0,0,0)$ e é paralela a π_1 e π_2 .

b) Calcula o punto simétrico do $(0,0,0)$ respecto do plano π_1 .

3. a) Definición e interpretación xeométrica da derivada dunha función nun punto.

b) Dunha función $f(x)$ sabemos que $f(-1) = 1$ e que a súa función derivada é

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x < 0 \\ e^{2x} - 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula as ecuacións das rectas tanxentes á gráfica de $f(x)$ nos puntos de abscisa: $x = -2$ e $x = \frac{\ln 2}{2}$

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $y = x(x - 2)$, o eixe de abscisas e a recta $y = x$. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixes, o vértice e a concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores de m , o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 4x + my + 3z = m \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases}$$

b) Resólveo cando $m = 5$.

2. Dadas as rectas $r: \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}$ $s: \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ 2y + 4z + 3 = 0 \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa.

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que contén a r e é paralelo a s .

c) Calcula a distancia entre r e s .

3. Debuxa a gráfica de $f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$ estudando: dominio, simetrías, puntos de corte cos eixes, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.

4. a) Enuncia o teorema fundamental do cálculo integral. Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica da función $F(x) = \int_0^x \frac{t^2+6}{2+e^t} dt$, no punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcula $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1) a) **1,5 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola formulación do problema.
- 0,5 puntos polo cálculo de a^b e b^a .

b) **1,5 puntos**, distribuídos en:

- i) 0,75 puntos
- ii) 0,75 puntos

2) a) **1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos pola ecuación do plano.
- 0,5 puntos pola determinación de m .

b) **1 punto**

c) **1 punto**

3) a) **1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial.

b) **1 punto**, distribuído en:

- i) 0,5 puntos
- ii) 0,5 puntos

4) a) **1 punto**, distribuído en:

- 0,75 puntos polo cálculo da integral indefinida de $f(x)$
- 0,25 puntos pola determinación da constante para que $f(1)=0$

b) **1 punto**.

OPCIÓN B

1) a) **2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto polo cálculo dos rangos segundo os valores de m
- 1 punto pola discusión do sistema

b) **1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos polo caso $m=0$
- 0,5 puntos polo caso $m=1$

2) a) **1 punto**

b) **1 punto**

c) **1 punto**

3) a) **1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Rolle.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) **1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos pola ecuación da recta tanxente.
- 0,5 puntos pola determinación do máximo e mínimo relativos.

4) a) **1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos pola determinación de a para que $f(x)$ sexa continua en $x=1$.
- 0,5 puntos por concluír que $f(x)$ non é derivable en $x=1$ para ningún valor de a .

b) **1 punto**, distribuído en:

- 0,75 puntos pola formulación do problema.
- 0,25 puntos polo cálculo das integrais definidas.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1) a) 1 punto:

- 0,5 puntos polo cálculo do rango de A .
- 0,5 puntos polo cálculo da inversa de A , cando $\alpha = 0$.

b) 1 punto

c) 1 punto

2) a) 1,5 puntos:

- 0,75 puntos polo cálculo do ángulo que forman os planos.
- 0,75 puntos pola obtención das ecuacións paramétricas da recta.

b) 1,5 puntos

3) a) 1 punto:

- 0,5 puntos pola definición da derivada dunha función nun punto.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) 1 punto:

- 0,5 puntos pola determinación de $f'(x)$
- 0,5 puntos polas ecuacións das rectas tanxentes (0,25 puntos por cada una)

4) 2 puntos:

- 0,5 puntos polo debuxo da rexión.
- 1 punto pola formulación da área en termos de integrais definidas.
- 0,5 puntos polo cálculo das integrais definidas.

OPCIÓN B

1) a) 2 puntos:

- 1 punto polo cálculo dos rangos segundo os valores de m
- 1 punto pola discusión do sistema

b) 1 punto

2) a) 1 punto

b) 1 punto

c) 1 punto

3) 2 puntos:

- 0,25 puntos: estudo de dominio, puntos de corte cos eixes e simetrías.
- 0,25 puntos: estudo de asíntotas.
- 0,5 puntos: estudo de intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos
- 0,5 puntos: estudo de puntos de inflexión, intervalos de concavidade e convexidade.
- 0,5 puntos: debuxo da gráfica.

4) a) 1 punto:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema fundamental do cálculo integral.
- 0,5 puntos polo cálculo da recta tanxente.

b) 1 punto:

- 0,5 puntos: integración por partes
- 0,25 puntos: integración de función racional
- 0,25 puntos: cálculo da integral definida

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) $A^{-1} = A - 2I \Leftrightarrow I = A(A - 2I) = (A - 2I)A$

$$A(A - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & a \\ a & b - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a(b - 2) \\ a(b - 2) & a^2 + b(b - 2) \end{pmatrix}$$

Polo tanto:

$$A(A - 2I) = I \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ a(b - 2) = 0 \\ a^2 + b(b - 2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$Solución: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b)

$$i) \det(M) = \begin{vmatrix} m+2 & -1 & m+1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ -1 & -2 & m+1 \end{vmatrix} = (m+2)(m+1)^2 + (m+1)^2 = (m+3)(m+1)^2$$

$$\det(M) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = -1 \end{cases}$$

Se $m = -3$, hai un menor de orde 2 non nulo:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Se $m = -1$, hai un menor de orde 2 non nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Polo tanto:

$\begin{aligned} & \text{Se } m \in \mathbb{R} - \{-3, -1\} \text{ entón } \text{rang}(M) = 3 \\ & \text{Se } m = -3 \text{ ou } m = -1, \text{ entón } \text{rang}(M) = 2 \end{aligned}$

ii) Substituíndo o valor de m na matriz M , resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

$Solución: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 2:

a) Os vectores $\overrightarrow{BC} = (2,6,1)$ e $\overrightarrow{BD} = (1,4,1)$ son non proporcionais. Polo tanto, os puntos $B(1, -5, -1)$, $C(3,1,0)$ e $D(2, -1,0)$ determinan un plano π :

$$\pi: \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-1 \\ 6 & 4 & y+5 \\ 1 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x - y + 2z - 5 = 0}$$

Para determinar m , bastará ter en conta que $A \in \pi$ e polo tanto:

$$2m + 1 + 2m - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

Tamén poderíamos obter m , impoñendo a condición $\text{rang}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = 2$, é dicir:

$$\begin{vmatrix} m-1 & 4 & m+1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(m-1) - 4 + 2(m+1) = 0 \Rightarrow 4m - 4 = 0 \Rightarrow m = 1$$

b) O vector director, $\overrightarrow{v_r}$, da recta e o vector normal, $\overrightarrow{n_\pi}$, ao plano son:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{PQ} = (-2, 1, -2) \\ \overrightarrow{n_\pi} = (2, -1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \text{ e } \overrightarrow{n_\pi} \text{ son proporcionais. Polo tanto:}$$

$$\boxed{r \text{ e } \pi \text{ son perpendiculares: } r \perp \pi}$$

c) Calculamos as ecuacións paramétricas da recta r :

$$\left. \begin{array}{l} P(3, -4, -7) \in r \\ \overrightarrow{v_r} = (-2, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = -7 - 2\lambda \end{cases}$$

Un punto xenérico da recta será: $(3 - 2\lambda, -4 + \lambda, -7 - 2\lambda)$. Determinamos o valor de λ para que o punto diste 9 unidades do plano π :

$$9 = \frac{|2(3 - \lambda) - (-4 + \lambda) + 2(-7 - 2\lambda)|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} \Rightarrow 27 = |-9 - 9\lambda| \Rightarrow \begin{cases} 27 = -9 - 9\lambda \Rightarrow \lambda = -4 \\ -27 = -9 - 9\lambda \Rightarrow \lambda = 2 \end{cases}$$

Substituíndo estes valores nas ecuacións paramétricas da recta, obtéñense dous puntos da recta que distan 9 unidades do plano:

$$\boxed{A(11, -8, 1) \text{ e } B(-1, -2, -11)}$$

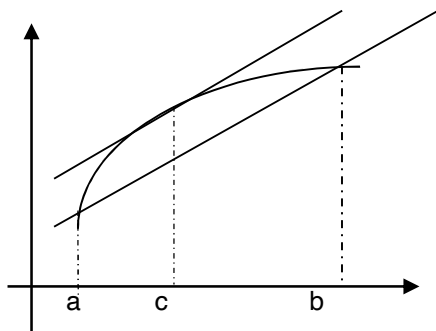
Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 3:

a) *Teorema do valor medio do cálculo diferencial:* Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b) , entón existe algún punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Interpretación xeométrica:

Nas hipóteses do teorema, existe algún punto intermedio no que a tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á corda que une os puntos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

b) Indeterminación $\frac{0}{0}$

$$i. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{(x-\sqrt{2-x})(x+\sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{x^2-2+x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=}$$

Multiplicamos polo conxugado do denominador

Factorizamos o denominador e simplificamos

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{(x-1)(x+2)} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Tamén pode facerse por L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2-x}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$ii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\ln(1+x)}{x \ln(1+x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{1+x}} =$$

L'Hôpital

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)+1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

L'Hôpital

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 4:

- a) $f(x)$ é a primitiva de $f'(x)$ pasando polo punto $(1,0)$. Mediante o método de integración por partes, calculamos a integral indefinida de $f'(x)$

$$\int \frac{1-\ln x}{x^2} dx = \int x^{-2}(1-\ln x) dx = -\frac{1-\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1-\ln x}{x} + \frac{1}{x} + K = \frac{\ln x}{x} + K$$
$$\left[\begin{array}{l} u = 1 - \ln x \Rightarrow du = -\frac{1}{x} dx \\ dv = x^{-2} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{array} \right]$$

Usando que $f(1) = 0$ determinamos o valor de K :

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(1) = K \end{array} \right\} \Rightarrow K = 0$$

Polo tanto

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

- b) Estudamos o signo de $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{-\frac{x^2}{x} - 2x(1-\ln x)}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{3/2}$$

	$(0, e^{3/2})$	$(e^{3/2}, \infty)$
$f''(x)$	< 0	> 0
$f(x)$		

Cóncava en $(0, e^{3/2})$

Convexa en $(e^{3/2}, \infty)$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} m & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} m & 3 & 4 & m \\ 1 & -4 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C :

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} m & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 16m - 12 - 15 + 16 - 15m + 12 = m + 1;$$

Polo tanto

- $m = -1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$
- $m \neq -1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3$

Cálculo do rango da matriz ampliada:

- $m \neq -1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$ (sempre $\text{rang}(A) \geq \text{rang}(C)$)
- Se $m = -1$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

Discusión:

$m = -1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A)$. Sistema incompatible. Non ten solución
 $m \neq -1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3 = \text{rang}(A) = n^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible determinado.
Solución única

b) Para $\boxed{m = 0}$

Sistema homoxéneo. Por a) é un sistema compatible determinado. Polo tanto

$$\boxed{x = y = z = 0}$$

Para $\boxed{m = 1}$. Por a), é un sistema compatible determinado, ten solución única que calculamos pola regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}} = 1/2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}} = -1/2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}} = 1/2$$

$$\boxed{x = 1/2; \quad y = -1/2; \quad z = 1/2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 2:

a) Como o plano π debe ser perpendicular á r , entón o vector director da recta, $\vec{v}_r$, é un vector normal a π . Polo tanto:

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 2)$$

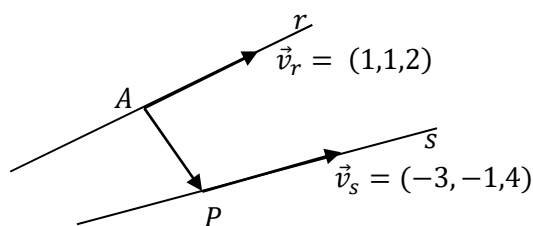
Entón, como $\vec{n}_\pi = (1, 1, 2)$ é un vector normal ao plano e $P(2, 5, -2)$ é un punto do plano

$$x - 2 + y - 5 + 2(z + 2) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x + y + 2z - 3 = 0}$$

b) Calculamos o vector director da recta s :

$$\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (-3, -1, 4)$$

Como os vectores $\vec{v}_r = (1, 1, 2)$ e $\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (-3, -1, 4)$ non son proporcionais, xa podemos dicir que as rectas córtanse ou crúzanse.



Tomamos un punto en cada recta. Por exemplo:

$$A(0, 2, 0) \in r; \quad P(2, 5, -2) \in s$$

e consideramos o vector $\overrightarrow{AP} = (2, 3, -2)$

Se os vectores que marcan as direccións das rectas, e o vector $\overrightarrow{AP}$ que vai dunha á outra son independentes, daquela non están no mesmo plano. Isto saberémolo vendo se o determinante formado por eles é distinto de cero ou non:

$$(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AP}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -22 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{As rectas crúzanse}}$$

c) Dado que $A(0, 2, 0) \in r$, $\vec{v}_r = (1, 1, 2)$, $(\lambda, 2 + \lambda, 2\lambda)$ é un punto xenérico de r , igualando as distancias deste punto xenérico aos puntos P e Q :

$$(\lambda - 2)^2 + (2 + \lambda - 5)^2 + (2\lambda + 2)^2 = (\lambda + 1)^2 + (2 + \lambda - 4)^2 + (2\lambda - 2)^2$$

é dicir:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 9 + 4\lambda^2 + 8\lambda + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 4\lambda^2 - 8\lambda + 4$$

$$8\lambda = -8 \Rightarrow \lambda = -1$$

Substituíndo este valor de λ na expresión do punto xenérico de r , obtemos que o punto da recta r que equidista dos puntos P e Q é:

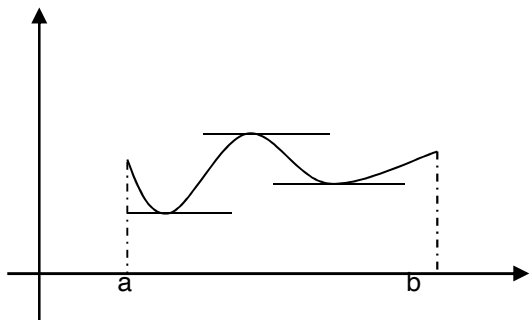
$$\boxed{R(-1, 1, -2)}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 3:

a) *Teorema de Rolle:* Se $f(x)$ é continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) e ademais $f(a) = f(b)$, entón existe polo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.



Interpretación xeométrica: Se se cumpren as hipóteses do teorema, existe polo menos un punto $c \in (a, b)$ no que a recta tanxente é paralela ao eixe de abscisas.

b)

$$f(x) = 2x + \frac{5}{2}\ln(1+x^2) \Rightarrow f'(x) = 2 + \frac{5x}{1+x^2} = \frac{2x^2 + 5x + 2}{1+x^2}$$

Polo tanto, como $f(0) = 0$ e $f'(0) = 2$, a ecuación da recta tanxente no punto correspondente a $x = 0$:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = 2x}$$

Determinamos os puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} \Rightarrow \begin{cases} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Calculamos a segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{5(1+x^2) - 10x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{5-5x^2}{(1+x^2)^2}$$

Polo tanto:

$$f''(-2) < 0$$

$$f''(-\frac{1}{2}) > 0$$

E así:

$$\begin{aligned} &\text{Máximo relativo no punto } \left(-2, -4 + \frac{5\ln 5}{2}\right) \\ &\text{Mínimo relativo no punto } \left(-\frac{1}{2}, -1 + \frac{5\ln(5/4)}{2}\right) \end{aligned}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 4:

a) Para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 1$ ten que ser continua en $x = 1$, polo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \\ f(1) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1$$

Miramos se para este valor de a , existe o límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

para iso, calculamos os límites laterais

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3(1+h-2)^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h^2 - 6h + 3 - 3}{h} = -6$$

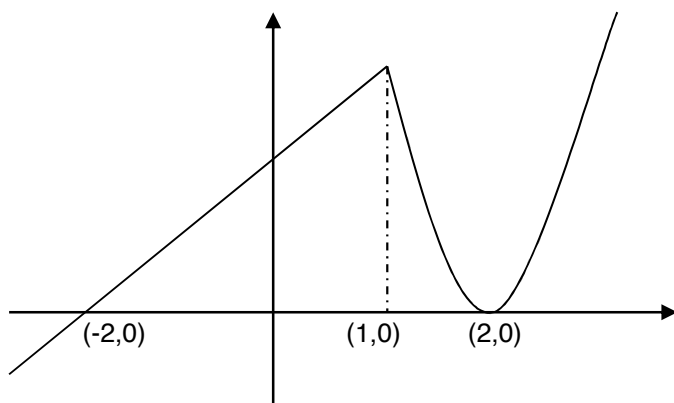
$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1+h+2-3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Vemos que os límites laterais non coinciden. En conclusión:

$f(x)$ non é derivable en $x = 1$ para ningún valor de a

b)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x < 1 \\ 3(x-2)^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 (x+2)dx + \int_1^2 3(x-2)^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 + [(x-2)^3]_1^2 = \frac{1}{2} + 2 - (2-4) + 0 - (-1)^3 \\ &= \frac{1}{2} + 2 + 2 + 1 = \frac{11}{2} \end{aligned}$$

$$A = \frac{11}{2} u^2$$

Exemplos de resposta / Soluciones

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & a-2 & 1 \\ a-1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = -a(a-2) - a^2 - 2(a-1)(a-2) = -a^2 + 2a - a^2 - 2a^2 + 6a - 4 = \\ = -4a^2 + 8a - 4$$

Así

$$|A| = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Se $a = 1$, existen menores de orden 2 no nulos, por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Polo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \\ a \neq 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 \end{array}}$$

Se $a = 0$, xa vimos que $|A| = -4 \neq 0$, polo que existe A^{-1}

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}^t = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

b)

$$ABA^{-1} - A = 2I \Leftrightarrow ABA^{-1} = A + 2I \Leftrightarrow B = A^{-1}(A + 2I)A = (I + A^{-1})A = A + 2I$$

$$\boxed{B = A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

c) $a = 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$. É un sistema homoxéneo con $\text{rang}(A) = 2 < n^{\circ} \text{ incógnitas}$. Sistema compatible indeterminado con infinitas solucións:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = z \\ x = -2z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 2:

a) Determinamos os vectores normais aos planos:

$$\vec{n}_{\pi_1} = (3,0,3) \parallel (1,0,1)$$

$$\vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -3, 0) \parallel (1,1,0)$$

O ángulo α que forman os planos coincide co ángulo que forman os seus vectores normais. Así:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{|\vec{n}_{\pi_1}| |\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{3}}$$

Se chamamos r á recta pedida e $\vec{v}_r$ a un vector director dela,

$$\left. \begin{array}{l} r \parallel \pi_1 \Leftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_{\pi_1} \\ r \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_{\pi_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 1)$$

Como a recta pasa polo punto $(0,0,0)$, as ecuacións paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) Sexa s a recta perpendicular a π_1 pasando polo punto $(0,0,0)$ e $\vec{v}_s$ o seu vector director, entón:

$$\left. \begin{array}{l} s \perp \pi_1 \Leftrightarrow \vec{v}_s \perp \vec{n}_{\pi_1} = (1,0,1) \\ (0,0,0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

O punto de intersección, M , de s con π_1 é o punto medio do segmento OO' (O' simétrico de $O(0,0,0)$).

Calculamos o punto M de intersección de s con π_1

$$3\lambda + 3\lambda - 8 = 0 \Rightarrow 6\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \Rightarrow M\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$$

Se $O'(x, y, z)$, entón:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{3} = \frac{0+x}{2} \\ 0 = \frac{0+y}{2} \\ \frac{4}{3} = \frac{0+z}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{O'\left(\frac{8}{3}, 0, \frac{8}{3}\right)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

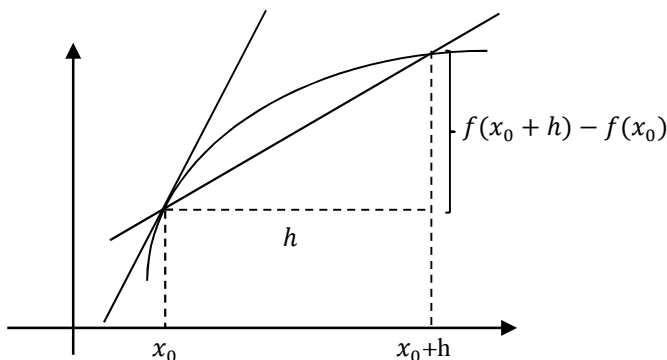
OPCIÓN A

Exercicio 3:

a) Dise que $f(x)$ é derivable no punto x_0 , se existe e é finito o seguinte límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

representase por $f'(x_0)$ e chámase derivada de $f(x)$ en x_0 .



Interpretación xeométrica: A recta secante que pasa polos puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ ten por pendente $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ e cando $h \rightarrow 0$, esta secante acércase á recta tanxente pasando polo punto $(x_0, f(x_0))$. Así:

$$\text{Pendente da recta tanxente en } (x_0, f(x_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + m & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2} e^{2x} - 2x + n & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(-1) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + 1 + m \Rightarrow m = -1$$

E por ser continua en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow -1 = \frac{1}{2} + n \Rightarrow n = -\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2} e^{2x} - 2x - \frac{3}{2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Recta tanxente en $x = -2$:

$$\begin{aligned} f(-2) &= 5 \\ \downarrow \\ y - f(-2) &= f'(-2)(x + 2) \Rightarrow \boxed{y = -5x - 5} \\ \uparrow \\ f'(-2) &= -5 \end{aligned}$$

Recta tanxente en $x = \frac{\ln 2}{2}$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\ln 2}{2}\right) &= -\frac{1}{2} - \ln 2 \\ \downarrow \\ y - f\left(\frac{\ln 2}{2}\right) &= f'\left(\frac{\ln 2}{2}\right)\left(x - \frac{\ln 2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2} + \ln 2} \\ \uparrow \\ f'\left(\frac{\ln 2}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 4:

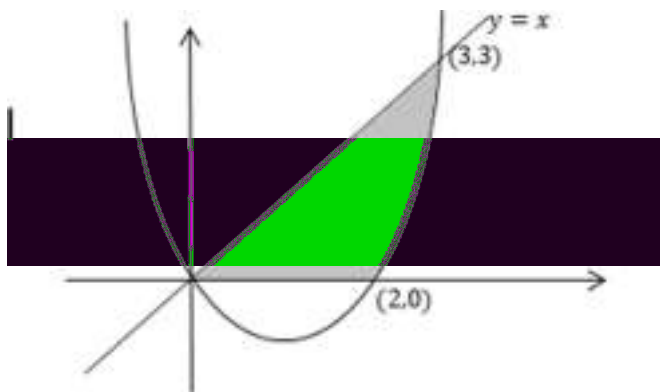
$$y = x(x - 2) = x^2 - 2x$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ x = 2 \end{cases} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Puntos de corte cos eixes:} \\ (0,0) \text{ e } (2,0) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y' = 2x - 2 \\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ y'' = 2 < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Mínimo e vértice } (1, -1). \text{ Convexa} \end{array}$$

Intersección da parábola coa recta $y = x$:

$$x^2 - 2x = x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \quad \text{Puntos de corte: } (0,0), (3,3)$$



Polo tanto:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 x dx + \int_2^3 [x - (x^2 - 2x)] dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_2^3 = 2 - 9 + \frac{27}{2} + \frac{8}{3} - 6 \\ &= \frac{-78 + 81 + 16}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{19}{6} u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & m & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & m & 3 & m \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

Orlamos este menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = m + 12 + 6 - 2m - 9 - 4 = -m + 5$$

$$\Rightarrow \text{rang}(C) = \begin{cases} 2 & \text{se } m = 5 \\ 3 & \text{se } m \neq 5 \end{cases}$$

Discusión:

$m = 5$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2 < 3 = n^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible indeterminado.
 $m \neq 5$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible determinado.

b) Para $\boxed{m=5}$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + z = 1 - y \\ 4x + 3z = 5 - 5y \end{cases}$$

Entón:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-y & 1 \\ 5-5y & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = -(3 - 3y - 5 + 5y) = 2 - 2y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-y \\ 4 & 5-5y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = -(5 - 5y - 4 + 4y) = y - 1$$

$$\begin{aligned} x &= 2 - 2\lambda \\ y &= \lambda \\ z &= -1 + \lambda \end{aligned} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

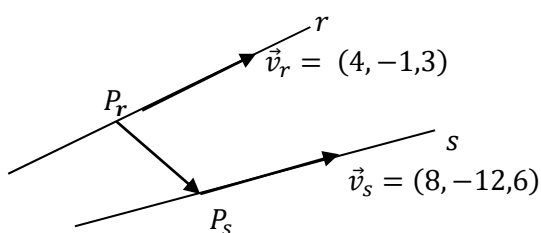
OPCIÓN B

Exercicio 2:

a) Calculamos o vector director da recta s :

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (8, -12, 6)$$

Como os vectores $\vec{v}_r = (4, -1, 3)$ e $\vec{v}_s = (8, -12, 6)$ non son proporcionais, xa podemos dicir que as rectas córtanse ou crúzanse.



Tomamos un punto en cada recta. Por exemplo:

$$P_r(3, 2, 1) \in r; \quad P_s(2, 0, -\frac{3}{4}) \in s$$

e consideramos o vector $\overrightarrow{P_r P_s} = (-1, -2, -\frac{7}{4})$

Se os vectores que marcan as dirección das rectas, e o vector $\overrightarrow{P_r P_s}$ que vai dunha á outra son independentes, daquela non están no mesmo plano. Isto saberémolo vendo se o determinante formado por eles é distinto de cero ou non:

$$(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -12 & 6 \\ -1 & -2 & -\frac{7}{4} \end{vmatrix} = 40 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{As rectas crúzanse}}$$

b) Sexa π o plano buscado. Como o plano contén á recta r , $P_r(3, 2, 1) \in \pi$. Ademais, os vectores $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ son vectores do plano. Polo tanto:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 8 & -12 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x - 4z - 5 = 0}$$

c) Como o plano π é paralelo á recta s e contén á recta r

$$d(r, s) = d(s, \pi) = d(P_s, \pi) = \frac{|6 + 3 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \boxed{4/5}$$

Tamén podemos calcular esa distancia utilizando a fórmula da distancia entre dúas rectas

$$d(r, s) = \frac{|(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s})|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -12 & 6 \\ -1 & -2 & -\frac{7}{4} \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{(30)^2 + (40)^2}} = \boxed{4/5}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 3:

$$f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$$

Dominio:

A función non está definida onde se anula o denominador. Polo tanto, o dominio é $\mathbb{R} - \{2\}$

Simetrías:

$f(-x) = 1 + \frac{2}{(-x-2)^2} \neq \pm f(x)$. Polo tanto non é simétrica respecto do eixe Y nin respecto da orixe.

Puntos de corte cos eixes:

$f(x) > 0$. Polo tanto non corta ao eixe de abscisas.

$x = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow$ Corta ao eixe de ordenadas no punto $(0, \frac{3}{2})$

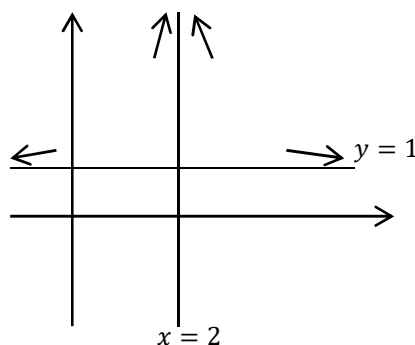
Asíntotas verticais:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2 \text{ asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontais:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ asíntota horizontal

Non hai asíntotas oblicuas



Intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos:

$$f'(x) = -\frac{4(x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{4}{(x-2)^3} \neq 0 \Rightarrow \text{Non hai puntos críticos}$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$		

A función é crecente en $(-\infty, 2)$ e decrecente en $(2, +\infty)$. Non hai máximos nin mínimos.

Intervalos de concavidade e convexidade e puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{12(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{12}{(x-2)^4} > 0. \text{ Non hai puntos de inflexión}$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	+	+
$f(x)$		

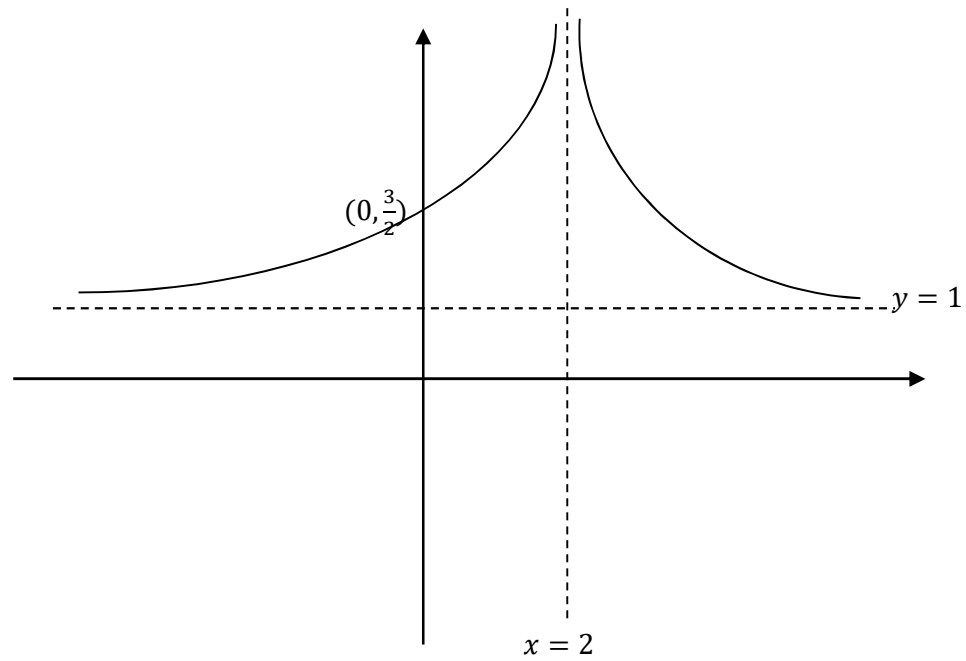
Convexa en todo o seu dominio

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Gráfica de $f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$



Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 4:

a) Teorema fundamental do cálculo integral: Se $f(x)$ é una función continua en $[a, b]$, entón a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivable e ademais $F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$.

Aplicación:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Recta tanxente: } y - F(0) = F'(0)(x - 0) \\ F(0) = 0 \\ F'(x) = \frac{x^2+6}{2+e^x} \Rightarrow F'(0) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Recta tanxente: } y = 2x}$$

b) Calculamos a integral indefinida

$$\begin{aligned} \int x \ln(1+x) dx &= \frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \int \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx = \\ &\left\{ \begin{array}{l} u = \ln(1+x) \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x} \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \quad \text{(grao numerador > grao denominador. Facemos a división)} \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{x}{2} - \frac{\ln(1+x)}{2} + C \end{aligned}$$

Aplicamos Barrow:

$$\int_0^1 x \ln(1+x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{x}{2} - \frac{\ln(1+x)}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\boxed{\int_0^1 x \ln(1+x) dx = 1/4}$$

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

- a) Calcula os posibles valores de a, b, c para que a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verifique a relación $(A - 2I)^2 = 0$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e 0 a matriz nula de orde 2.

b) ¿Cal é a solución dun sistema homoxéneo de dúas ecuacións con dúas incógnitas, se a matriz de coeficientes é unha matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verificando a relación $(A - 2I)^2 = 0$?

c) Para $a = b = c = 2$, calcula a matriz X que verifica $A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, sendo $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
- Dada a recta $r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$

a) Determina a ecuación implícita do plano π que pasa polo punto $P(2,1,2)$ e é perpendicular a r . Calcula o punto de intersección de r e π .

b) Calcula a distancia do punto $P(2,1,2)$ á recta r .

c) Calcula o punto simétrico do punto $P(2,1,2)$ respecto á recta r .
- Debuxa a gráfica de $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$ estudando: dominio, simetrías, puntos de corte cos eixes, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.
- a) Define primitiva dunha función e enuncia a regra de Barrow.

b) Dada a función $f(x) = ax^3 + bx + c$, determina a, b e c sabendo que $y = 2x + 1$ é a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente á abscisa $x = 0$ e que $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

OPCIÓN B

- a) Discute, segundo os valores de m , o sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + my + 3z = m \\ 2x + 3y + mz = 3 \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, para $m = 2$
- Dadas as rectas $r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$ e $s: \begin{cases} \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{4} \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa. Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa pola orixe de coordenadas e é paralelo a r e a s .

b) Calcula as ecuacións paramétricas da recta que corta perpendicularmente a r e a s .
- a) Definición e interpretación xeométrica da derivada dunha función nun punto.

b) Calcula os valores de b e c para que a función

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e + x^2) & \text{se } x < 0 \\ x^2 + bx + c & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

sexa derivable en $x = 0$. (Nota: $\ln$ = logaritmo neperiano)
- A gráfica dunha función $f(x)$ pasa pola orixe de coordenadas e a súa derivada é $f'(x) = (2 - x)e^{3x}$. Determina a función $f(x)$ e calcula os intervalos de concavidade e convexidade de $f(x)$.

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Define menor complementario e adxunto dun elemento nunha matriz cadrada.

b) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

i. Calcula o rango, segundo os valores de λ , de $A - \lambda I$, sendo I a matriz unidade de orde 3.

ii. Calcula a matriz X que verifica $XA - 2A = 3X$.

2. Dada a recta $r: \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases}$

a) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é paralelo a r e pasa polos puntos $A(0,1,2)$ e $B(5,3,1)$

b) Calcula o punto de corte de r co plano perpendicular á devandita recta e que pasa por $B(5,3,1)$

c) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é paralelo ao plano $\pi: 2x - 3y + 4z - 5 = 0$ e dista $\sqrt{29}$ unidades da recta r .

3. a) Calcula os valores de a e b para que a función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{2\ln x + 2}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ sexa derivable en

$x = 1$. (Nota: $\ln$ = logaritmo neperiano)

b) Para os valores $a = -4$ e $b = 6$, determina os intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x)$.

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada polas gráficas da parábola $f(x) = 4x - x^2$ e as rectas tanxentes á gráfica de $f(x)$ nos puntos correspondentes a $x = 0$ e $x = 2$ (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indicar os puntos de corte cos eixes de coordenadas, o seu vértice e concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores de m , o sistema de ecuacións:

$$x + y + z = m$$

$$x - y = 0$$

$$3x + y + 2z = 0$$

b) Resolve, se é posible, o sistema cando $m = 0$.

2. Dadas as rectas $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$; $s: \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa de r e s . Calcula a distancia de r a s .

b) Se dous dos lados dun rectángulo están sobre as rectas r e s e dous vértices consecutivos do rectángulo son os puntos $A(0,1,1)$ e $B(0,4,4)$, calcula as coordenadas dos outros dous vértices e a área do rectángulo.

3. a) Define derivada dunha función nun punto. Interpretación xeométrica

b) Dada a función $f(x) = 2e^{-x}(x + 1)$, calcula: intervalos de crecemento e decrecemento e máximos e mínimos relativos de $f(x)$.

4. a) a) Calcula: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2 - \frac{x}{4}}{x^2}$

b) Calcula unha primitiva da función $f(x) = x \sin x$ que pase polo punto $(\pi, 0)$

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

- 1) a) 1 punto
b) 0,5 puntos
c) 1,5 puntos
- 2) a) 1 punto, distribuído en:
 - 0,5 puntos pola ecuación do plano.
 - 0,5 puntos polo punto de intersección da recta e o plano.b) 1 punto
c) 1 punto
- 3) 2 puntos, distribuídos en:
 - Dominio, simetrías e puntos de corte cos eixes: 0,25 puntos.
 - Asíntotas: 0,25 puntos.
 - Intervalos de crecemento e decrecemento: 0,25 puntos.
 - Máximos e mínimos relativos: 0,25 puntos.
 - Puntos de inflexión: 0,25 puntos.
 - Intervalos de concavidade e convexidade: 0,25 puntos.
 - Gráfica: 0,5 puntos.
- 4) a) 1 punto, distribuído en:
 - Definición de primitiva: 0,5 puntos.
 - Enunciado da regra de Barrow: 0,5 puntosb) 1 punto, distribuído en:
 - 0,5 puntos pola obtención de b e c.
 - 0,5 puntos pola obtención de a.

OPCIÓN B

- 1) a) 2 puntos, distribuídos en:
 - 1 punto polo cálculo dos rangos segundo os valores de m
 - 1 punto pola discusión do sistemab) 1 punto
- 2) a) 1,5 puntos
b) 1,5 puntos
- 3) a) 1 punto, distribuído en:
 - 0,5 puntos pola definición de derivada dunha función nun punto.
 - 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.b) 1 punto, distribuído en:
 - 0,5 puntos pola determinación de c.
 - 0,5 puntos pola determinación de b.
- 4) 2 puntos, distribuídos en:
 - 1 puntos pola integral
 - 0,5 puntos pola condición $f(0)=0$.
 - 0,5 puntos polos intervalos de concavidade e convexidade.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1) a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola definición de menor complementario
- 0,5 puntos pola definición de adxunto dun elemento

b) 2 puntos, distribuídos en:

- i. 1 punto
- ii. 1 punto

2) a) 1 punto

b) 1 punto

c) 1 punto

3) a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola condición de continuidade
- 0,5 puntos pola condición de derivable

b) 1 punto

4) 2 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola representación da parábola
- 0,5 puntos pola determinación das tanxentes.
- 0,5 puntos pola formulación da área como unha integral definida.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida

OPCIÓN B

1) a) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto polo cálculo dos rangos segundo os valores de m
- 1 punto pola discusión do sistema

b) 1 punto

2) a) 1,5 puntos, distribuídos en

- 1 punto pola posición relativa das rectas.
- 0,5 puntos polo cálculo da distancia entre as rectas.

b) 1,5 puntos, distribuídos en

- 1 punto polo cálculo dos dous vértices
- 0,5 puntos polo cálculo da área do rectángulo

3) a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola definición de derivada dunha función nun punto.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento
- 0,5 puntos pola determinación do máximo relativo.

4) a) 1 punto

b) 1 punto

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

$$\mathbf{a)} \quad (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} a-2 & b \\ 0 & c-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-2 & b \\ 0 & c-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-2)^2 & b(a-2) + b(c-2) \\ 0 & (c-2)^2 \end{pmatrix}$$

Polo tanto:

$$(A - 2I)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 = 0 \\ b(a-2) + b(c-2) = 0 \\ (c-2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = 2 \\ b \in \mathbb{R} \\ c = 2 \end{matrix}}$$

b) Tendo en conta o apartado anterior, a matriz de coeficientes do sistema homoxéneo sería

$$A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e polo tanto teríamos:

$\text{rang}(A) = 2 = n^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado, solución única. Como a trivial sempre é solución dun sistema homoxéneo, concluimos que a solución é

$$\boxed{x = y = 0}$$

c) Neste caso, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ademais, $\det(A) = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = (A^{-1})^2 \cdot B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^{-1})^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

Polo tanto:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 2:

a) Como o plano π e a recta r deben se perpendiculares, o vector director da recta, $\vec{v}_r$, ten a dirección do vector normal ao plano. Así:

Vector normal ao plano π : $\vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (-2, -1, 1)$

Podemos entón utilizar a ecuación dun plano a partir dun punto e dun vector normal:

$$-2(x - 2) - (y - 1) + (z - 2) = 0$$

e polo tanto:

$$\pi: 2x + y - z - 3 = 0$$

Para calcular o punto de intersección de r con π , substituímos as ecuacións paramétricas da recta na ecuación do plano:

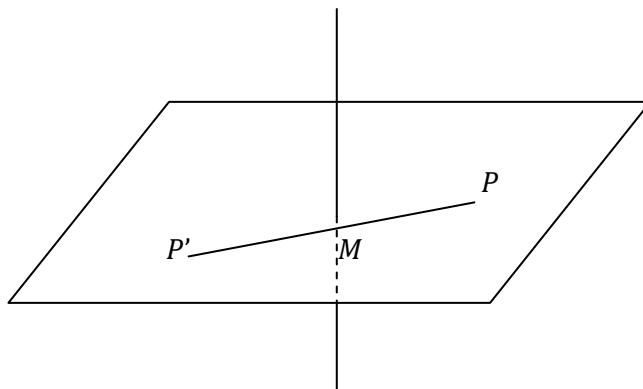
$$2(3 - 2\lambda) + 1 - \lambda - (4 + \lambda) - 3 = 0 \Rightarrow 6 - 4\lambda + 1 - \lambda - 4 - \lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Substituíndo este valor nas ecuacións paramétricas da recta, obtemos o punto de corte

$$M(3, 1, 4)$$

b) Dado que $P \in \pi$, r é perpendicular a π e M é o punto de intersección de r e π , a distancia pedida:

$$d(P, r) = d(P, M) = \sqrt{(2 - 3)^2 + (1 - 1)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{5}$$



c) Para obter as coordenadas do punto $P'(x, y, z)$, simétrico de P , basta ter en conta que M é o punto medio do segmento que une P con P' . Polo tanto:

$$\left. \begin{aligned} 3 &= \frac{x + 2}{2} \\ 1 &= \frac{y + 1}{2} \\ 4 &= \frac{z + 2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P'(4, 1, 6)$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 3:

$f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$ é unha función racional.

Dominio:

A función non está definida onde se anula o denominador. Polo tanto, o dominio é $\mathbb{R} - \{1\}$

Simetrías:

$f(-x) = \frac{2x^2}{-x-1} \neq \pm f(x)$. Polo tanto non é simétrica respecto do eixe Y nin respecto da orixe.

Puntos de corte cos eixes:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Polo tanto o único punto de corte cos eixes é a orixe $[0(0,0)]$.

Asíntotas verticais: Hai unha en $[x = 1]$

Posición da curva respecto da asíntota:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

Asíntota oblicua:

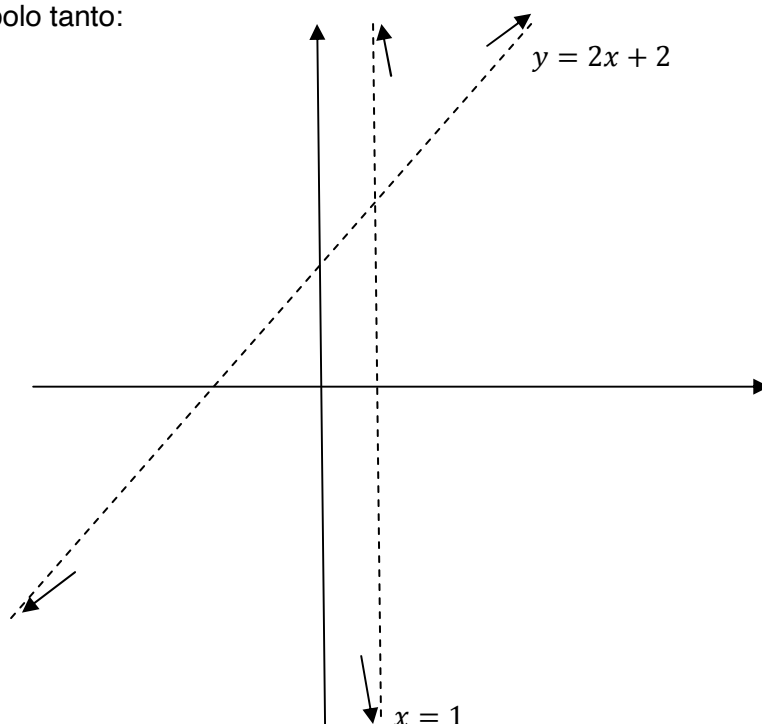
Como $\text{grao do numerador} = 2 = \text{grao do denominador} + 1$, hai asíntota oblicua.

$$\frac{2x^2}{x-1} = 2x + 2 + \frac{2}{x-1}$$

Polo tanto $[y = 2x + 2]$ é a asíntota oblicua. Ademais:

O signo da diferenza, $\frac{2}{x-1}$, é positivo cando $x \rightarrow +\infty$ e negativo cando $x \rightarrow -\infty$

Temos polo tanto:



Intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos:

$$f'(x) = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$				

A función é crecente en $(-\infty, 0)$ e en $(2, \infty)$ e decrecente en $(0, 1)$ e en $(1, 2)$
Máximo relativo en $(0, 0)$ e mínimo relativo en $(2, 8)$.

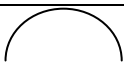
Intervalos de concavidade e convexidade e puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{(4x - 4)(x - 1)^2 - 2(x - 1)(2x^2 - 4x)}{(x - 1)^4} = \frac{4(x - 1)^2 - 4x^2 + 8x}{(x - 1)^3} = \frac{4}{(x - 1)^3} \neq 0$$

Non ten puntos de inflexión

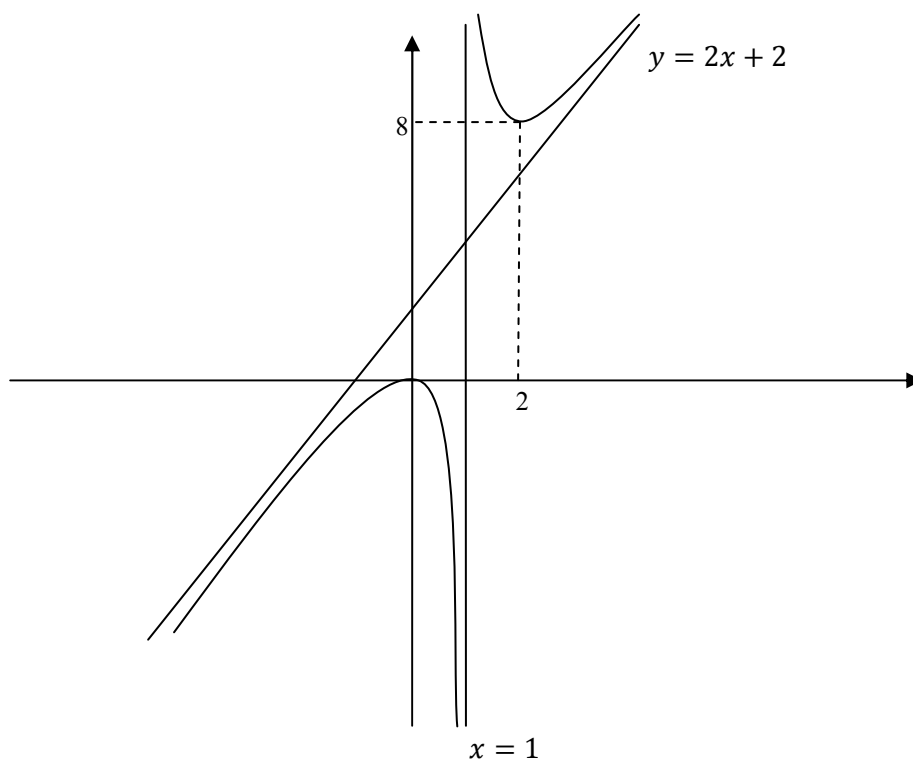
$$f''(0) < 0 \Rightarrow \text{máximo relativo en } (0, 0)$$

$$f''(2) > 0 \Rightarrow \text{mínimo relativo en } (2, 8)$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$		

*Cóncava en $(-\infty, 1)$
Convexa en $(1, \infty)$*

Gráfica de $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$



Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 4:

a) Dise que $F(x)$ é unha *primitiva* de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$.

Regra de Barrow: Se $f(x)$ é continua en $[a, b]$ e $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$, entón

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

b) $f(x) = ax^3 + bx + c$

$y = 2x + 1$ recta tanxente á gráfica de $f(x) \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = 2 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

$$f(x) = ax^3 + bx + c$$

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Finalmente: 0

$$1 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax^3 + 2x + 1)dx = \left[\frac{a}{4}x^4 + x^2 + x \right]_0^1 = \frac{a}{4} + 1 + 1$$

Polo tanto:

$$\frac{a}{4} + 2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = -4}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a)

Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 3 & m \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & 3 & m \\ 2 & 3 & m & 3 \end{pmatrix}$

columnas iguais

Como a cuarta columna da matriz ampliada coincide coa segunda columna, podemos prescindir da cuarta columna para o cálculo do rango de A e polo tanto $\text{rang}(C) = \text{rang}(A)$.

Cálculo do rango de C :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 3 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 6; \quad m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow m \begin{matrix} \nearrow -3 \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

Discusión:

$m = -3$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2 < 3 = n^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible indeterminado.
 $m = 2$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2 < 3 = n^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible indeterminado.
 $m \notin \{-3, 2\}$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible determinado.

b) Para $\boxed{m = 2}$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 + z \\ 2x + 3y = 3 - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 3 + 3z \\ 2x + 3y = 3 - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5z \\ y = 1 - 4z \end{cases}$$

As infinitas solucións son:

$$\begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 1 - 4\lambda; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 2:

a) Punto de r : $P_r(3, -1, 4)$

vector dirección de r : $\vec{v}_r = (1, 0, 2)$

Punto de s : $P_s(4, 3, 5)$

vector dirección de s : $\vec{v}_s = (3, -1, 4)$

Non son proporcionais. As rectas córtanse ou crúzanse

Se os vectores $\vec{v}_r = (1, 0, 2)$ e $\vec{v}_s = (3, -1, 4)$, que marcan as direccións das rectas, e o vector $\overrightarrow{P_r P_s} = (1, 4, 1)$ son independentes daquela non están no mesmo plano e as rectas polo tanto cruzaranse. Isto saberémolo vendo se o determinante da matriz formada coas coordenadas deses tres vectores é cero ou non:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 24 + 2 - 16 = 9 \neq 0$$

Polo tanto:

As rectas crúzanse

O plano pedido, π , queda determinado polo punto $(0, 0, 0)$ do plano e os dous vectores $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ paralelos ao plano e independentes entre si:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + 2y - z = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) Punto xenérico de } r: R(3 + \lambda, -1, 4 + 2\lambda) \\ \text{Punto xenérico de } s: S(4 + 3\mu, 3 - \mu, 5 + 4\mu) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{RS} = (1 + 3\mu - \lambda, 4 - \mu, 1 + 4\mu - 2\lambda)$$

Agora impoñemos a condición de que $\overrightarrow{RS}$ sexa perpendicular a r e a s :

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \perp r \Rightarrow (1 + 3\mu - \lambda, 4 - \mu, 1 + 4\mu - 2\lambda) \cdot (1, 0, 2) = 0 \\ \overrightarrow{RS} \perp s \Rightarrow (1 + 3\mu - \lambda, 4 - \mu, 1 + 4\mu - 2\lambda) \cdot (3, -1, 4) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 5\lambda - 11\mu = 3 \\ 11\lambda - 26\mu = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 5 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

Substituíndo $\lambda = 5$ e $\mu = 2$, obtemos:

$$R(8, -1, 14); S(10, 1, 13); \overrightarrow{RS} = (2, 2, -1)$$

Polo tanto, as ecuacións paramétricas da recta que corta perpendicularmente a r e a s son:

$$t: \begin{cases} x = 8 + 2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 14 - \lambda \end{cases}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

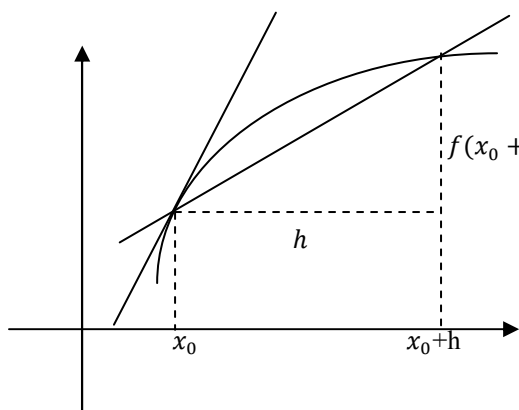
OPCIÓN B

Exercicio 3:

a) Dise que $f(x)$ é derivable no punto x_0 , se existe e é finito o seguinte límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

representase por $f'(x_0)$ e chámase derivada de $f(x)$ en x_0 .



Interpretación xeométrica: O cociente

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

coincide coa pendente da recta secante que pasa polos puntos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. A medida que vai diminuindo a amplitude do intervalo $[x_0, x_0 + h]$, os puntos de corte determinados polas distintas secantes fanse máis e máis próximos. No límite, a secante convértese na tanxente.

Así, a derivada de $f(x)$, en $x = x_0$, coincide coa pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(x_0, f(x_0))$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \text{Pendente da recta tanxente á gráfica de } f(x), \text{ en } x = x_0.$$

b) Para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 0$, ten que ser continua en $x = 0$.

Se $f(x)$ é continua en $x = 0$, debe ser $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(e + x^2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + bx + c) = c \\ f(0) = c \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Se $c = 1$, $f(x)$ será derivable en $x = 0$ se $f'(0^-) = f'(0^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{e+x^2} & \text{se } x < 0 \\ 2x + b & \text{se } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = b \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 4:

$f(x)$ é unha primitiva de $f'(x) = (2 - x)e^{3x}$ pasando polo punto $(0,0)$

$$\int (2 - x)e^{3x} dx = \frac{1}{3}(2 - x)e^{3x} + \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}(2 - x)e^{3x} + \frac{1}{9}e^{3x} + C = e^{3x} \left(\frac{7}{9} - \frac{x}{3} \right) + C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Por partes:} \\ u = 2 - x \Rightarrow du = -dx \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{e^{3x}}{3} \end{array} \right.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{7}{9} + C \Rightarrow C = -\frac{7}{9}$$

Polo tanto

$$f(x) = e^{3x} \left(\frac{7}{9} - \frac{x}{3} \right) - \frac{7}{9}$$

Para estudar a concavidade e convexidade de $f(x)$, estudamos o signo de $f''(x)$

$$f''(x) = -e^{3x} + 3(2 - x)e^{3x} = e^{3x}(5 - 3x)$$

Como $e^{3x} > 0$, temos que

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5/3$$

Polo tanto

	$(-\infty, 5/3)$	$(5/3, \infty)$
$f''(x)$	+	-
$f(x)$		

Convexa en $(-\infty, 5/3)$
Cóncava en $(5/3, \infty)$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) Dado un elemento a_{ij} dunha matriz cadrada $n \times n$, ao suprimir a súa fila e a súa columna, obtense unha submatriz $(n-1) \times (n-1)$ e o seu determinante é un menor de orde $n-1$, que se chama menor complementario do elemento a_{ij} e represéntase por α_{ij} .

Chámase adxunto de a_{ij} ao número $A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$, é dicir, é o menor complementario co seu signo ou co signo contrario, segundo $i+j$ sexa par ou impar.

b)

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 1 - 1 - (1-\lambda) - (1-\lambda) + (1-\lambda) = \\ &= (1-\lambda)[1 + \lambda^2 - 2\lambda - 1] = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2) \end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Se $\lambda = 1$:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Se $\lambda = 2$:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Polo tanto:

$$\boxed{\text{Para } \lambda \neq 0, \lambda \neq 1, \lambda \neq 2, \text{rang}(A - \lambda I) = 3}$$

$$\boxed{\text{Para } \lambda = 0, \text{rang}(A - \lambda I) = 2}$$

$$\boxed{\text{Para } \lambda = 1, \text{rang}(A - \lambda I) = 2}$$

$$\boxed{\text{Para } \lambda = 2, \text{rang}(A - \lambda I) = 2}$$

$$\text{ii)} \quad XA - 2A = 3X \Leftrightarrow X(A - 3I) = 2A \Leftrightarrow X = 2A(A - 3I)^{-1}$$

$$|A - 3I| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6;$$

Polo apartado i., sabemos que existe $(A - 3I)^{-1}$

$$(A - 3I)^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 9 & 3 & 9 \\ 9 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 2:

a) vector dirección de r : $\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (5, 10, 5) \parallel (1, 2, 1)$

Elementos que determinan o plano: $\begin{cases} A(0, 1, 2) \\ \vec{v}_r = (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{AB} = (5, 2, -1) \end{cases}$

Se chamamos π ao plano buscado,

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4x + 6(y-1) - 8(z-2) = 0$$

$$\boxed{\pi: 2x - 3y + 4z - 5 = 0}$$

b) Sexa α o plano perpendicular a r e que pasa polo punto $B(5, 3, 1)$. Entón

vector normal a α : $\vec{n}_\alpha = \vec{v}_r = (1, 2, 1)$

$$\alpha: (x-5) + 2(y-3) + (z-1) = 0 \Rightarrow \alpha: x + 2y + z - 12 = 0$$

Para calcular o punto de corte de α e r , escribimos as ecuacións paramétricas da recta (coñecemos $\vec{v}_r = (1, 2, 1)$ e evidentemente $(0, 0, 0) \in r$):

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Para obter o punto de corte da recta e o plano, substituímos as coordenadas do punto xenérico da recta na ecuación do plano:

$$\lambda + 4\lambda + \lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

Polo tanto a recta corta ao plano no punto correspondente ao valor do parámetro $\lambda = 2$:

$$\boxed{P(2, 4, 2)}$$

c) Se chamamos β ao plano buscado,

$$\left. \begin{matrix} \beta \parallel \pi \\ \pi: 2x - 3y + 4z - 5 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \beta: 2x - 3y + 4z + D = 0$$

Ademais,

$$\left. \begin{matrix} \beta \parallel r \\ (0, 0, 0) \in r \end{matrix} \right\} \Rightarrow d(r, \beta) = d((0, 0, 0), \beta) = \frac{|D|}{\sqrt{4 + 9 + 16}} = \frac{|D|}{\sqrt{29}}$$

Polo tanto:

$$\frac{|D|}{\sqrt{29}} = \sqrt{29} \Rightarrow D = \pm 29$$

$$\boxed{\begin{matrix} \beta: 2x - 3y + 4z + 29 = 0 \\ \text{ou} \\ \beta: 2x - 3y + 4z - 29 = 0 \end{matrix}}$$

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 3:

a) Para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 1$, ten que ser continua en $x = 1$.

Se $f(x)$ é continua en $x = 1$, debe ser $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + b) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\ln x + 2}{x^2} = 2 \\ f(1) = a + b \end{array} \right\} \Rightarrow a + b = 2$$

Se $a + b = 2$, $f(x)$ será derivable en $x = 1$ se $f'(1^-) = f'(1^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{se } x < 1 \\ \frac{2x - 2x(2\ln x + 2)}{x^4} & \text{se } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 2a + b \\ f'(1^+) = -2 \end{cases} \Rightarrow 2a + b = -2$$

Polo tanto, $f(x)$ será derivable en $x = 1$, se:

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 2 \\ 2a + b = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = -4 \\ b = 6 \end{array}}$$

b) Para $a = -4$ e $b = 6$

$$f'(x) = \begin{cases} -8x + 6 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{2x - 2x(2\ln x + 2)}{x^4} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$-8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3/4$$

$$2x - 2x(2\ln x + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x(1 - 2\ln x - 2) = 0 \begin{cases} \rightarrow x = 0 < 1 \\ \rightarrow 2\ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1/2} < 1 \end{cases}$$

Polo tanto, o único valor que anula a primeira derivada é $x = 3/4$.

	$(-\infty, 3/4)$	$(3/4, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-	-
$f(x)$			

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Crecente en } (-\infty, 3/4) \\ \text{Decrecente en } (3/4, \infty) \end{array}}$

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 4:

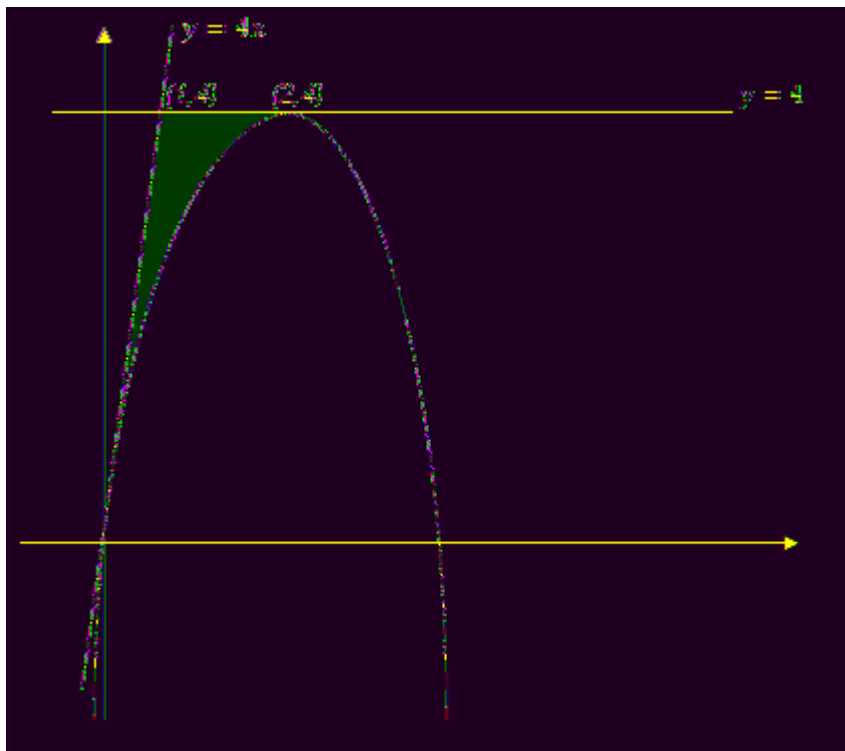
$$f(x) = 4x - x^2 = x(4 - x)$$

Puntos de corte cos eixes: (0,0), (4,0)

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 4 - 2x \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ f''(x) = -2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Cóncava. Vértice: } (2,4)$$

Recta tanxente en (0,0): $y = 4x$

Recta tanxente en (2,4): $y = 4$



$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [4x - (4x - x^2)] dx + \int_1^2 [4 - (4x - x^2)] dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \\ &= \frac{1}{3} + 8 - 8 + \frac{8}{3} - 4 + 2 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{2}{3} u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a)

Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C :

$$\left. \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 3 - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

Cálculo do rango de A :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4m \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \text{ se } m = 0; \text{ rang}(A) = 3, \text{ se } m \neq 0$$

Discusión:

$m = 0$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2 < 3 = n^{\circ}$ de incógnitas. Sistema compatible indeterminado.
 $m \neq 0$, $\text{rang}(C) = 2 \neq 3 = \text{rang}(A)$. Sistema incompatible.

b) Para $\boxed{m=0}$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + y = -z \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases}$$

As infinitas solucións son:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2}\lambda \\ y &= -\frac{1}{2}\lambda; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z &= \lambda \end{aligned}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 2:

a) Determinamos un vector director e un punto de cada unha das rectas:

$$P_r(0,1,1); \quad \vec{v}_r = (0,3,3)$$

$$P_s(-4,2,0); \quad \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,1,1)$$

Coordenadas proporcionais. Polo tanto, as rectas son paralelas ou coincidentes

$$P_r(0,1,1) \in r, \quad P_r(0,1,1) \notin s$$

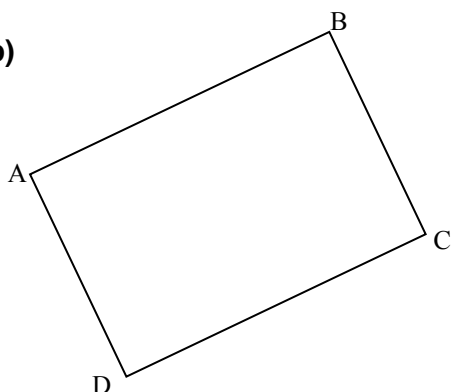
As rectas son paralelas non coincidentes

Como as rectas son paralelas, a distancia entre elas pode calcularse como a distancia dun punto dunha delas á outra:

$$d(r,s) = d(P_r,s) = \frac{|\vec{P_r P_s} \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{4+16+16}}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \boxed{3\sqrt{2}}$$

$$\left\{ \vec{P_r P_s} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,4,-4) \right\}$$

b)



Evidentemente $A, B \in r$. Polo tanto, $C, D \in s$. Tendo en conta que $P_s(-4,2,0)$ e $\vec{v}_s = (0,1,1)$, un punto xenérico de s será da forma $(-4, 2 + \lambda, \lambda)$

$$\vec{AB} \perp \vec{BC} \Rightarrow (0,3,3) \cdot (-4, \lambda - 2, \lambda - 4) = 0 \Rightarrow 3\lambda - 6 + 3\lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow \boxed{C(-4,5,3)}$$

$$\vec{AB} \perp \vec{AD} \Rightarrow (0,3,3) \cdot (-4, \lambda + 1, \lambda - 1) = 0 \Rightarrow 3\lambda + 3 + 3\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{D(-4,2,0)}$$

A área do rectángulo podemos calculala como:

$$A = d(r,s) \cdot d(A,B) = d(r,s) \cdot |\vec{AB}| = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = 18$$

Ou ben

$$A = d(A,B) \cdot d(A,D) = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| = \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + (2-1)^2 + (-1)^2} = 18$$

Polo tanto:

$$\boxed{A = 18 \text{ u}^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

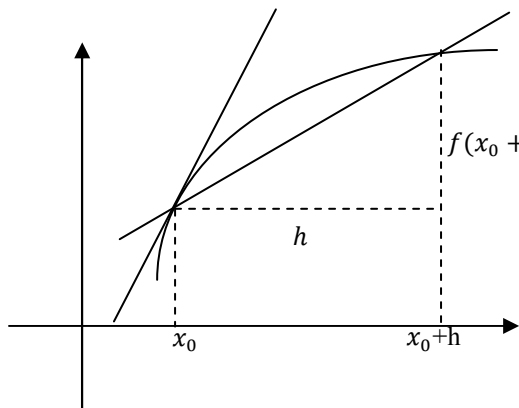
OPCIÓN B

Exercicio 3:

a) Dise que $f(x)$ é derivable no punto x_0 , se existe e é finito o seguinte límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

representase por $f'(x_0)$ e chámase derivada de $f(x)$ en x_0 .



Interpretación xeométrica: O cociente

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

coincide coa pendente da recta secante que pasa polos puntos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. A medida que vai diminuindo a amplitude do intervalo $[x_0, x_0 + h]$, os puntos de corte determinados polas distintas secantes fanse máis e máis próximos. No límite, a secante convértese na tanxente.

Así, a derivada de $f(x)$, en $x = x_0$, coincide coa pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(x_0, f(x_0))$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \text{Pendente da recta tanxente á gráfica de } f(x), \text{ en } x = x_0.$$

b) $f'(x) = -2e^{-x}(x+1) + 2e^{-x} = -2xe^{-x}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(x) = -2e^{-x} + 2xe^{-x} = 2e^{-x}(x-1)$$

$$f''(0) = -2 < 0$$

} $\Rightarrow$ Máximo relativo: (0,2)

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$		

Crecente en $(-\infty, 0)$
 Decrecente en $(0, \infty)$

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 4:

a)

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2 - \frac{x}{4}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}} - \frac{1}{4}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{4(4+x)\sqrt{4+x}}}{2} = \boxed{-\frac{1}{64}}$$

b) Buscamos unha función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ e ademais $F(\pi) = 0$

$$\int x \operatorname{sen} x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

↑

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Por partes:} \\ u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\}$$

$$0 = F(\pi) = \pi + C \Rightarrow C = -\pi$$

Polo tanto

$$\boxed{f(x) = -x \cos x + \operatorname{sen} x - \pi}$$

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

- a) Estuda, segundo os valores de m , o rango da matriz $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$

b) Coincide A coa súa inversa para algún valor de m ?

c) Determina unha matriz simétrica X de orde 2 tal que $X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ e o determinante da matriz $3X$ sexa -9
- a) Calcula o punto simétrico do punto $P(-2,0,2)$ respecto ao plano $\pi: 3x + 2y + z - 3 = 0$.

b) Sexa r a recta perpendicular ao plano $\pi: 3x + 2y + z - 3 = 0$ e que pasa polo punto $P(-2,0,2)$.
Consideremos a recta $s: \begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ x - z - 10 = 0 \end{cases}$
Estuda a posición relativa de r e s . Calcula a ecuación do plano paralelo a s que contén a r .
- a) Define función continua nun punto. ¿Que tipo de discontinuidade ten $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2x}$ nos puntos $x = 0$ e $x = 2$?

b) Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$ no seu punto de inflexión.
- a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2 - \sqrt{x}}$ (Nota: $\ln$ = logaritmo neperiano)

b) Calcula $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx$

OPCIÓN B

- a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} 3x - y - 2z &= m + 9 \\ mx + 3y - z &= 0 \\ 3x - y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = -9$.
- a) Define o produto vectorial de dous vectores. Dados os vectores $u = (2,2,0)$, $v = (1,1,-1)$, calcula os vectores unitarios e perpendiculares aos dous vectores u e v .

b) Calcula o valor de a para que a recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4}$ non corte ao plano $\pi: 5x + ay + 4z = 5$. Para ese valor de a , calcula a distancia da recta ao plano.
- a) Dada a función $f(x) = \frac{ax+b}{cx-1}$ calcula os valores de a, b, c sabendo que $x = \frac{1}{2}$ é unha asíntota vertical e que $y = 5x - 6$ é a recta tanxente á súa gráfica no punto correspondente a $x = 1$. Para os valores de a, b, c calculados, posúe $f(x)$ máis asíntotas?

b) Enuncia o teorema do valor medio do cálculo diferencial. Pódese aplicar, no intervalo $[0,1]$, este teorema á función $f(x) = \frac{1}{2-x}$? En caso afirmativo calcula o punto ao que fai referencia o teorema.
- Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = -x^2$ e a recta normal á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente a $x = 1$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixes, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade).

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

- Define menor complementario e adxunto dun elemento nunha matriz cadrada.
 - Sexan I a matriz identidade de orde 3 e $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina os valores de λ para os que $A + \lambda I$ non ten inversa.
 - Calcula a matriz X que verifica $AX - A = 2X$, sendo A a matriz dada no apartado b).
- Dado o plano $\pi: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda - \mu \\ y = 1 - 2\lambda + \mu \\ z = 4 + 3\mu \end{cases}$ e a recta $r: \begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

 - Estuda a posición relativa de π e r . Se se cortan, calcula o punto de corte.
 - Calcula o ángulo que forman π e r . Calcula o plano que contén a r e é perpendicular a π .
- Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-2x} - 2x}{\sin^2 x}$
 - Queremos dividir un fio metálico de 70 metros de lonxitude en tres partes de maneira que unha delas teña dobre lonxitude que outra e ademais que ao construír con cada parte un cadrado, a suma das áreas dos tres cadrados sexa mínima. Calcula a lonxitude de cada parte.
- A segunda derivada dunha función $f(x)$ é $f''(x) = 4e^{2x} - 2x$. Ademais a tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(0,1)$ é paralela á recta $x - y + 3 = 0$. Calcula $f(x)$.
 - Calcula $\int_0^{\pi/2} x \sin(2x + \pi) dx$

OPCIÓN B

- Discute, segundo os valores de m , o sistema:
$$\begin{cases} x + my + (m-1)z = m \\ (m-1)y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$
 - Resólveo, se é posible, para $m = 3$.
- Dadas as rectas $r: \begin{cases} x + y - 2z - 5 = 0 \\ y - 5z - 1 = 0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 5 \end{cases}$

 - Estuda a súa posición relativa. Se se cortan, calcula o punto de corte.
 - Calcula a ecuación implícita ou xeral e as ecuacións paramétricas do plano que contén a r e a s .
 - Calcula a distancia do punto $Q(1,1,4)$ á recta s .
- Dada a función $f(x) = \begin{cases} mx & \text{se } x < 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

 - Calcula os valores de a , b e m para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 1$ e teña un extremo relativo en $x = 3$.
 - Enuncia o teorema do valor medio do cálculo diferencial. Para os valores $a = 1$, $b = -6$ e $m = -4$, calcula, se existe, un punto $c \in (0,5)$ tal que a tanxente á gráfica de $f(x)$ en $x = c$ sexa paralela ao segmento que une os puntos $(0,0)$ e $(5,-4)$.
- Calcula $\int_0^1 \frac{2}{3+3e^x} dx$
 - Enuncia o teorema fundamental do cálculo integral. Se $F(x) = \int_0^x \frac{2}{3+3e^t} dt$, calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1)

- 1 punto
- 0,5 puntos
- 1,5 puntos

2)

a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola recta perpendicular ao plano π e pasando polo punto P .
- 0,25 puntos polo punto de intersección da recta anterior con plano π .
- 0,25 puntos polo cálculo das coordenadas do punto simétrico.

b) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto polo estudo da posición relativa das dúas rectas.
- 1 punto pola ecuación (vectorial, paramétrica ou implícita) do plano que contén a unha recta e é paralelo á outra.

3)

a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola definición de función continua nun punto.
- 0,25 puntos polo estudo da continuidade en $x = 0$.
- 0,25 puntos polo estudo da continuidade en $x = 2$.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola obtención do punto de inflexión.
- 0,5 puntos pola obtención da recta tanxente no punto de inflexión.

4)

a) 1 punto

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,25 puntos polo cambio de variable.
- 0,5 puntos pola descomposición en fraccións simples e o cálculo das integrais que resultan.
- 0,25 puntos por aplicar Barrow

OPCIÓN B

1)

a) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto polo cálculo dos rangos segundo os valores de m .
- 1 punto pola discusión do sistema.

b) 1 punto

2)

a) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,75 puntos pola definición do produto vectorial de dous vectores.
- 0,75 puntos pola determinación dos vectores pedidos.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos polo cálculo de a .
- 1 punto pola distancia da recta ao plano

3)

a) 1 punto, distribuído en:

- 0,25 puntos polo cálculo de c .
- 0,5 puntos polo cálculo de a e b .
- 0,25 puntos pola asíntota horizontal.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial.
- 0,25 puntos pola xustificación de que se pode aplicar o teorema do valor medio do cálculo diferencial á función dada e no intervalo dado.
- 0,25 puntos pola obtención do punto ao que fai referencia o teorema.

4) 2 puntos, distribuídos en:

- 0,25 puntos pola representación da parábola.
- 0,5 puntos pola recta normal no punto pedido.
- 0,75 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1. a) 0,5 puntos

b) 1 punto

c) 1,5 puntos

2. a) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola posición relativa da recta e o plano
- 0,5 puntos pola obtención do punto de corte.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola determinación do ángulo que forman a recta e o plano.
- 1 punto polo plano que contén á recta e é perpendicular ao plano dado.

3. a) 1 punto

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola expresión da función a minimizar
- 0,5 puntos pola determinación do punto crítico e xustificar que é mínimo.

4. a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola obtención de $f'(x)$
- 0,5 puntos pola obtención de $f(x)$

b) 1 punto

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

1. a) 2 puntos, distribuidos en:

- 1 punto pola determinación dos rangos segundo os valores de m .
- 1 punto pola discusión do sistema.

b) 1 punto.

2. a) 1,5 puntos, distribuidos en:

- 1 punto pola posición relativa das rectas.
- 0,5 puntos polo cálculo do punto de corte.

b) 0,75 puntos

c) 0,75 puntos

3. a) 1 punto

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial.
- 0,5 puntos pola determinación do punto

4. a) 1 punto

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema fundamental do cálculo integral.
- 0,5 puntos pola aplicación do teorema fundamental do cálculo integral.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = 3m^2 + 3m + 2 - 3m - 2m^2 - 3 = m^2 - 1;$$

Polo tanto:

Se $m = 1$ ou $m = -1$, entón $\text{rang}(A) = 2$ Se $m \neq \pm 1$, entón $\text{rang}(A) = 3$

$$\text{b)} A = A^{-1} \Leftrightarrow A^2 = I$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 + 4 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Como $m^2 + 4 \neq 1, \forall m$

Podemos afirmar:

$A^2 \neq I, \forall m$

$$\text{c)} \text{ Por ser unha matriz simétrica de orde 2: } X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Facendo o produto das matrices:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ b + c = 5 \end{cases}$$

E a condición sobre o determinante:

$$-9 = \det(3X) = 9 \det(X) \Rightarrow \det(X) = -1 \Rightarrow ac - b^2 = -1$$

Temos así un sistema de tres ecuacións con tres incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 3 \\ b + c = 5 \\ ac - b^2 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 - a \\ c = 5 - b = 2 + a \\ a(2 + a) - (3 - a)^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

Polo tanto:

$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
--

Exercicio 2:

a) Vector normal ao plano π : $\vec{n}_\pi = (3,2,1)$

Recta perpendicular a π pasando por $P(-2,0,2)$:

$$r: \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

Calculamos o punto de intersección de r con π :

$$3(-2 + 3\lambda) + 4\lambda + 2 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow 14\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/2 \Rightarrow M = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2})$$

Para obter as coordenadas do punto $P'(x,y,z)$, simétrico de $P(-2,0,2)$, basta ter en conta que M é o punto medio do segmento que une P con P' . Polo tanto:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2} &= \frac{x-2}{2} \\ 1 &= \frac{y+0}{2} \\ \frac{5}{2} &= \frac{z+2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{P'(1,2,3)}$$

b) Determinamos un punto e un vector director de cada unha das dúas rectas:

$$P_r = P(-2,0,2) \in r; \quad \vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (3,2,1)$$

$$P_s = (0,30,-10) \in s; \quad \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1, -1, 1)$$

E como

$$\text{rang}(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s) = \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 30 & -12 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad \swarrow 4+36+30+24+2-90 \neq 0$$

Polo tanto:

As rectas r e s crúzanse

Sexa α o plano que contén a r e é paralelo a s . Entón, o punto $P_r = P(-2,0,2) \in r$ é un punto de α e $\vec{v}_r = (3,2,1)$, $\vec{v}_s = (1,-1,1)$ son dous vectores paralelos a dito plano. Polo tanto:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x+2 & y & z-2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3(x+2) + 2y + 5(z-2) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha: 3x - 2y - 5z + 16 = 0}$$

Nota: Non se pedía ningún tipo de ecuación do plano, polo que tamén valía a vectorial ou paramétricas.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) Una función $f(x)$ dise continua nun punto x_0 se:

- 1) Existe e é finito $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- 2) Existe $f(x_0)$
- 3) O valor da función no punto coincide co límite anterior: $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Discontinuidade en $x = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+2)(\cancel{x-2})}{x(\cancel{x-2})} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+2)(\cancel{x-2})}{x(\cancel{x-2})} = -\infty \end{aligned} \right\} \text{Discontinuidade de salto infinito}$$

Discontinuidade en $x = 2$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+2)(\cancel{x-2})}{x(\cancel{x-2})} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+2)(\cancel{x-2})}{x(\cancel{x-2})} = 2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Discontinuidade evitable.} \\ \text{Evítase definindo } f(2) = 2 \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{b) } f(x) &= 2x^3 - 6x^2 + 1 \\ f'(x) &= 6x^2 - 12x \\ f''(x) &= 12x - 12 \\ f''(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ f'''(x) &= 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{No punto } (1, -3), f(x) \text{ ten un punto de inflexión.}$$

$f'(1) = 6$ = pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(1, -3)$. Polo tanto, a ecuación da recta tanxente no punto $(1, -3)$ é:

$$y + 3 = -6(x - 1)$$

É dicir: $y = -6x + 3$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2 - \sqrt{x}} \stackrel{\text{Indeterminación } \frac{0}{0}, \text{ aplicamos L'Hôpital.}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{2x-1}}{2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2}{3/2} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$$\text{b) } \int \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx \stackrel{\text{Substitución: } e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt}{=} \int \frac{dt}{t^2 + 3t + 2}$$

Calculamos as raíces do denominador e facemos a descomposición en fraccións simples:

$$\frac{1}{t^2 + 3t + 2} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+1} = \frac{(A+B)t + A+2B}{(t+2)(t+1)} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A + 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = -1; B = 1$$

Entón:

$$\int \frac{dt}{t^2 + 3t + 2} = -\int \frac{dt}{t+2} + \int \frac{dt}{t+1} = \ln \left| \frac{t+1}{t+2} \right| + C$$

Tendo en conta que $e^x = t$ e aplicando Barrow:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx = \left[\ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x + 2} \right) \right]_0^1 = \ln(e+1) - \ln(e+2) - \ln 2 + \ln 3 = \ln(3e+3) - \ln(2e+4)$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx = \ln \left(\frac{3e+3}{2e+4} \right)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ m & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $C^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & m+9 \\ m & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos o rango de C :

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

$$|C| = 45 + 2m + 3 + 18 - 3 + 5m = 63 + 7m$$

Polo tanto

Se $m = -9$, entón $\text{rang}(C) = 2$

Se $m \neq -9$, entón $\text{rang}(C) = 3$

Calculamos o rango de C^* para $m = -9$ (nos demais casos, o rango é 3 pois sempre $\text{rang}(C^*) \geq \text{rang}(C) = 3$ e C^* ten 3 filas). Pero para $m = -9$, todos os elementos da cuarta columna de C^* son 0, polo que podemos prescindir dela a efectos do rango e así, neste caso, temos que $\text{rang}(C^*) = \text{rang}(C) = 2$

Entón

$m = -9 \Rightarrow \text{rang}(C^*) = 2$

$m \neq -9 \Rightarrow \text{rang}(C^*) = 3$

Discusión:

$m = -9 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(C^*) < \text{número de incógnitas}$. Sistema compatible indeterminado. Infinitas solucións.

$m \neq -9 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3 = \text{rang}(C^*) = \text{número de incógnitas}$. Sistema compatible determinado. Solución única

b) $m = -9$

Tendo en conta o apartado anterior, estamos no caso dun sistema compatible indeterminado.

O sistema é equivalente a:

$$\left. \begin{array}{l} -y - 2z = -3x \\ 3y - z = 9x \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3y - 6z = -9x \\ 3y - z = 9x \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ y = 3x \end{array} \right.$$

As infinitas solucións son:

$$\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3\lambda; \\ z = 0 \end{array} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a) O produto vectorial de dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é outro vector que se representa por $\vec{u} \times \vec{v}$ e que se obtén do seguinte modo:

1. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son non nulos e non proporcionais, entón $\vec{u} \times \vec{v}$ é o vector de
 - i. Módulo: $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\widehat{u,v})$
 - ii. Dirección: perpendicular a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$
 - iii. Sentido: cara arriba se $(\widehat{u,v}) < 180^\circ$ e cara abaixo se $(\widehat{u,v}) > 180^\circ$
(tomando o ángulo en sentido positivo, é dicir, contrario ao movemento das agullas do reloxo).
2. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son linearmente dependentes, é dicir, se algún deles é $\vec{0}$ ou se teñen a mesma dirección, entón $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Os vectores pedidos serán:

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}; \quad \vec{w}_2 = -\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Como

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 2, 0); \quad |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

Entón:

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \\ \vec{w}_2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \end{aligned}$$

b) A recta e o plano serán paralelos se o vector director da recta é perpendicular ao vector normal ao plano:

$$r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{v}_r = (2, 6, -4) \perp \vec{n}_\pi = (5, a, 4)$$

Polo tanto:

$$r \parallel \pi \Leftrightarrow 10 + 6a - 16 = 0$$

Así: $r \parallel \pi \Leftrightarrow a = 1$

Como, para $a = 1$, a recta e o plano son paralelos, a distancia da recta ao plano é a distancia dun punto da recta ao plano:

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|0 + 2 + 8 - 5|}{\sqrt{25 + 1 + 16}} = \frac{5}{\sqrt{42}}$$

Polo tanto:

$$d(r, \pi) = \frac{5\sqrt{42}}{42}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) $x = \frac{1}{2}$ asíntota vertical $\Rightarrow \boxed{c = 2}$

$$f(x) = \frac{ax+b}{2x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{a(2x-1) - 2(ax+b)}{(2x-1)^2} = \frac{\cancel{2ax} - a - \cancel{2ax} - 2b}{(2x-1)^2} = \frac{-a-2b}{(2x-1)^2}$$

Como a recta $y = 5x - 6$ é tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente a $x = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = -5 \\ f'(1) = 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + b = -1 \\ -a - 2b = 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{a = 3} \\ \boxed{b = -4} \end{array} \right.$$

Para estes valores de a , b e c , $f(x)$ ten unha asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x-4}{2x-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\text{Asíntota horizontal: } y = \frac{3}{2}}$$

b) Teorema do valor medio do cálculo diferencial: Se $f(x)$ é unha función continua no intervalo $[a, b]$ e derivable en (a, b) entón existe polo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

A función dada é unha función racional e o denominador non se anula no intervalo $[0,1]$. Polo tanto, é continua en $[0,1]$ e derivable en $(0,1)$ e podemos aplicar o teorema do valor medio do cálculo diferencial:

$$f(0) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$$

$$\frac{1}{(2c-1)^2} = \frac{1-1/2}{1-0} \Rightarrow c^2 - 4c + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 - \sqrt{2} \in (0,1) \\ c_2 = 2 + \sqrt{2} \notin (0,1) \end{cases}$$

Polo tanto, o punto que cumpre a igualdade do teorema é:

$$\boxed{c = 2 - \sqrt{2}}$$

Exercicio 4:

$$f(x) = -x^2 \Rightarrow f(1) = -1$$

$$f'(x) = -2x \Rightarrow f'(1) = -2 = \text{pendente da recta tanxente á gráfica de } f(x) \text{ en } (1, -1)$$

$$\text{Entón, } m = 1/2 = \text{pendente da recta normal á gráfica de } f(x) \text{ no punto } (1, -1)$$

Ecuación da recta normal á gráfica de $f(x)$ no punto $(1, -1)$:

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

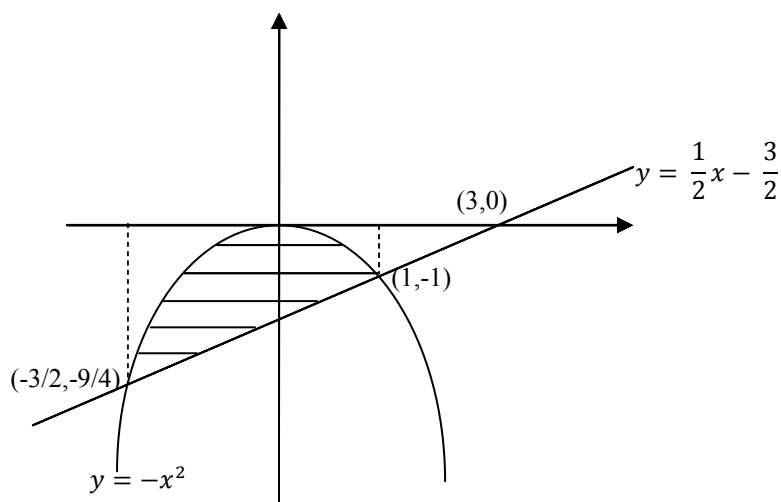
$$f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow f(x) \text{ é cóncava}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f''(x) = -2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ ten un máximo en } (0,0) \Rightarrow (0,0) \text{ é o vértice da parábola}$$

$$\text{Puntos de corte cos eixes: } \begin{cases} \text{parábola: } (0,0) \\ \text{recta normal: } (3,0), (0, -3/2) \end{cases}$$

Puntos de corte da parábola e a recta normal:

$$-x^2 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3/2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (-3/2, -9/4); (1, -1)$$



$$A = \int_{-3/2}^1 \left(-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x\right]_{-3/2}^1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \left(\frac{9}{8} - \frac{9}{16} - \frac{9}{4}\right) = \frac{-4-3+18}{12} - \frac{18-9-36}{16} = \frac{11}{12} + \frac{27}{16} = \frac{125}{48}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{125}{48} u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) Dada unha matriz cadrada de orde n , chámase menor complementario do elemento a_{ij} , ao valor do determinante da matriz de orde $n-1$ que resulta de suprimir a fila i e a columna j . Representase por α_{ij} .

Chámase adxunto do elemento a_{ij} a: $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$, é dicir é o menor complementario co seu signo ou con signo cambiado, segundo que $i + j$ sexa par ou impar.

b) $A + \lambda I$ non ten inversa $\Leftrightarrow |A + \lambda I| = 0$

$$\begin{aligned} |A + \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1+\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 1+\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^3 - 4(1+\lambda) = (1+\lambda)[(1+\lambda)^2 - 4] = \\ &= (1+\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = (1+\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 3) \end{aligned}$$

Polo tanto

$$A + \lambda I \text{ non ten inversa} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

por b), $\exists (A - 2I)^{-1}$

c) $AX - A = 2X \Leftrightarrow (A - 2I)X = A \Leftrightarrow X = (A - 2I)^{-1} \cdot A$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad |A - 2I| = -1 + 4 = 3$$

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & -1 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & -1 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & 4/3 \\ 2/3 & -1 & 4/3 \\ 4/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & 4/3 \\ 2/3 & -1 & 4/3 \\ 4/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Determinamos un vector director da recta:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1)$$

Determinamos un vector normal ao plano:

$$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-6, -6, 0)$$

Entón:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = 6 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r \text{ e } \pi \text{ córtanse nun punto}}$$

O vector $(1, 1, 0)$ ten a dirección de $\vec{n}_\pi$ e o punto $P(2, 1, 4) \in \pi$. Así, a ecuación implícita do plano π é:

$$x - 2 + y - 1 = 0 \Rightarrow \pi: x + y - 3 = 0$$

Para calcular o punto de corte, resolvemos o sistema formado polas ecuacións da recta e a do plano:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 3 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \\ y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Punto de corte: } (0, 3, 4)}$$

b) Se α = ángulo que forman π e r , entón:

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \frac{6}{\sqrt{2} \sqrt{72}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{6}}$$

Chamemos β ao plano que contén a r e é perpendicular a π . Os vectores $\vec{v}_r$ e $\vec{n}_\pi$ son polo tanto vectores contidos no plano β

Como β contén a r , os puntos da recta son puntos de β . Por exemplo,

$$(4, 3, 0) \in r \Rightarrow (4, 3, 0) \in \beta$$

Como non se especifica ningún tipo de ecuación do plano, podemos dar calquera, por exemplo as paramétricas:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 4 - \lambda + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = \lambda \end{array}}$$

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a)

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-2x} - 2x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 2e^{-2x} - 2}{2\sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x - 4e^{-2x}}{2\cos^2 x - 2\sin^2 x} = \boxed{-\frac{5}{2}}$$

b)

Lonxitudes das partes: x ; $2x$; $70 - 3x$

Función a minimizar:

$$f(x) = \frac{1}{16} [x^2 + 4x^2 + (70 - 3x)^2] = \frac{1}{16} (14x^2 - 420x + 4900)$$

$$f'(x) = \frac{1}{16} (28x - 420)$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{420}{28} = 15 \\ f''(x) = \frac{28}{16} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (15, f(15)) \text{ mínimo}$$

Lonxitudes das partes: 15cm; 30cm; 25cm

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

a)

$f'(x)$ é unha primitiva de $f''(x)$, así que calculamos a integral indefinida de $f''(x)$:

$$\int (4e^{2x} - 2x)dx = 2e^{2x} - x^2 + C$$

Para determinar a constante C usamos que $f'(0) =$ pendente da recta $x - y + 3 = 0$. Polo tanto

$$1 = f'(0) = 2 + C \Rightarrow C = -1$$

$$\text{Entón, } f'(x) = 2e^{2x} - x^2 - 1$$

Calculamos a integral indefinida de $f'(x)$, posto que $f(x)$ é unha primitiva de $f'(x)$

$$\int (2e^{2x} - x^2 - 1)dx = e^{2x} - \frac{x^3}{3} - x + K$$

E para determinar a constante K , usamos que $f(x)$ pasa polo punto $(0,1)$

$$1 = f(0) = 1 + K \Rightarrow K = 0$$

Así:

$$f(x) = e^{2x} - \frac{x^3}{3} - x$$

b)

$$\int x \operatorname{sen}(2x + \pi) dx = -\frac{x}{2} \cos(2x + \pi) + \int \frac{1}{2} \cos(2x + \pi) dx = -\frac{x}{2} \cos(2x + \pi) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x + \pi) + C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(2x + \pi) dx \Rightarrow v = -\frac{\cos(2x + \pi)}{2} \end{array} \right\}$$

$$\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen}(2x + \pi) dx = \left[-\frac{x}{2} \cos(2x + \pi) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x + \pi) \right]_0^{\pi/2} = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & m & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, matriz ampliada: $C^* = \begin{pmatrix} 1 & m & m-1 & m \\ 0 & m-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos o rango de C :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

$$|C| = m - (m-1)^2 - 1 = -m^2 + 3m - 2; |C| = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ ou } m = 2$$

Polo tanto:

Se $m = 1$ ou $m = 2$, entón $\text{rang}(C) = 2$

Se $m \notin \{1,2\}$, entón $\text{rang}(C) = 3$

Calculamos o rango da matriz ampliada C^* :

Se $m \notin \{1,2\}$, entón $\text{rang}(C^*) = 3$ (sempre $\text{rang}(C^*) > \text{rang}(C)$)

$m = 1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C^*) = 3$$

$m = 2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C^*) = 3$$

Discusión:

$m = 1$ ou $m = 2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(C^*)$. Sistema incompatible.

$m \notin \{1,2\} \Rightarrow \text{rang}(C) = 3 = \text{rang}(C^*) = n^\circ$ incógnitas. Sistema compatible determinado.

b)

Para $m = 3$, estamos no caso dun sistema compatible determinado e polo tanto ten solución única. Calculamos a solución utilizando a regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{3}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{3}{2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = 3$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} \\ y &= -\frac{3}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Determinamos un vector director e un punto de cada unha das rectas:

$$P_r(4,1,0); \quad \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (-3, 5, 1)$$
$$P_s(1,2,5); \quad \vec{v}_s = (1, -2, 0)$$

Coordenadas non proporcionais. Polo tanto, as rectas córtanse ou crúzanse

Para saber se se cortan ou se cruzan, estudiamos o $\text{rang}(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s})$, polo anterior xa sabemos que $\text{rang}(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 1 - 6 - 25 = 0 \Rightarrow \text{rang}(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) = 2$$

As rectas córtanse

Para calcular o punto de corte, substituímos a x, y e z das ecuacións de s nas ecuacións de r :

$$\begin{aligned} 1 + \lambda + 2 - 2\lambda - 10 - 5 &= 0 &\Rightarrow \lambda &= -12 \\ 2 - 2\lambda - 25 - 1 &= 0 &\Rightarrow \lambda &= -12 \end{aligned}$$

E substituíndo nas ecuacións de s , obtemos as coordenadas do punto de corte

Punto de corte: $(-11, 26, 5)$

b) Como o plano contén ás rectas, $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ son dous vectores contidos no plano e polo tanto, $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$ é un vector normal ao plano. Ademais, calquera punto das rectas tamén pertence ao plano, por exemplo $P_r(4,1,0)$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (2, 1, 1)$$

Ecuación implícita:

$$2(x - 4) + (y - 1) + z = 0 \Rightarrow \boxed{2x + y + z - 9 = 0}$$

c)

$$d(Q, s) = \frac{|\overrightarrow{P_s Q} \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{30}}{5}}$$
$$\overrightarrow{P_s Q} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, -1, 1)$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = m$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + b + 1 = f(1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} m & \text{se } x < 1 \\ 2ax + b & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sexa continua en $x = 1$

$$\Rightarrow m = a + b + 1$$

Entón, debe cumprirse:

$$\left. \begin{aligned} m &= a + b + 1 \\ m &= 2a + b \end{aligned} \right\}$$

Para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 1$

$$6a + b = 0$$

($f'(3) = 6a + b, f'(3) = 0$, por ter un extremo relativo en $x = 3$.)

Resolvendo este sistema obtense:

$$\boxed{m = -4; a = 1; b = -6}$$

b) Teorema do valor medio do cálculo diferencial: Se $f(x)$ é continua no intervalo $[a, b]$ e derivable en (a, b) , entón existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

é dicir, a tanxente á gráfica de $f(x)$, no punto $x = c$, é paralela ao segmento que une os puntos $(a, f(a)), (b, f(b))$.

Para os valores dados, a función é derivable en $\mathbb{R}$ (en $(-\infty, 1)$ e $(1, \infty)$ é polinómica e para eses valores xa vimos que era derivable en $x = 1$) e ademais

$$f(x) = \begin{cases} -4x & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 6x + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} -4 & \text{se } x < 1 \\ 2x - 6 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Temos que encontrar un $c \in (0, 5)$ tal que $f'(c)$ coincida coa pendente do segmento que une os puntos $(0, 0), (5, -4)$, é dicir:

$$f'(c) = \frac{-4-0}{5-0} = -\frac{4}{5} \Rightarrow 2c - 6 = -\frac{4}{5} \Rightarrow 2c = \frac{26}{5}$$

$$\boxed{c = 13/5}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

a)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2}{3+3e^x} dx &= \frac{2}{3} \int \frac{1}{1+e^x} dx \xrightarrow{e^x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{t} dt} \frac{2}{3} \int \frac{1}{t(1+t)} dt = \frac{2}{3} \int \frac{1}{t} dt - \frac{2}{3} \int \frac{1}{t+1} dt = \frac{2}{3} \ln|t| - \frac{2}{3} \ln|1+t| + C = \\
 &\quad \frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{(A+B)t + A}{t(t+1)} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases} \\
 &\quad \xrightarrow{e^x = t \Rightarrow x = \ln t} = \frac{2}{3} [x - \ln(1+e^x)] + C
 \end{aligned}$$

e aplicando a regra de Barrow:

$$\int_0^1 \frac{2}{3+3e^x} dx = \frac{2}{3} [x - \ln(1+e^x)]_0^1 = \frac{2}{3} [1 - \ln(1+e) + \ln 2]$$

Solución: $\frac{2}{3} \ln \frac{2e}{1+e}$
--

b) Teorema fundamental do cálculo integral: Se $f(x)$ é continua en $[a, b]$, entón a función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ é derivable e ademais $F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$.

Indeterminación $\frac{0}{0}$ aplicamos L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3 + 3e^x} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

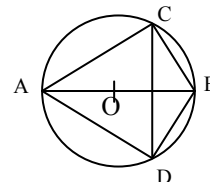
OPCIÓN A

- Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sexan B^t a matriz trasposta de B e I a matriz identidade de orde 3.
 - Estuda, segundo os valores do parámetro λ , o rango de $AB^t + \lambda I$.
 - Calcula a matriz X que verifica: $AB^t X - X = 2B$.
- Dados o plano $\pi: x + y - z - 1 = 0$ e a recta $r: \begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$
 - Estuda a posición relativa de r e π . Calcula a distancia de r a π .
 - Calcula a ecuación xeral ou implícita do plano que contén a r e é perpendicular a π .
- Enuncia o teorema de Bolzano. ¿Ten a ecuación $x^3 + 2x - 2 = 0$ algunha solución no intervalo $(0,1)$? ¿Ten esta ecuación máis dunha solución real?
 - Calcula os valores de a e b para que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - e^{2x}}{\sin(x^2)} = 1$
- Calcula os intervalos de crecemento e decrecemento e os intervalos de concavidade e convexidade da función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.
 - Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ e a bisectriz do primeiro cadrante. (Nota: para o debuxo da gráfica de $f(x)$, é suficiente utilizar o apartado anterior e calcular os puntos de corte cos eixes).

OPCIÓN B

- Discute, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} x + my + z &= 2 \\ mx - y + z &= 0 \\ 2x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$$
 - Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = 1$.
- Calcula as ecuacións paramétricas da recta r que pasa pola orixe de coordenadas e é perpendicular ao plano π determinado polos puntos $A(1,0,2)$, $B(2,1,3)$ e $C(3,0,0)$.
 - Calcula os posibles valores de a para que o punto $P(a,a,a)$ equidiste da recta r e do plano π do apartado anterior.
- Nunha circunferencia de centro O e radio 10 cm. trázase un diámetro AB e unha corda CD perpendicular a ese diámetro. ¿A que distancia do centro O da circunferencia debe estar a corda CD , para que a diferenza entre as áreas dos triángulos ADC e BCD sexa máxima?
- Enuncia o teorema de Rolle. Determina o valor de a para que sexa aplicable o teorema de Rolle á función $f(x) = x^3 + ax - 1$, no intervalo $[0,1]$. Para este valor de a , calcula un punto $c \in (0,1)$ no que a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ sexa paralela ao eixe OX .
 - Calcula $\int \frac{x^3+3}{x^2-x} dx$



MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2puntos, exercicio 4= 2puntos)

OPCIÓN A

- Sexa M unha matriz cadrada de orde 2 tal que $M^2 = 4M$. Determina a matriz X que verifica a ecuación matricial $(M - 2I)^2 X = I$, sendo I a matriz identidade de orde 2.
 - Determina todas as matrices B da forma $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ que verifiquen $B^2 = 4B$. Se algunha é inversible, calcula a súa inversa.
 - ¿Cando un sistema de ecuacións lineais se di homoxéneo? ¿Pode ser incompatible un sistema de ecuacións lineais homoxéneo? Xustifica a resposta.
- Dadas as rectas $r: \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

 - Estuda a posición relativa de r e s . Se se cortan, calcula o punto de corte. Se determinan un plano, calcula a ecuación xeral ou implícita dese plano.
 - Estuda a posición relativa de r e o plano $\pi: 4x - 4y + 2z + 7 = 0$. Calcula a distancia de r a π .
- Calcula: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} + 1}{xe^x}$
 - Se $f(x)$ é unha función continua no intervalo $[1,4]$ tal que $\int_1^2 f(x)dx = 2$ e $\int_1^4 f(x)dx = -4$, ¿cal é o valor de $\int_2^4 5f(x)dx$? Enuncia as propiedades da integral definida que utilices.
- Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = -x^2 + 9x$, e as rectas $y = 20$; $x - y + 15 = 0$. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indicar os puntos de corte cos eixes, o vértice da parábola e a concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

- Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

 - Calcula, segundo os valores de m , o rango de A .
 - ¿Coincide A coa súa inversa para algún valor de m ? Para $m = 0$, calcula A^{60}
 - Se $m = 2$ e A é a matriz de coeficientes dun sistema de tres ecuacións lineais con tres incógnitas, ¿podemos afirmar que o sistema ten solución única? Xustifica a resposta
- Dado o plano $\alpha: \begin{cases} x = 3 + 3\lambda + \mu \\ y = -3\lambda + \mu \\ z = 3 + \lambda - \mu \end{cases}$ calcula as ecuacións en forma continua da recta r que pasa polo punto $P(2, -3, -4)$ e é perpendicular ao plano α . Calcula o punto de corte de r con α .
 - Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa polos puntos $P(2, -3, -3)$ e $Q(3, -2, -4)$ e é perpendicular ao plano α .
 - Calcula as ecuacións paramétricas da recta intersección do plano $\beta: 5x - 4y + z - 19 = 0$ co plano α
- Calcula o dominio, as asíntotas, os intervalos de crecemento e decrecemento e os máximos e mínimos de $f(x) = \frac{2x+1}{e^{x^2}}$
- Define primitiva dunha función e enuncia a regra de Barrow.
 - Calcula $\int_2^3 \frac{x^3+2}{x^2-1} dx$

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1) a) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención $AB^t + \lambda I$.
- 1 punto pola obtención do rango de $AB^t + \lambda I$, segundo os valores de λ .

b) 1,5 puntos

2) a) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola posición relativa da recta e o plano.
- 1 punto pola distancia da recta ao plano.

b) 1 punto

3) a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Bolzano.
- 0,25 puntos por xustificar que a ecuación ten unha solución no intervalo $(0,1)$.
- 0,25 puntos por xustificar que a ecuación ten solución única no intervalo $(0,1)$.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 pola obtención de b .
- 0,5 pola obtención de a .

4) a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola determinación dos intervalos de crecemento e decrecemento.
- 0,5 puntos pola determinación dos intervalos de concavidade e convexidade

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,25 puntos polo debuxo da rexión.
- 0,5 pola formulación do problema.
- 0,25 puntos polo cálculo da área

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

1. a) 2 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención dos valores de m que anulan o determinante da matriz de coeficientes
- 1,5 puntos pola discusión do sistema (0,5 puntos pola discusión no caso $m=-1/2$; 0,5 puntos pola discusión no caso $m=1$; 0,5 puntos pola discusión no caso $m \neq -1/2, 1$)

b) 1 punto

2. a) 1 punto

b) 2 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola distancia do punto ao plano
- 1 punto pola distancia do punto á recta
- 0,5 puntos pola obtención dos valores de a .

3. 2 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obter a expresión correspondente á diferenza das áreas en función de dúas variables
- 0,5 puntos pola relación entre as dúas variables na función anterior e expresar a función a maximizar en función dunha variable.
- 0,5 puntos pola obtención da derivada da función a maximizar
- 0,5 puntos pola obtención do valor que maximiza a diferenza das áreas

4. a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 polo enunciado do teorema de Rolle
- 0,25 puntos pola determinación do valor de a .
- 0,25 puntos pola determinación do valor de c .

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola división do numerador entre o denominador e o cálculo das raíces do denominador.
- 0,5 puntos polas integrais que resultan.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1. a) 0,5 puntos, pola obtención da matriz X

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención das matrices B que verifican a relación dada.
- 0,5 puntos polo cálculo da inversa

c) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola definición de sistema de ecuacións lineais homoxéneo
- 0,5 puntos por xustificar que todo sistema homoxéneo é compatible.

2. a) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola posición relativa das rectas
- 0,5 puntos pola obtención do punto de corte.
- 0,5 puntos pola ecuación implícita do plano.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola posición relativa da recta e o plano.
- 1 punto polo cálculo da distancia da recta ao plano.

3. a) 1 punto

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.
- 0,5 puntos polo enunciado das propiedades da integral definida.

4. 2 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola representación da parábola
- 1 punto pola formulación do problema
- 0,5 puntos polo cálculo da área

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

1. a) 1 punto

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola obtención do valor de m para o cal $A = A^{-1}$.
- 0,5 puntos polo cálculo de A^{60} .

c) 1 punto, pola xustificación da unicidade da solución.

2. a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola obtención das ecuacións, en forma continua, da recta r .
- 0,5 puntos polo cálculo do punto de corte da recta e o plano.

b) 1 punto

c) 1 punto

3. 2 puntos, distribuídos en:

- 0,25 puntos polo dominio.
- 0,5 puntos polas asíntotas.
- 1 punto polos intervalos de crecemento e decrecemento.
- 0,25 puntos polos máximos e mínimos.

4. a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola definición de primitiva dunha función.
- 0,5 puntos polo enunciado da regra de Barrow.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola división do numerador entre o denominador e a descomposición en suma de fraccións simples.
- 0,5 puntos polo cálculo das integrais que resultan.

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

$$\text{a) } AB^t + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 1 \quad 1) + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(AB^t + \lambda I) = \lambda(\lambda^2 - 1 + 1) = \lambda^3$$

$$\text{Polo tanto, } \det(AB^t + \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

Se $\lambda = 0$, entón

$$AB^t + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Filas proporcionais e} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \text{fila de ceros} \end{array}$$

Temos así que:

$$\boxed{\text{rang}(AB^t + \lambda I) = \begin{cases} 3 & \text{se } \lambda \neq 0 \\ 1 & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}}$$

$$\text{b) } AB^t X - X = 2B \Leftrightarrow (AB^t - I)X = 2B \Leftrightarrow X = 2(AB^t - I)^{-1}B$$

$\exists (AB^t - I)^{-1}$ pois para $\lambda = -1$, $\text{rang}(AB^t - I) = 3$

Calculamos $(AB^t - I)^{-1}$:

$$AB^t - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \det(AB^t - I) = -1$$

$$(AB^t - I)^{-1} = \frac{1}{\det(AB^t - I)} (Ad(AB^t - I)_{ij})^t = - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Polo tanto:

$$X = 2 \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \boxed{X = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Doutra forma:

$$AB^t X - X = 2B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 2 \\ a - 2b - c = 2 \\ -c = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = -8 \\ b = 4 \\ c = -2 \end{cases}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a) Resolvemos o sistema de ecuacións lineais determinado polas ecuacións da recta e do plano

$$r: \begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$$
$$\pi: x + y - z - 1 = 0$$

Discutimos o sistema formado polas tres ecuacións.

Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $C^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

O rango de C é como mínimo 2 xa que os planos que determinan a recta son secantes; e dado que

$$|C| = -3 + 2 - 1 + 2 = 0$$

Podemos concluir que $\text{rang}(C) = 2$. Por outra parte

$$|C^*| = 3 + 12 + 2 - 6 - 6 - 2 = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C^*) = 3$$

Polo tanto:

$\text{rang}(C) = 2 \neq 3 = \text{rang}(C^*)$. O sistema é incompatible e temos que

r e π son paralelos

Como a recta e o plano son paralelos, para calcular a distancia de r a π , calculamos a distancia dun punto arbitrario de r ao plano π :

se tomamos como punto de r : $P_r(1,0,3)$, entón

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|1-3-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}}; \quad d(r, \pi) = \sqrt{3} \text{ unidades}$$

b) Calculamos o vector director da recta r :

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 2, 1)$$

Elementos que determinan o plano pedido: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Un punto do plano: } P_r(1,0,3) \\ \text{Dous vectores contidos no plano:} \\ \vec{v}_r = (-1, 2, 1) \text{ e } \vec{n}_\pi = 1, 1, -1 \end{array} \right.$

entón, a ecuación xeral do plano será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + z - 4 = 0$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) Teorema de Bolzano: Se $f(x)$ é continua en $[a, b]$ e toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo, é dicir $f(a) \cdot f(b) < 0$, entón existe polo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Consideremos a función real de variable real $f(x) = x^3 + 2x - 2$

$f(x)$ é continua en $[0, 1]$ xa que é continua en $\mathbb{R}$ por ser unha función polinómica.
 $f(0) = -2 < 0$
 $f(1) = 1 > 0$

$\Rightarrow \exists c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$

teorema de Bolzano

Polo tanto, a ecuación $x^3 + 2x - 2 = 0$, ten unha solución real no intervalo $\in (0, 1)$.

Se $f(x)$ tivese dúas raíces reais c_1 e c_2 entón

$f(x)$ continua en $[c_1, c_2]$ e derivable en (c_1, c_2) por ser continua e derivable en $\mathbb{R}$
 $f(c_1) = 0 = f(c_2)$

$\Rightarrow \exists d \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(d) = 0$
(a función derivada tería unha raíz real)

teorema de Rolle

pero a función derivada, $f'(x) = 3x^2 + 2$, non ten raíces reais. Polo tanto:

$x^3 + 2x - 2 = 0$, ten unha única solución real e esa solución está no intervalo $(0, 1)$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - e^{2x}}{\sin(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + b - 2e^{2x}}{2x \cos(x^2)} = \frac{b-2}{0}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

Para que este límite sexa finito, ten que ser $b = 2$.

Tomando $b = 2$, resulta

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + 2 - 2e^{2x}}{2x \cos(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2a - 4e^{2x}}{2x \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2)} = \frac{2a-4}{2}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

Entón

$$\frac{2a-4}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0; \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6}$$

	$(-\infty, 2/3)$	$(2/3, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	Crecente	Decrecente	Crecente

Crecente nos intervalos $(-\infty, 2/3)$ e $(2, \infty)$
Decrecente no intervalo $(2/3, 2)$

$$f''(x) = 6x - 8; \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4/3$$

	$(-\infty, 4/3)$	$(4/3, \infty)$
$f''(x)$	< 0	> 0
$f(x)$	Cóncava	Convexa

Cóncava en $(-\infty, 4/3)$
Convexa en $(4/3, \infty)$

b) $x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow x(x - 2)^2 = 0$.

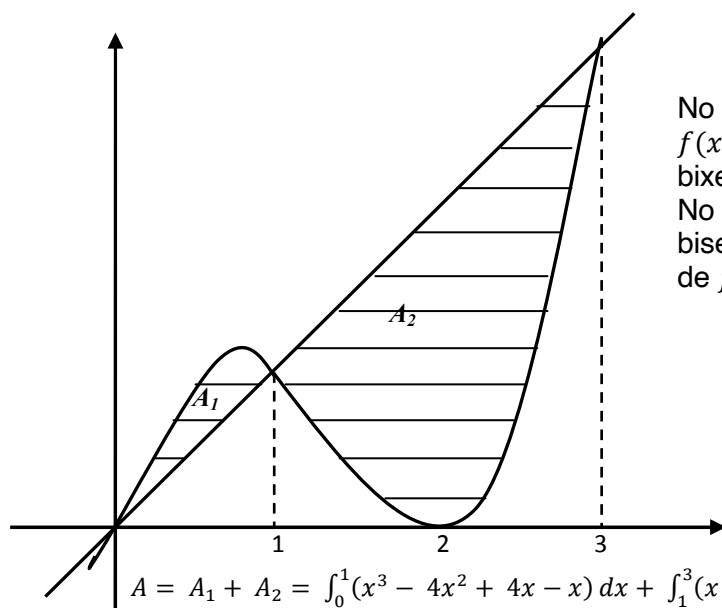
Os puntos de corte de $f(x)$ cos eixes son: $(0,0)$ e $(2,0)$

$$x^3 - 4x^2 + 4x = x \Rightarrow x(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$x = 0; \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

Os puntos de corte de $f(x)$ e a bixectriz $y = x$ son: $(0,0)$; $(1,1)$ e $(3,3)$

Con estes puntos de corte e os resultados do apartado a), podemos debuxar a rexión limitada polas gráficas de $f(x)$ e a bixectriz $y = x$



No intervalo $(0,1)$, a gráfica de $f(x)$ está por riba da gráfica de bixectriz

No intervalo $(1,3)$, a gráfica da bixectriz está por riba da gráfica de $f(x)$.

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 4x - x) dx + \int_1^3 (x - x^3 + 4x^2 - 4x) dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_1^3 = \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{81}{4} + 36 - \frac{27}{2} + \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}$$

$$A = \frac{37}{12} u^2$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $C^* = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ m & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos o rango de C :

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

$$|C| = -2 - m + 2m + 2 + 1 - 2m^2 = -2m^2 + m + 1$$

$$2m^2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \begin{matrix} 1 \\ -1/2 \end{matrix}$$

Polo tanto

Se $m = 1$ ou $m = -1/2$, entón $\text{rang}(C) = 2$

Se $m \neq 1$ e $m \neq -1/2$, entón $\text{rang}(C) = 3$

Calculamos o rango de C^* para $m = 1$ e para $m = -1/2$; (nos demais casos, o rango é 3, pois sempre $\text{rang}(C^*) \geq \text{rang}(C)$ e C^* ten 3 filas).

$$\underline{m = 1} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\underline{m = -1/2} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1/2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1/2 - 4 + 2 + 1 = -3/2 \neq 0;$$

Entón

$$m = 1 \Rightarrow \text{rang}(C^*) = 2$$

$$m \neq 1 \Rightarrow \text{rang}(C^*) = 3$$

Discusión:

$m = -1/2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 \neq 3 = \text{rang}(C^*)$. Sistema incompatible. Non ten solución
 $m = 1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(C^*) < \text{número de incógnitas}$. Sistema compatible indeterminado. Infinitas solucións.

$m \neq -1/2$ e $m \neq 1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3 = \text{rang}(C^*) < \text{número de incógnitas}$.
Sistema compatible determinado. Solución única

b) $\boxed{m = 1}$

Tendo en conta o apartado anterior, estamos no caso dun sistema compatible indeterminado. O sistema é equivalente a:

$$\left. \begin{matrix} -y + z = -x \\ -y + 2z = 1 - 2x \end{matrix} \right\} \Rightarrow z = 1 - x; y = 1$$

As infinitas solucións son:

$$\begin{matrix} x = \lambda \\ y = 1; \\ z = 1 - \lambda \end{matrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a) Os vectores $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ e $\overrightarrow{AC} = (2,0,-2)$ son linealmente independentes e están contidos no plano π . Polo tanto, o vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ten a dirección da recta r :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2, 4, -2)$$

E podemos tomar como $\vec{v}_r = (1, -2, 1)$. Tendo en conta que a recta pasa pola orixe de coordenadas, as súas ecuacións paramétricas serán:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) Tendo en conta que un punto da recta é $P_r(0,0,0)$, a distancia do punto $P(a, a, a)$ á recta r ven dada por:

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{P_r P} \times \vec{v}_r\|}{\|\vec{v}_r\|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & a \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{6}} = \frac{\|(3a, 0, -3a)\|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{18a^2}}{\sqrt{6}} = |a|\sqrt{3}$$

O plano π pasa polo punto $A(1,0,2)$ e os vectores $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ e $\overrightarrow{AC} = (2,0,-2)$ son dous vectores contidos no plano, polo tanto a súa ecuación xeral é:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: x - 2y + z - 3 = 0$$

e a distancia do punto $P(a, a, a)$ ao plano π é:

$$d(P, \pi) = \frac{|a - 2a + a - 3|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

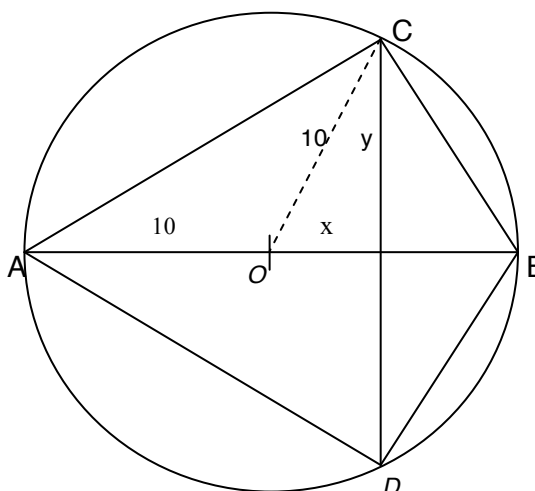
Polo tanto,

$$d(P, r) = d(P, \pi) \Leftrightarrow |a|\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\pm a = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:



$$\left. \begin{array}{l} \text{Triángulo ADC:} \\ \text{Base: } 2y \\ \text{Altura: } 10 + x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Área} = y(10 + x) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Triángulo BCD:} \\ \text{Base: } 2y \\ \text{Altura: } 10 - x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Área} = y(10 - x) \end{array}$$

Diferencia de áreas:

$$A_1 - A_2 = y(10 + x) - y(10 - x) = 2xy$$

O teorema de Pitágoras proporciónanos unha relación entre x e y :

$$y = \sqrt{10^2 - x^2}$$

Polo tanto, a función a maximizar que nos proporciona a diferencia de áreas é:

$$f(x) = 2x\sqrt{100 - x^2}$$

Calculamos os valores que anulan a primeira derivada

$$f'(x) = 2\sqrt{100 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(100 - x^2) = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \pm 5\sqrt{2}$$

Comprobamos que $x = 5\sqrt{2}$ corresponde a un máximo:

$$f''(x) = -\frac{2x}{\sqrt{100 - x^2}} - \frac{4x\sqrt{100 - x^2} + \frac{2x^3}{\sqrt{100 - x^2}}}{100 - x^2}; f''(5\sqrt{2}) = -\frac{10\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} - \frac{200 + 100}{50} = -8 < 0$$

Solución: $5\sqrt{2}$ cm.

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

a) Teorema de Rolle: Se $f(x)$ é continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) e ademais $f(a) = f(b)$, entón existe polo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

$f(x) = x^3 + ax - 1$ é continua e derivable en $\mathbb{R}$, xa que é unha función polinómica. Polo tanto, é continua en $[0, 1]$ e derivable en $(0, 1)$. Para aplicar Rolle neste intervalo, debemos impoñerlle a condición $f(0) = f(1)$

$$f(0) = f(1) \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Un punto do intervalo $(0, 1)$ no que a recta tanxente é paralela ao eixe OX, será un punto do intervalo no que se anule a primeira derivada (a existencia dese punto está garantida polo teorema de Rolle)

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1;$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, pero $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ non é un punto do intervalo $(0, 1)$. Polo tanto:

$$\boxed{c = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

b) Como o grao do polinomio do numerador é maior que o grao do polinomio do denominador, facemos a división:

$$\frac{x^3 + 3}{x^2 - x} = x + 1 + \frac{x + 3}{x^2 - x}$$

Como $x^2 - x = x(x - 1)$, facemos a descomposición en fraccións simples

$$\frac{x + 3}{x^2 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} = \frac{A(x - 1) + Bx}{x(x - 1)} \Rightarrow A = -3; B = 4$$

Entón:

$$\int \frac{x^3 + 3}{x^2 - x} dx = \int \left(x + 1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x - 1} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + x - 3\ln|x| + 4\ln|x - 1| + C$$

$$\boxed{\text{Solución: } \frac{1}{2}x^2 + x - 3\ln|x| + 4\ln|x - 1| + C}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

$$\text{a) } (M - 2I)^2 X = I \Leftrightarrow (M^2 - 4M + 4I)X = I \Rightarrow 4X = I \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$\nwarrow$
 $M^2 = 4M$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x & 4y \\ 4y & 4x \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2xy = 4y \\ x^2 + y^2 = 4x \end{array} \right\} \Rightarrow y(2x - 4) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } x = 2$$

Se $y = 0$:

$$x^2 = 4x \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4.$$

Se $x = 2$:

$$y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

Polo tanto, as matrices que cumpren as propiedades do exercicio son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Destas matrices, a única que ten determinante distinto de cero, e polo tanto inversa, é a matriz $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. A súa inversa é a matriz

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

c) Un sistema de ecuacións lineais dise homoxéneo cando os termos independentes son todos cero. Polo tanto, nun sistema lineal homoxéneo sempre o rango da matriz de coeficientes coincide co rango da matriz ampliada, xa que ao ser os termos independentes nulos a columna que se engade non inflúe a efectos do cálculo do rango. Polo tanto un sistema de ecuacións lineais homoxéneo é sempre compatible.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Determinamos os vectores directores das dúas rectas:

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_s &= (1,2,2). \\ \vec{v}_r &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (0,1,2) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Como os vectores directoras das rectas non son paralelos,} \\ \text{as rectas córtanse ou crúzanse.} \end{array}$$

Vemos que se cortan, calculando o punto de corte. Para iso, substituímos as expresións de x, y e z de s nas ecuacións de r :

$$\begin{aligned} 2 + t - 6 - 4t + 2 + 2t + 1 &= 0 \Rightarrow t = -1 \\ 6 + 4t - 2 - 2t - 2 &= 0 \Rightarrow t = -1 \end{aligned}$$

as dúas ecuacións son compatibles e polo tanto as dúas rectas teñen un punto común, que se obtén facendo $t = -1$ nas ecuacións de s :

$$\boxed{\text{Punto de corte: } (1,1,0)}$$

Como as rectas se cortan, determinan un plano α . Elementos que determinan o plano α :

➤ O punto $(1,1,0)$

➤ O vector $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2, 2, -1)$ que é un vector normal ao plano α

e a ecuación implícita do plano α será:

$$-2(x-1) + 2(y-1) - z = 0$$

é dicir

$$\boxed{\alpha : 2x - 2y + z = 0}$$

b) vector normal ao plano π : $\vec{n}_\pi = (4, -4, 2)$. Entón

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{v}_r \Rightarrow r \text{ e } \pi \text{ son paralelos}$$

Un punto da recta r é o punto de corte calculado antes: $P_r(1,1,0)$. Polo tanto:

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|4 - 4 + 7|}{\sqrt{16 + 16 + 4}} = \frac{7}{6}$$

Doutro modo:

$$\left. \begin{aligned} \alpha : 2x - 2y + z &= 0 \\ \pi : 4x - 4y + 2z + 7 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Os planos } \alpha \text{ e } \pi \text{ son paralelos e como a recta } r \text{ está contida no} \\ \text{plano } \alpha, \text{ entón a recta } r \text{ é paralela ao plano } \pi: 2x - 2y + z + \frac{7}{2} = 0 \end{array}$$

Polo tanto:

$$d(r, \pi) = d(\alpha, \pi) = \frac{|7/2|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{7}{6}$$

Así:

$$\boxed{d(r, \pi) = \frac{7}{6}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a)

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} + 1}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{e^x + xe^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2e^x = \infty$$

Simplificamos

b)

$$\int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx \quad (\text{Propiedade 1})$$

$$\int_2^4 5f(x)dx = 5 \int_2^4 f(x)dx \quad (\text{Propiedade 2})$$

Polo tanto

$$\int_2^4 5f(x)dx = 5 \int_2^4 f(x)dx = 5 \left[\int_1^4 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx \right] = 5(-4 - 2) = -30$$

Propiedade 2 Propiedade 1

Así:

$$\boxed{\int_2^4 5f(x)dx = -30}$$

Propiedade 1 (Aditividade respecto ao intervalo de integración): Se $a < b < c$ e $f(x)$ é continua en $[a, c]$ entón

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Propiedade 2: Se $f(x)$ é continua en $[a, b]$ entón

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx \quad \text{para calquera } c \in \mathbb{R}.$$

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

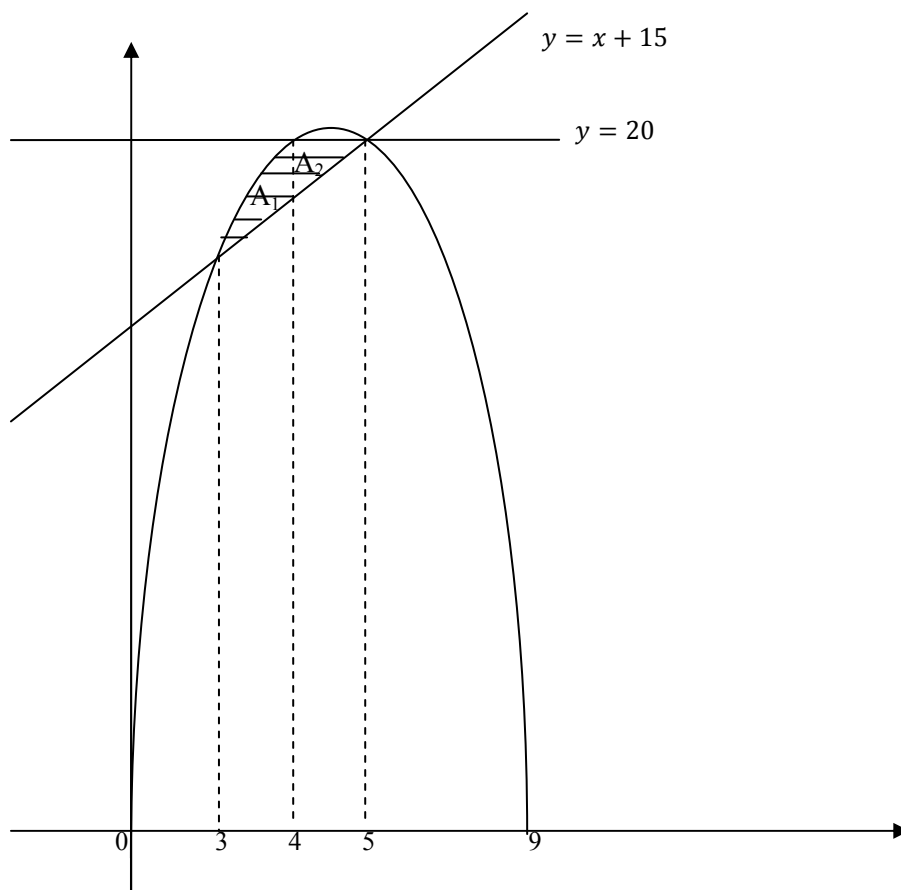
Exercício 4:

$$\text{Parábola: } y = -x^2 + 9x = x(-x + 9) \Rightarrow \begin{cases} \text{Pontos de corte cos eixes: } (0,0), (9,0) \\ \text{Vértice: } (9/2, 81/4) \\ \text{Cóncava (o coeficiente de } x^2 \text{ é negativo)} \end{cases}$$

Pontos de corte da parábola coas rectas:

$$-x^2 + 9x = 20 \Rightarrow x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \text{ou} \\ x = 5 \end{cases} \quad \text{Pontos de corte: } (4,20), (5,20)$$

$$-x^2 + 9x = x + 15 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = 5 \end{cases} \quad \text{Pontos de corte: } (3,18), (5,20)$$



$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_3^4 (-x^2 + 9x - x - 15) dx + \int_4^5 (20 - x - 15) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 15x \right]_3^4 + \left[5x - \frac{x^2}{2} \right]_4^5 \\ &= -\frac{64}{3} + 64 - 60 + 9 - 36 - 45 + 25 - \frac{25}{2} - 20 + 8 = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{7}{6} u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = -m^2 + 1; \quad -m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Polo tanto

- $m = \pm 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$
- $m \neq \pm 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$

b) $A = A^{-1} \Leftrightarrow A^2 = I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 + 1 & 0 & 2m \\ 0 & 1 & 0 \\ 2m & 0 & m^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Polo tanto

$$A = A^{-1} \Leftrightarrow m = 0$$

Se $m = 0$, acabamos de obter que $A^2 = I$, entón

$$A^{60} = (A^2)^{30} = I^{30} = I$$

c) Vimos no apartado a) que se $m = 2$, entón $\text{rang}(A) = 3$

Como o rango da matriz ampliada é maior ou igual que o rango da matriz de coeficientes e tampouco pode ser maior que 3, pois ten 3 filas, estamos nun caso de

$\text{Rang}(\text{matriz de coeficientes}) = \text{rang}(\text{matriz ampliada}) = \text{número de incógnitas}$

Polo tanto, é un sistema compatible determinado con solución única.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Como a recta é perpendicular ao plano, entón o vector director da recta é perpendicular ao plano:

$$\vec{v}_r = \vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2, 4, 6) \text{ . Tomamos como vector director: } (1, 2, 3)$$

Entón as ecuacións da recta en forma continua son:

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+4}{3}$$

Para calcular o punto de corte da recta e o plano, consideramos as ecuacións paramétricas da recta

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \text{Punto xenérico } Q(2 + \lambda, -3 + 2\lambda, -4 + 3\lambda)$$

Calculamos a ecuación xeral do plano ($\vec{n}_\alpha = (1, 2, 3)$ e un punto do plano é $(3, 0, 3)$)

$$\alpha: x - 3 + 2y + 3(z - 3) = 0 \Rightarrow \alpha: x + 2y + 3z - 12 = 0$$

Impoñemos a condición de que $Q \in \pi$

$$2 + \lambda - 6 + 4\lambda - 12 + 9\lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

Polo tanto, o punto de corte será:

$$P(4, 1, 2)$$

b) Os vectores $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, -1)$ e $\vec{n}_\alpha = (1, 2, 3)$ son dous vectores contidos no plano β pedido. Polo tanto,

$$\vec{n}_\beta = \overrightarrow{PQ} \times \vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (5, -4, 1) \text{ é un vector perpendicular ao plano } \beta$$

e a ecuación xeral do plano β será:

$$5(x - 2) - 4(y + 3) + z + 3 = 0 \Rightarrow \beta: 5x - 4y + z - 19 = 0$$

c) Basta resolver o sistema de ecuacións lineais dadas polas ecuacións xerais de α e β

$$x + 2y + 3z - 12 = 0$$

$$5x - 4y + z - 19 = 0$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$, o sistema anterior é equivalente ao seguinte:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 12 - 3z \\ 5x - 4y = 19 - z \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 12-3z & 2 \\ 19-z & -4 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{43}{7} - z; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12-3z \\ 5 & 19-z \end{vmatrix}}{-14} = \frac{41}{14} - z;$$

e as ecuacións paramétricas da recta intersección son:

$$s: \begin{cases} x = \frac{43}{7} - \lambda \\ y = \frac{41}{14} - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

$$f(x) = \frac{2x+1}{e^{x^2}}$$

O denominador non se anula nunca, polo tanto

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Non existen asíntotas verticais}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{2xe^{x^2}} = 0$$

Indeterminación. Aplicamos L'Hôpital

Polo tanto

$$\text{Asíntota horizontal: } y = 0. \text{ Non ten asíntota oblicua}$$

Estudo da derivada:

$$f'(x) = \frac{2e^{x^2} - (2x+1)2xe^{x^2}}{(e^{x^2})^2} = \frac{-4x^2 - 2x + 2}{e^{x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{8} = \begin{matrix} \nearrow -1 \\ \searrow 1/2 \end{matrix}$$

Como $e^{x^2} > 0$, o signo de $f'(x)$ determínalo o numerador. Temos polo tanto que

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1/2)$	$(1/2, \infty)$
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0
$f(x)$	Decrecente	Crecente	Decrecente

Crecente en: $(-1, 1/2)$

Decrecente en: $(-\infty, -1)$ e $(1/2, \infty)$

En $x = -1$, a función pasa de decrecente a crecente e en $x = 1/2$ pasa de crecente a decrecente. Polo tanto:

$$\text{Mínimo: } (-1, -1/e)$$

$$\text{Máximo: } (1/2, 2/e^{1/4})$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

a) Unha función $F(x)$ dise que é unha *primitiva* de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$

Regra de Barrow: Se $f(x)$ é continua en $[a, b]$ e $G(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ en $[a, b]$, entón

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

b) Como o grao do polinomio do numerador é maior que o grao do polinomio do denominador, facemos a división:

$$\frac{x^3+2}{x^2-1} = x + \frac{x+2}{x^2-1}$$

Como $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, facemos a descomposición en fraccións simples

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x-A+B}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -A+B=2 \end{cases} \Rightarrow A = -1/2; B = 3/2$$

Entón:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+2}{x^2-1} dx &= \int \left(x + \frac{x+2}{x^2-1} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x-1} = \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

e aplicando a regra de Barrow:

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x^3+2}{x^2-1} dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln|x-1| \right]_2^3 = \frac{9}{4} - \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 2 - \left(2 - \frac{1}{2} \ln 3 \right) = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3 \end{aligned}$$

Solución: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 6$

MATEMÁTICAS II

(Responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1=3 puntos, exercicio 2=3 puntos, exercicio 3=2 puntos, exercicio 4=2 puntos)

OPCIÓN A

- Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
 - Estuda, segundo os valores de m , o rango da matriz A .
 - Resolve, se é posible, o sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para o valor $m = 1$.
- Dados os puntos $A(3,0,2)$, $B(1,-2,0)$, $C(1,-1,3)$ e $D(\lambda, \lambda-2, -\lambda)$
 - Determina o valor de λ para que A, B, C e D sexan coplanarios. ¿Para algún valor de λ son A, B, C e D vértices dun paralelogramo?
 - Calcula as ecuacións paramétricas do plano π que pasa polo punto C e é perpendicular á recta r que pasa polos puntos A e B .
- Enuncia o teorema de Bolzano. Probar que a función $f(x) = x^3 + 2x - 4$ corta o eixe OX nalgún punto do intervalo $[1,2]$ ¿Pode cortalo en máis dun punto?
 - Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{x^2+x+2} \right)^{1/x^2}$
- Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = 3x - x^2$ e a súa recta normal no punto $(3,0)$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixes, o vértice da parábola e a concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

- Dado o sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 5 \\ x - 3y + 2z &= -4 \end{aligned}$$
 - Calcula o valor de α para que ao engadirle a ecuación $\alpha x + 3y + z = 9$, resulte un sistema compatible indeterminado. Resólveo, se é posible, para $\alpha = 0$.
 - ¿Existe algún valor de α para o cal o sistema con estas 3 ecuacións non ten solución?
- Se $|\vec{v}| = 6$, $|\vec{w}| = 10$ e $|\vec{v} + \vec{w}| = 14$, calcula o ángulo que forman os vectores $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
 - Calcula as ecuacións paramétricas e a ecuación xeral do plano que pasa polos puntos $A(-1,5,0)$ e $B(0,1,1)$ e é paralelo á recta

$$r: \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$
- Determina os valores de a para que a función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{2}{ax} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$
 sexa continua. ¿É derivable en $x = 1$ para algún valor de a ?
 - Enunciado e interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial.
- Calcula $\int_2^3 \frac{5x^3 - 3x + 1}{x^3 - x} dx$

MATEMÁTICAS II

(Responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1=3 puntos, exercicio 2=3 puntos, exercicio 3=2 puntos, exercicio 4=2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Calcula, segundo os valores de a , o rango de $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a+1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$

Para $a = 1$, calcula o determinante da matriz $2A^t \cdot A^{-1}$

- b) Sexa $B = \begin{pmatrix} -1/2 & x & 0 \\ y & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula x e y para que se cumpra que $B^{-1} = B^t$.

(Nota: A^t , B^t representan a matriz trasposta de A e B respectivamente).

2. Dado o plano $\pi: x - 2y + 3z + 6 = 0$

- a) Calcula a área do triángulo de vértices os puntos de corte de π cos eixes de coordenadas.
b) Calcula a ecuación xeral do plano que é perpendicular ao plano π , paralelo á recta que pasa polos puntos $B(0,3,0)$ e $C(0,0,2)$ e pasa pola orixe de coordenadas.
c) Calcula o punto simétrico da orixe de coordenadas respecto ao plano $\pi: x - 2y + 3z + 6 = 0$

3. a) Calcula as asíntotas e os intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

- b) Calcula $\int_1^e \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx$

4. a) Dunha función derivable $f(x)$ sabemos que pasa polo punto $(0,1)$ e que a súa derivada é $f'(x) = xe^{2x}$. Calcula $f(x)$ e a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente a $x = 0$
b) Enuncia o teorema fundamental do cálculo integral.

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores de m , o sistema

$$\begin{aligned} x + y &= m \\ x - my &= -13 \\ 3x + 5y &= 16 \end{aligned}$$

- b) Resólveo, se é posible, para $m = 2$.

2. a) Estuda a posición relativa dos planos $\pi_1: x + y + z - 5 = 0$, $\pi_2: \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$

Se se cortan nunha recta, escribe as ecuacións paramétricas da mesma.

- b) Calcula a ecuación do plano π_3 , que pasa pola orixe de coordenadas e é perpendicular a π_1 e π_2 . Calcula a intersección de π_1 , π_2 e π_3 .

3. a) Enunciado e interpretación xeométrica do teorema de Rolle.

- b) Se $c > 2$, calcula os valores de a, b, c para que a función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{se } x < 2 \\ x + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

cumpra as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo $[0, c]$.

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = -x^2 + 2x + 3$, a recta tanxente no punto onde a parábola ten un extremo e a tanxente á parábola no punto no a tanxente é paralela á recta $y = 4x$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixes, o vértice da parábola e a concavidade ou convexidade).

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1) a) 2 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención dos valores de m que anulan o determinante de A
- 1,5 puntos pola obtención do rango de A , segundo os valores de m .

b) 1 punto

2) a) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención do valor de λ para que sexan coplanarios.
- 1 punto xustificar que non constitúen un paralelogramo.

b) 1 punto

3) a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Bolzano.
- 0,25 puntos por xustificar que a función corta o eixe OX nalgún punto do intervalo $[1,2]$.
- 0,25 puntos por xustificar que a función non corta o eixe OX en máis de un punto.

b) 1 punto

4) 2 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos por representar a parábola.
- 0,5 puntos pola obtención da recta normal.
- 0,5 puntos pola formulación da área.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

1) a) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto por xustificar que o sistema é compatible indeterminado cando $\alpha = 0$.
- 1 punto pola resolución para $\alpha = 0$.

b) 1 punto

2) a) 1 punto

b) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola ecuación xeral do plano
- 1 punto polas ecuacións paramétricas do plano

3) a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola determinación dos valores de a para que a función sexa continua.
- 0,5 puntos polo estudo da derivabilidade en $x = 1$.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial.

4) 2 puntos, distribuídos en:

- 0,5 pola división do numerador entre o denominador e o cálculo das raíces do denominador.
- 0,5 puntos pola descomposición en suma de fraccións.
- 0,5 puntos pola integración.
- 0,5 puntos pola aplicación da regra de Barrow e obtención do valor da integral

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1) a) 2 puntos

b) 1 punto

2) 3 puntos (1 punto por cada unha das cuestión formuladas)

3) a) 1 punto

b) 1 punto

4) 2 puntos (0,5 puntos pola formulación teórica e 1,5 puntos pola resolución práctica)

OPCIÓN B

1) a) 2 puntos

b) 1 punto

2) a) 2 puntos

b) 1 punto

3) a) 1 punto

b) 1 punto

4) 2 puntos

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^3 + m^2 + m^3 - m^4 - m^3 - m = -m(m^3 - m^2 - m + 1)$$

Calculamos, por Ruffini, as raíces de $m^3 - m^2 - m + 1 = 0$

$$1) \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & 1 & 0 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \quad m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Polo tanto

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \\ m = 1 \text{ (raíz doble)} \end{cases}$$

$$\boxed{m = 0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

$$\boxed{m = -1}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

$$\boxed{m = 1} \Rightarrow \text{rang}(A) = 1 \text{ (as tres filas son iguais e hai un elemento non nulo)}$$

Resumindo:

$$\boxed{\text{Rang}(A) = 3, \quad \text{se } m \neq -1, 0, 1}$$

$$\boxed{\text{Rang}(A) = 2, \quad \text{se } m = 0 \text{ ou } m = -1}$$

$$\boxed{\text{Rang}(A) = 1, \quad \text{se } m = 1}$$

b) $\boxed{m = 1}$ Neste caso o sistema é equivalente a

$$x + y + z = 1$$

Como $\text{rango}(\text{matriz coeficientes}) = \text{rango}(\text{matriz ampliada}) = 1 < n^\circ \text{ de incógnitas}$, é un sistema compatible indeterminado. As infinitas solucións son:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} ; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a)

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-2, -2, -2) \\ \overrightarrow{AC} = (-2, -1, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Non son colineais e polo tanto os puntos } A, B \text{ e } C \\ \text{determinan un plano.} \end{array}$$

Ecuación do plano α que pasa polos puntos A, B e C :

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-3 & y & z-2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \alpha: 2x - 3y + z - 8 = 0$$

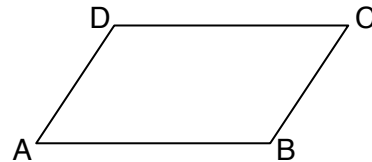
Para que o punto D esté no plano α , deberá satisfacer a súa ecuación:

$$2\lambda - 3\lambda + 6 - \lambda - 8 = 0, \text{ e polo tanto } \boxed{\lambda = -1}$$

Como un paralelogramo é unha figura plana,

bastará comprobar se para $\lambda = -1$ resulta

un paralelogramo



$$\lambda = -1 \Rightarrow D(-1, -3, 1) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2, -2, -2) \\ \overrightarrow{DC} = (2, 2, 2) \\ \overrightarrow{AD} = (-4, -3, -1) \\ \overrightarrow{BC} = (0, 1, 3) \end{cases}$$

Non son paralelos
↓
non constitúen un paralelogramo

b) Os vectores $\vec{v} = (-1, 0, 1)$ e $\vec{w} = (0, 1, -1)$ son vectores non colineais e perpendiculares ao vector $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, -2)$. Polo tanto, o punto $C(1, -1, 3)$ e os vectores $\vec{v} = (-1, 0, 1)$ e $\vec{w} = (0, 1, -1)$ determinan o plano π e podemos escribir as súas ecuacións paramétricas como

$$\pi: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 + \mu \\ z = 3 + \lambda - \mu \end{cases}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) *Teorema de Bolzano*: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a, b]$ e $f(a)$ e $f(b)$ teñen distinto signo, é dicir $f(a) \cdot f(b) < 0$, entón existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

- $f(x) = x^3 + 2x - 4$ é continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica e polo tanto continua en $[1, 2]$
 - $f(1) = -1 < 0$
 - $f(2) = 8 > 0$
- $\Rightarrow \boxed{\exists c \in (1, 2) \text{ tal que } f(c) = 0}$
Teorema de Bolzano

Como $f(x)$ é continua e derivable en $\mathbb{R}$, pois é unha función polinómica, tamén o será en calquera intervalo de $\mathbb{R}$ e si existen c_1 e c_2 tales que $f(c_1) = f(c_2) = 0$, entón aplicando o teorema de Rolle, existiría un t tal que $f'(t) = 0$, pero $f'(x) = 3x^2 + 2$ non se anula en ningún punto de $\mathbb{R}$. Así pois,

$\boxed{f(x) \text{ corta ao eixe } OX \text{ soamente nun punto}}$

b) É unha indeterminación do tipo 1^∞ . Tomamos logaritmos neperianos:

$$\begin{aligned} \ln \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{x^2+x+2} \right)^{1/x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{x+2}{x^2+x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+2) - \ln(x^2+x+2)}{x^2} \\ &= \left(\frac{0}{0} \right) \text{ (aplicamos a regra de L'Hôpital) } = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{2x+1}{x^2+x+2}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x+2 - 2x^2-5x-2}{2x(x+2)(x^2+x+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-x-4)}{2x(x+2)(x^2+x+2)} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4}{2(x+2)(x^2+x+2)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

e polo tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{x^2+x+2} \right)^{1/x^2} = e^{-1/2}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

$$y = 3x - x^2$$

$$y' = 3 - 2x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 3/2$$

$$y'' = -2 < 0$$

$\left. \begin{array}{l} y' = 3 - 2x \\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 3/2 \\ y'' = -2 < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \text{máximo: } (3/2, 9/4) = \text{vértice da parábola} \\ \Rightarrow \text{cóncava} \end{array}$

$$3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow \text{Puntos de corte da parábola cos eixes: } (0,0), (3,0)$$

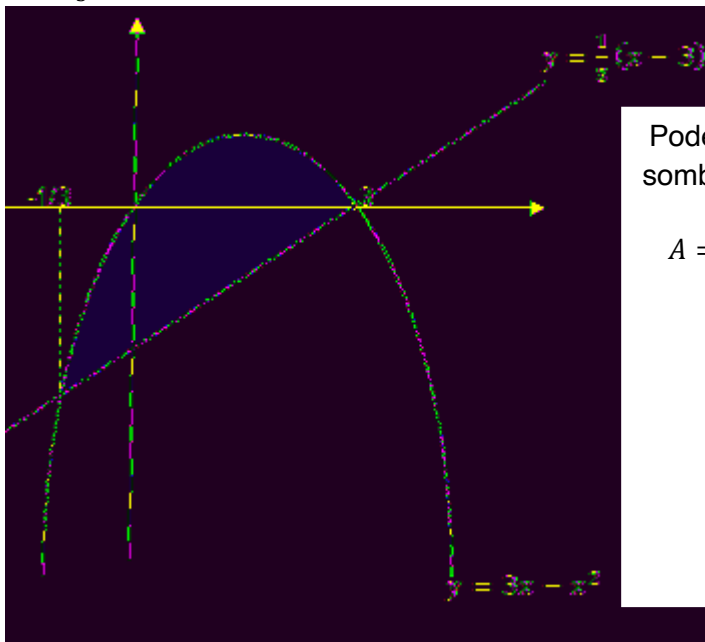
$$y'(3) = -3 \Rightarrow \text{pendente da recta normal á parábola no punto } (3,0): 1/3$$

Ecuación da recta normal á parábola no punto (3,0):

$$y = \frac{1}{3}(x - 3) \Leftrightarrow x - 3y - 3 = 0$$

Puntos de corte da recta normal e a parábola:

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x - x^2 \\ y = \frac{1}{3}(x - 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3}(x - 3) = 3x - x^2 \Rightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (-1/3, -10/9) \\ (3,0) \end{cases}$$



Podemos calcular a área pedida, rexión sombreada, mediante a integral definida:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1/3}^3 \left[3x - x^2 - \frac{1}{3}(x - 3) \right] dx = \\ &= \int_{-1/3}^3 \left[\frac{8}{3}x - x^2 + 1 \right] dx = \\ &= \left[\frac{8}{6}x^2 - \frac{x^3}{3} + x \right]_{-1/3}^3 = \\ &= 12 - 9 + 3 - \frac{12}{81} - \frac{1}{81} + \frac{27}{81} = \\ &= \boxed{\frac{500}{81} u^2} \end{aligned}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio1:

a) Matriz de coeficientes $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$; Matriz ampliada $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \\ \alpha & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 3 - 4\alpha + 9\alpha - 2 + 2 = 5\alpha$$

Polo tanto:

- Se $\alpha \neq 0$, $\text{rang}(C) = 3$
- Se $\alpha = 0$, $\text{rang}(C) = 2$

Como sempre $\text{rang}(A) \geq \text{rang}(C)$ e o sistema será compatible indeterminado cando $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2$, calculamos $\text{rang}(A)$ cando $\alpha = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -27 + 5 + 4 + 18 = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2, \text{ se } \alpha = 0$$

Polo tanto, o sistema é compatible indeterminado cando $\boxed{\alpha = 0}$.

Cando $\alpha = 0$, un sistema equivalente é:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 5 - 3z \\ x - 3y = -4 - 2z \end{array} \right\} \Rightarrow y = 9 - z \Rightarrow x = 23 - 5z$$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{cases} x = 23 - 5\lambda \\ y = 9 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

b) Do apartado anterior deducimos que

- $\alpha = 0 \Rightarrow \text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2 < n^{\circ} \text{ incógnitas}$. Sistema compatible indeterminado, infinitas solucións.
- $\alpha \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 3 = n^{\circ} \text{ incógnitas}$. Sistema compatible determinado, solución única.

Polo tanto, $\boxed{\text{o sistema sempre ten solución}}$.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio2:

a) Utilizando as propiedades do produto escalar de dous vectores, temos:

$$\begin{aligned} |\vec{v} + \vec{w}|^2 &= \langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle + 2 \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \\ &= |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \angle(\vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

é dicir:

$$196 = 36 + 100 + 120 \cdot \cos \angle(\vec{v}, \vec{w})$$

e polo tanto

$$\cos \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\pi}{3}$$

b) Calculamos o vector director, $\vec{v}_r$, da recta r

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 9\vec{j} + 6\vec{k}$$

O plano queda determinado polos elementos:

- O punto $A(-1,5,0)$
- Os vectores $\vec{v}_r = (-6,9,6)$ e $\overrightarrow{AB} = (1,-4,1)$ que son paralelos ao plano e independentes entre si. (En lugar do vector $(-6,9,6)$ podemos considerar o $(-2,3,2)$ xa que $(-6,9,6) \parallel (-2,3,2)$).

$$\text{Ecuacións paramétricas: } \begin{cases} x = -1 - 2\lambda + \mu \\ y = 5 + 3\lambda - 4\mu \\ z = 2\lambda + \mu \end{cases}$$

Para obter a ecuación xeral, podemos eliminar os parámetros λ e μ nas ecuacións paramétricas ou ben calcular a ecuación do plano a partir dun punto do plano (por exemplo o $A(-1,5,0)$) e un vector normal ao plano $\vec{n}$:

$$\vec{n} = (-2,3,2) \times (1,-4,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 11\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

Polo tanto, a ecuación xeral do plano é:

$$11(x + 1) + 4(y - 5) + 5z = 0 \quad \Longrightarrow \quad 11x + 4y + 5z - 9 = 0$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio3:

a)

- $f(x)$ é continua en $x < 1$, por ser polinómica.
- Se $a \neq 0$, $f(x)$ é continua en $x > 1$ por ser racional e non anularse o denominador.
- Estudo da continuidade en $x = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2/a \\ f(1) = a - 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Para que sexa continua en } x = 1, \text{ debe ser} \\ a - 1 = 2/a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1 \text{ ou } a = 2 \end{array}$$

Polo tanto, $f(x)$ é continua se $a = -1$ ou $a = 2$

Se unha función é derivable nun punto, necesariamente é continua nel. Polo tanto, para estudar a derivabilidade en $x = 1$, só teremos que facelo cando $a = -1$ ou $a = 2$

Caso: $a = -1$

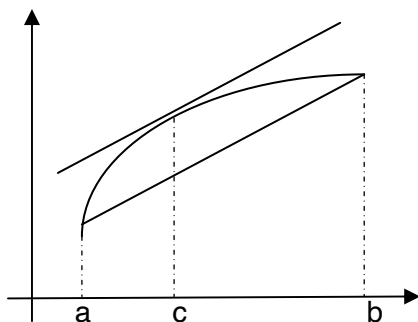
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 1 \\ 2/x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = 2 \end{array} \Rightarrow \text{Non é derivable en } x = 1.$$

Caso: $a = 2$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 1 \\ -1/x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = -1 \end{array} \Rightarrow \text{Non é derivable en } x = 1$$

Polo tanto, $f(x)$ non é derivable en $x = 1$ para ningún valor de a .

b) *Teorema do valor medio do cálculo diferencial:* Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b) , entón existe algún punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Interpretación xeométrica: Nas hipótesis do teorema, existe algún punto intermedio no que a tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á corda que une os puntos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

É a integral dunha función racional. Como o grao do numerador é igual ao grao do denominador, en primeiro lugar facemos a división para obter unha fracción cuxo numerador sexa de grao inferior ao denominador:

$$\frac{5x^3 - 3x + 1}{x^3 - x} = 5 + \frac{2x + 1}{x^3 - x}$$

Calculamos as raíces do denominador:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) \Rightarrow \text{Raíces: } 0, 1, -1.$$

Son todas raíces reais sinxelas, facemos a descomposición:

$$\frac{2x + 1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1} = \frac{Ax^2 - A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx}{x(x - 1)(x + 1)}$$

Como os denominadores son iguais, os numeradores deben ser iguais:

$$\begin{array}{lll} A + B + C = 0 & (\text{coeficiente de } x^2) & \\ B - C = 2 & (\text{coeficiente de } x) & \\ -A = 1 & (\text{termo independente}) & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 3/2 \\ C = -1/2 \end{cases}$$

A integral queda:

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{5x^3 - 3x + 1}{x^3 - x} dx &= \int_2^3 \left[5 + \frac{2x + 1}{x^3 - x} \right] dx = \int_2^3 \left[5 - \frac{1}{x} + \frac{3/2}{x - 1} - \frac{1/2}{x + 1} \right] dx \\ &= \left[5x - \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x + 1| \right]_2^3 \\ &= 15 - \ln 3 + \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 4 - \left(10 - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3 \right) \end{aligned}$$

$Solución = 5 - 1/2 \ln 3 + 3/2 \ln 2$
--

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ a+1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = a^2(a+1) + a(a+1)^2 = a(a+1)(2a+1)$$

Polo tanto

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \\ a = -1/2 \end{cases}$$

$$a = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

$$a = -1$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

$$a = -1/2$$

$$\begin{vmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

Resumindo:

$$\boxed{\text{Rang}(A) = 3, \quad \text{se } m \neq 0, -1, -1/2}$$

$$\boxed{\text{Rang}(A) = 2, \quad \text{se } m = 0 \text{ ou } m = -1 \text{ ou } m = -1/2}$$

$$a = 1$$

$a = 1 \Rightarrow \det(A) = 6$, e posto que $\det(A) = \det(A^t)$, $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ e ademais que o determinante dun produto de matrices é igual ao produto dos determinantes desas matrices e que para unha matriz M de orde 3, se verifica que $\det(\lambda M) = \lambda^3 \det(M)$, temos:

$$\boxed{\det(2A^t \cdot A^{-1}) = 2^3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} = 8}$$

b) $B^{-1} = B^t \Leftrightarrow B \cdot B^t = I$, é dicir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & x & 0 \\ y & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & y & 0 \\ x & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 1/4 & -y/2 + x/2 & 0 \\ -y/2 + x/2 & y^2 + 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtendo:

$$x^2 + 1/4 = 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3}/2$$

$$y^2 + 1/4 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{3}/2$$

$$-y/2 + x/2 = 0 \Rightarrow x = y$$

Posibles valores:

$$x = y = \sqrt{3}/2$$

ou

$$x = y = -\sqrt{3}/2$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Puntos de corte cos eixes de coordenadas: $A(-6,0,0)$; $B(0,3,0)$; $C(0,0,2)$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (6,3,0) \\ \overrightarrow{AC} = (6,0,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-6, 12, -18)$$

$$\text{Área } \triangle ABC = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 144 + 324} = \frac{1}{2} \sqrt{504} = \boxed{3\sqrt{14} \text{ u}^2}$$

b) $\vec{n}_\pi = (1, -2, 3)$ é un vector do plano pedido

$\overrightarrow{BC} = (0, -3, -2)$ é un vector do plano pedido

$$\text{Vector normal ao plano} = \vec{n}_\pi \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (13, 2, -3)$$

Como pasa polo punto $(0,0,0)$, a ecuación xeral do plano pedido é:

$$\boxed{13x + 2y - 3z = 0}$$

c) $\vec{n}_\pi = (1, -2, 3)$ é un vector director da recta perpendicular a π .

$$\text{Ecuacións paramétricas da recta perpendicular a } \pi, \text{ pasando polo } (0,0,0) = \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

Calculamos o punto M de intersección desta recta co plano π :

$$\lambda + 4\lambda + 9\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -3/7 \Rightarrow M = (-3/7, 6/7, -9/7)$$

Como o punto M é o punto medio entre $O(0,0,0)$ e o seu simétrico $O'(x,y,z)$

$$\left. \begin{array}{l} -3/7 = x/2 \\ 6/7 = y/2 \\ -9/7 = z/2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{O'(-6/7, 12/7, -18/7)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1}$

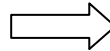
$$x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ non ten asíntotas verticais}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 \text{ é asíntota horizontal}}, \boxed{f(x) \text{ non ten asíntotas oblicuas}}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x^2+1) - 2x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

Como $(x^2+1)^2 > 0$, o signo de $f'(x)$ coincide co signo do numerador da fracción anterior. Así:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	crecente	decrecente	Crecente



A función é crecente nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$.
A función é decrecente no intervalo $(-1, 1)$.

b)

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx &= \int_1^e \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} dx = \int_1^e \left[1 - \frac{2x}{x^2+1} \right] dx = [x - \ln x]_1^e = \\ &= e - \ln(e^2 + 1) - 1 + \ln 2 = \boxed{0,2845} \end{aligned}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

a) $f(x)$ é a primitiva de $f'(x) = xe^{2x}$ que pasa polo punto $(0,1)$. Calculamos a integral por partes

$$\int xe^{2x} dx = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{2} \int xe^{2x} dx = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

$u = x,$	$du = dx$
$dv = e^{2x} dx,$	$v = \frac{1}{2} e^{2x}$

e impoñemos a condición de que pase polo punto $(0,1)$

$$1 = -\frac{1}{4} + C \Rightarrow C = 5/4$$

Polo tanto

$f(x) = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + 5/4$

A función pasa por $(0,1)$ e $f'(0) = 0$, polo que a recta tanxente pedida é

$y = 1$

b) Teorema fundamental do cálculo integral: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a, b]$ entón a función

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

é derivable e ademais verifícase que $F'(x) = f(x)$.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -m \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; Matriz ampliada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & -m & -13 \\ 3 & 5 & 16 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & -m & -13 \\ 3 & 5 & 16 \end{vmatrix} = 3m^2 - 11m + 10$$
$$3m^2 - 11m + 10 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ ó } m = 5/3$$

Polo tanto:

- $m = 2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(A) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas}$. Sistema compatible determinado.
- $m = 5/3 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(A) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas}$. Sistema compatible determinado.
- $m \notin \{2, 5/3\} \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A)$. Sistema incompatible.

b) $\boxed{m = 2}$ Vimos no apartado anterior que neste caso é un sistema compatible determinado e ten solución única. Un sistema equivalente ao dado é:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 3x + 5y = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3x - 3y = -6 \\ 3x + 5y = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow \boxed{y = 5} \Rightarrow \boxed{x = -3}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Calculamos a ecuación xeral do plano π_2 . Das ecuacións paramétricas deste plano deducimos un punto do plano e dous vectores independentes contidos nel:

- Vectores independentes contidos en π_2 : $(1, -1, 0)$; $(2, -1, 1)$
- Punto pertencente a π_2 : $(3, 1, 1)$

$$\text{Ecuación xeral de } \pi_2: \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y - z - 3 = 0$$

Para estudar a posición relativa dos planos π_1 e π_2 discutimos a solución do sistema

$$\pi_1: x + y + z - 5 = 0$$

$$\pi_2: x + y - z - 3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Como

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \boxed{\text{os planos córtanse nunha recta}}$$

Para calcular as ecuacións paramétricas desta recta, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} x + z = 5 - y \\ x - z = 3 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x = 4 - y \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

b) Os vectores normais aos planos π_1 e π_2 , $\vec{n}_{\pi_1} = (1, 1, 1)$ e $\vec{n}_{\pi_2} = (1, 1, -1)$ respectivamente, son dous vectores independentes que pertencen ao plano π_3 que ademais pasa polo $(0, 0, 0)$. Polo tanto:

$$\text{Ecuación xeral de } \pi_3: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_3: x - y = 0}$$

Para calcular a intersección dos tres planos, resolvemos o sistema formado polas súas ecuacións xerais:

$$\begin{cases} x + y + z - 5 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + z = 5 \\ 2x - z = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 2, z = 1$$

Polo tanto,

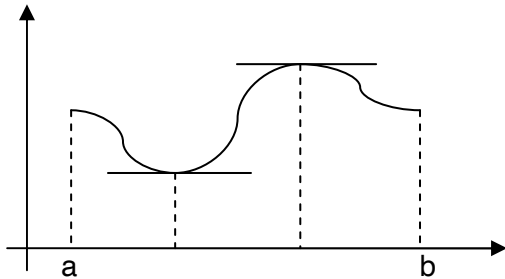
$$\boxed{\text{Punto de corte dos tres planos: } P(2, 2, 1)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) Teorema de Rolle: Sexa $f(x)$ unha función continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, entón existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.



Interpretación xeométrica: Dada función continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) , que toma os mesmos valores nos extremos do intervalo, a súa gráfica ten algún punto con tanxente horizontal.

b) $f(x)$ é continua en $[0, 2)$ e $(2, c]$ por ser polinómica nos dous intervalos.

Continuidade en $x = 2$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 + 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \\ f(2) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + 2a + b = 3 \Rightarrow 2a + b = -1$$

$f(x)$ é derivable en $(0, 2)$ e $(2, c)$ por ser polinómica nos dous intervalos.

Derivabilidade en $x = 2$:

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = 4 + a \\ f'(2^+) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + a = 1$$

Por outra parte $f(0) = f(c) \Rightarrow b = c + 1$

Temos así tres ecuacións con tres incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} 2a + b = -1 \\ 4 + a = 1 \\ b - c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a = -3}; \boxed{b = 5}; \boxed{c = 4}$$

Exercicio 4:

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

En primeiro lugar calculamos os elementos necesarios para a representación da parábola:

$$\left. \begin{array}{l} y' = -2x + 2 \\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ y'' = -2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Ten un máximo, que é o vértice, no punto } (1,4) \text{ e é cóncava}$$

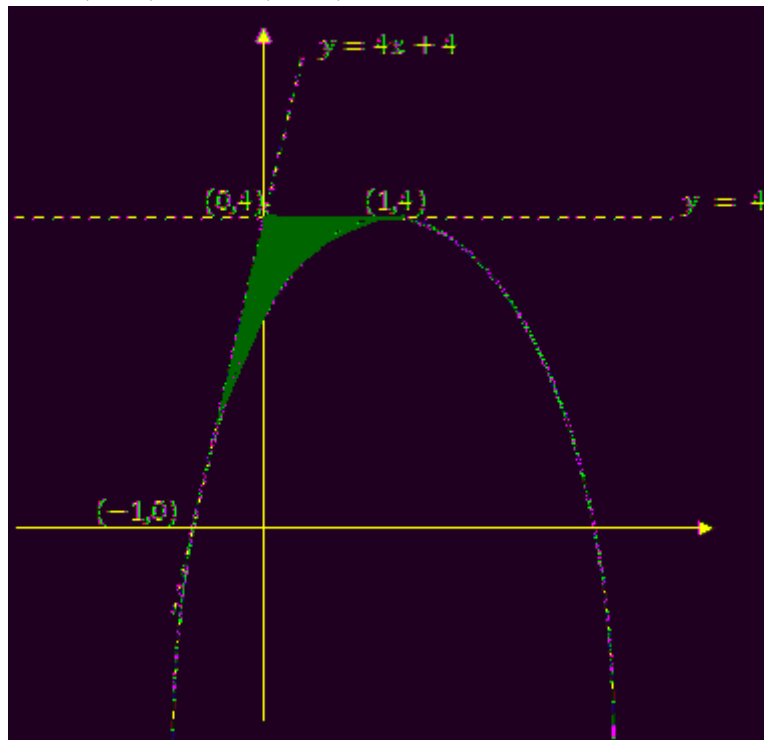
$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Puntos de corte cos eixes: } (0,3), (-1,0), (3,0)$$

Tanxente no punto $(1,4)$: $y = 4$.

Determinamos o punto no que a tanxente é paralela á recta $y = 4x$. Como a derivada nun punto coincide coa pendente da recta tanxente nese punto, teremos que determinar o punto no que a derivada vale 4 (dúas rectas son paralelas se teñen a mesma pendente):

$$y' = 4 \Leftrightarrow -2x + 2 = 4 \Rightarrow x = -1$$

Tanxente no punto $(-1,0)$: $y = 4(x + 1)$



Podemos calcular a área pedida, rexión sombreada, mediante a integral definida:

$$A = \int_{-1}^0 [4x + 4 - (-x^2 + 2x + 3)] dx + \int_0^1 [4 - (-x^2 + 2x + 3)] dx =$$
$$\int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) dx + \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx =$$

$$\left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = -\left(-\frac{1}{3} + 1 - 1 \right) + \frac{1}{3} - 1 + 1 = \boxed{\frac{2}{3}}$$

MATEMÁTICAS II

(O alumnola debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

- a) Sexan C_1, C_2, C_3 as columnas primeira, segunda e terceira, respectivamente, dunha matriz cadrada M de orde 3 con $\det(M) = 4$. Calcula, enunciando as propiedades de determinantes que utilices, o determinante da matriz cuxas columnas primeira, segunda e terceira son, respectivamente, $-C_2, 2C_1 - C_3, C_2 + C_3$

b) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula todos os valores de a e b para os que $A^{-1} = A^t$, sendo A^t a matriz trasposta de A .
- a) ¿Son coplanarios os puntos $A(1,0,2), B(0,-1,1), C(-1,-2,0)$ e $D(0,2,2)$? Se existe, calcula a ecuación do plano que os contén.

b) Calcula a ecuación xeral e as ecuacións paramétricas do plano que é perpendicular ao plano $\alpha: 2x + y - 3z + 4 = 0$ e contén a recta que pasa polos puntos $P(-1,1,2)$ e $Q(2,3,6)$.
- a) Enuncia o teorema de Rolle. Calcula o valor de k para que a función $f(x) = x^3 - kx + 10$ cumpla as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo $[-2,0]$ e para ese valor determina un punto do intervalo no que se anule a derivada de $f(x)$.

b) Calcula o dominio e os intervalos de crecemento e decrecemento da función $g(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ (Nota: $\ln$ =logaritmo neperiano).
- Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = x^2 - 2x + 1$, a súa recta tanxente no punto $(3,4)$ e o eixo OX (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice e concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

- a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema de ecuacións lineais:

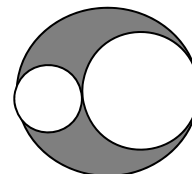
$$\begin{aligned} mx - 2y + 2z &= 1 \\ 2x + my + z &= 2 \\ x + 3y - z &= m \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = 1$.
- a) Calcula a ecuación do plano que pasa polo punto $P(1,2,-3)$ e é perpendicular á recta

$$r: \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ 3x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

- b) Calcula a distancia d do punto $Q(-1,0,-2)$ ao plano $\beta: x - 2y + 3z + 12 = 0$. Calcula, se existe, outro punto da recta r que tamén diste d do plano β .

3. Nunha circunferencia de radio 10 cm., divídese un dos seus diámetros en dúas partes que se toman como diámetros de dúas circunferencias tanxentes interiores a ela. ¿Que lonxitude debe ter cada un destes dous diámetros para que sexa máxima a área delimitada polas tres circunferencias (rexión sombreada)?



- 4.a) Define función derivable nun punto. Calcula, se existen, os valores de a e b , para que sexa derivable a función $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{e^x} & \text{se } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- b) Define integral indefinida dunha función. Calcula $\int x^2 \cos x dx$

MATEMÁTICAS II

(O alumnola debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Se A é unha matriz tal que $A^3 + I = O$, sendo I a matriz identidade e O a matriz nula de orde 3, ¿cal é o rango de A ? Calcula o determinante de A^{30} . Calcula A no caso de que sexa unha matriz diagonal verificando a igualdade anterior.
 b) Dada a matriz $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula unha matriz X tal que $BXB - B = B^{-1}$
2. a) Dado o plano $\pi: \begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$, calcula a ecuación da recta r que pasa polo punto $P(1, -2, 1)$ e é perpendicular a π . Calcula o punto de intersección de r e π .
 b) ¿Están aliñados os puntos $A(2, 0, 3)$, $B(0, 0, 1)$ e $C(2, 1, 5)$? Se non están aliñados, calcula a distancia entre o plano que determinan estes tres puntos e o plano π do apartado a).
3. a) Enuncia o teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que a gráfica da función $f(x) = 3\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x^2)$ corta o eixo OX nalgún punto do intervalo $(0, \pi)$? Razoa a resposta.
 b) Descompón o número 40 en dous sumandos tales que o produto do cubo dun deles polo cadrado do outro sexa máximo. ¿Canto vale ese produto?
4. a) Calcula os valores de a, b, c sabendo que $y = ax^2 + bx + 1$ e $y = x^3 + c$, teñen a mesma recta tanxente no punto $(1, 2)$.
 b) Enuncia a regra de Barrow. Calcula $\int_1^e \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) dx$. (Nota $\ln$ = logaritmo neperiano).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} x + my + 3z &= 1 \\ x + 2y + mz &= m \\ x + 4y + 3z &= 1 \end{aligned}$$
 b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = 4$.
2. a) Estuda a posición relativa da recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ e a recta s que pasa polos puntos $P(0, 2, 1)$ e $Q(1, 1, 1)$. Calcula a distancia de r a s .
 b) Calcula a ecuación xeral do plano π que é paralelo á recta r e contén á recta s .
3. a) Calcula os extremos relativos da función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$. Calcula tamén o máximo absoluto e o mínimo absoluto desta función no intervalo $[-3, 3]$.
 b) Calcula os valores de a e b para que a función $f(x) = ax^2 + bx \ln x$ teña un punto de inflexión no punto $(1, 2)$. Para estes valores de a e b , calcula o dominio e os intervalos de concavidade e convexidade de $f(x)$. (Nota $\ln$ = logaritmo neperiano).
4. a) Define primitiva e integral indefinida dunha función.
 b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = -3x^2 + 3$ e a recta $y = -9$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade).

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

- 1) a) **2 puntos**, distribuídos en:
 - 1 punto pola obtención do valor do determinante.
 - 1 punto polo enunciado das propiedades de determinantes que utilice.
b) **1 punto**, distribuído en:
 - 0,5 puntos pola formulación do problema.
 - 0,5 puntos pola obtención dos valores de a e b .

- 2) a) **1,5 puntos**, distribuídos en:
 - 1 punto por probar que son coplanarios.
 - 0,5 puntos pola ecuación do plano que os contén.
b) **1,5 puntos**, distribuídos en:
 - 0,5 puntos pola formulación do problema.
 - 0,5 puntos pola ecuación xeral do plano.
 - 0,5 puntos polas ecuacións paramétricas do plano.

- 3) a) **1 punto**, distribuído en:
 - 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Rolle.
 - 0,25 puntos polo cálculo de k .
 - 0,25 puntos polo cálculo do punto onde se anula a derivada da función.
b) **1 punto**, distribuído en:
 - 0,25 puntos polo dominio da función.
 - 0,25 puntos pola derivada da función.
 - 0,5 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento.

- 4) **2 puntos**, distribuídos en:
 - 0,5 puntos pola gráfica da parábola.
 - 0,5 puntos pola ecuación da recta tanxente.
 - 0,5 puntos pola formulación do problema.
 - 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

OPCIÓN B

- 1) a) **2 puntos**, distribuídos en:
 - 1 punto polo estudo do rango das matrices
 - 1 punto pola discusión do sistema.
b) **1 punto** pola resolución do sistema para o caso $m = I$.

Criterios de Avaliación / Corrección

- 2) a) **1 punto** pola obtención dunha ecuación do plano.
b) **2 puntos**, distribuídos en:
- 1 punto pola obtención da distancia do punto ao plano.
 - 1 punto pola obtención do outro punto da recta.
- 3) **2 puntos**, distribuídos en:
- 1 punto pola función maximizada.
 - 1 punto pola obtención dos valores que maximizan a área da rexión.
- 4) a) **1 punto**, distribuído en:
- 0,5 puntos pola definición de función derivable nun punto.
 - 0,5 puntos polo cálculo do valores de a e b .
- b) **1 punto**, distribuído en:
- 0,5 puntos pola definición de integral indefinida dunha función.
 - 0,5 puntos polo cálculo da integral.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

- 5) a) **1,5 puntos**, distribuídos en:
- 0,5 puntos pola obtención do rango da matriz A .
 - 0,5 punto polo cálculo do determinantes da matriz A^{30} .
 - 0,5 puntos pola obtención da matriz diagonal.
- b) **1,5 puntos**, distribuídos en:
- 0,5 puntos polo cálculo da matriz B^{-1} .
 - 0,5 puntos pola formulación do problema.
 - 0,5 puntos pola obtención da matriz X .
- 6) a) **1,5 puntos**, distribuídos en:
- 1 punto pola ecuación da recta r .
 - 0,5 puntos polo punto de intersección da recta e o plano.
- b) **1,5 puntos**, distribuídos en:
- 0,5 puntos por probar que os tres puntos non están aliñados.
 - 0,5 puntos pola ecuación do plano que determinan os tres puntos.
 - 0,5 puntos pola distancia entre os planos.
- 7) a) **1 punto**, distribuídos en:
- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Bolzano.
 - 0,5 puntos pola aplicación do teorema de Bolzano.
- b) **1 punto**, distribuído en:
- 0,25 puntos pola formulación do problema
 - 0,5 puntos pola obtención dos sumandos
 - 0,25 puntos produto dos sumandos.

Criterios de Avaliación / Corrección

8) a) **0,75 puntos**, distribuídos en:

- 0,25 puntos pola obtención de c.
- 0,5 puntos pola obtención de a e b.

b) **1,25 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos polo enunciado da regra de Barrow.
- 0,75 puntos pola integral.

OPCIÓN B

1) a) **2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto polo estudo do rango das matrices
- 1 punto pola discusión do sistema.

b) **1 punto**, pola resolución do sistema para o caso $m = 4$.

5) a) **2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola posición relativa das rectas.
- 1 punto pola distancia entre as rectas.

b) **1 punto**, pola ecuación xeral do plano.

6) a) **1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos polos extremos relativos.
- 0,5 puntos polos máximo e mínimo absolutos

b) **1 punto**, distribuído en;

- 0,5 puntos pola obtención de a e b.
- 0,25 puntos polo dominio da función.
- 0,25 puntos polos intervalos de concavidade e convexidade.

7) a) **0,5 puntos**.

b) **1,5 puntos**, distribuídos en;

- 0,5 puntos pola gráfica da parábola.
- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1. a) Se chamamos N á matriz da que queremos calcular o determinante $\det(N) =$

$$\det(-C_2, 2C_1 - C_3, C_2 + C_3) \stackrel{*}{=} \det(-C_2, 2C_1 - C_3, C_3) \stackrel{*}{=} \det(-C_2, 2C_1, C_3) \stackrel{**}{=}$$

$$\stackrel{***}{=} -2\det(-C_2, C_1, C_3) \stackrel{***}{=} 2\det(C_1, C_2, C_3) = 8$$

Propiedades utilizadas:

(*) Se a unha columna se lle suma outra columna multiplicada por un número, o determinante non varía.

(**) Se multiplicamos cada elemento dunha columna por un número, o determinante desa matriz queda multiplicado por ese número.

(***) Se permutamos dúas columnas dunha matriz, o determinante cambia de signo.

- b) Se $A^{-1} = A^t$, entón $A \cdot A^t = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & 0 \\ ab & 1 + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E así:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 1 \\ ab = 0 \\ 1 + b^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 0} \quad \boxed{a = \pm 1}$$

2. a) $\overrightarrow{AC} = (-2, -2, -2)$, $\overrightarrow{AD} = (-1, 2, 0)$ son dous vectores non proporcionais e polo tanto os puntos A , C e D determinan un plano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + y - 3z + 4 = 0}$$

é a ecuación do plano que pasa polos puntos A , C e D .

E como as coordenadas de B verifican a ecuación anterior, entón B tamén pertence ao plano π e así os puntos dados son coplarios.

b)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_\alpha = (2, 1, -3) \\ \overrightarrow{PQ} = (3, 2, 4) \end{array} \right\} \text{son dous vectores do plano pedido}$$

Como $P(-1, 1, 2)$ é un punto do plano, xa temos os elementos suficientes para poder escribir as ecuacións paramétricas

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = 1 + \lambda + 2\mu \\ z = 2 - 3\lambda + 4\mu \end{cases}$$

E a ecuación xeral

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{10x - 17y + z + 25 = 0}$$

3. a) Teorema de Rolle: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) e ademais $f(a) = f(b)$, entón existe a lo menos un punto $c(a, b)$ onde se anula a derivada: $f'(c) = 0$.

Exemplos de resposta / Solucións

$f(x) = x^3 - kx + 10$ é unha función polinómica e polo tanto continua en $[-2,0]$ e derivable en $(-2,0)$. Para poder aplicarlle o teorema de Rolle só resta impoñerlle a condición de que tome o mesmo valor nos extremos do intervalo

$$f(-2) = f(0) \Rightarrow -8 + 2k + 10 = 10 \Rightarrow \boxed{k = 4}$$

$$f(x) = x^3 - 4x + 10 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Pero $\frac{2\sqrt{3}}{3} \notin (-2,0)$, polo que o punto do intervalo $(-2,0)$ no que se anula a derivada de $f(x)$ é

$$\text{o punto } \boxed{c = -\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

b) A función $\ln x$ non está definida para $x < 0$, e como $x^2 + 1 > 0$, a función $g(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ está definida para os valores de x tales que $x^2 - 1 > 0$. É dicir

$$\boxed{\text{Dom}g(x) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin \text{Dom}g(x)$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	< 0	Non está	> 0
$f(x)$	decrecent e	no dominio	crecente

4. $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

$$f'(x) = 2(x - 1); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f''(x) = 2 > 0$$

$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2(x - 1); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ f''(x) = 2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ é convexa e ten un mínimo (vértice) no punto } (1,0)$

Ademais

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow (1,0) \text{ punto de corte co eixo OX}$$

$$x = 0 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow (0,1) \text{ punto de corte co eixo OY}$$

Recta tanxente no punto (3,4):

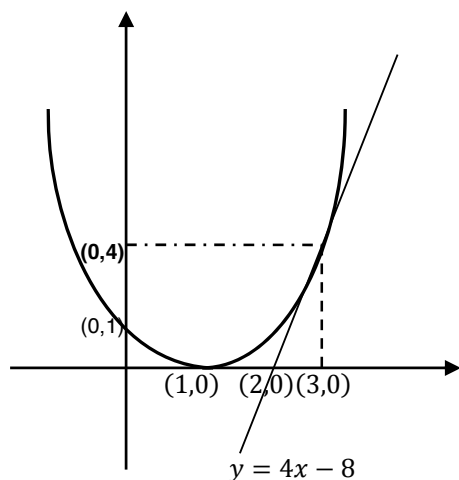
$$y - 4 = f'(3)(x - 3)$$

É dicir

$$y - 4 = 4(x - 3); y = 4x - 8$$

e a área pedida podemos calculala como

$$A = \int_1^3 (x^2 - 2x + 1) dx - \frac{1}{2} (3 - 2) * 4 = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_1^3 - 2 = \boxed{\frac{2}{3} u^2}$$



Exemplos de resposta / Solucións

OPCIÓN B

1. a)

$$\text{Matriz de coeficientes } (C) = \begin{pmatrix} m & -2 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{Matriz ampliada } (A) = \begin{pmatrix} m & -2 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & m \end{pmatrix};$$

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$
$$\begin{vmatrix} m & -2 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - 5m + 6$$

Como

$$m^2 + 5m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -6 \text{ ou } m = 1$$

Temos:

$$m = -6 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

$$m = 1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

$$m \neq -6, \text{ e } m \neq 1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3$$

Como $\text{rang}(C) \leq \text{rang}(A) \leq 3$, só necesitamos calcular o rango da matriz ampliada nos casos $m = -6$ e $m = 1$:

$$\boxed{m = -6}$$

$$\begin{vmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 49 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

$$\boxed{m = 1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

Discusión:

$m = -6 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A)$. Sistema incompatible.

$m = 1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(A) < n^\circ \text{ incógnitas}$. Sistema compatible indeterminado.

$m \neq -6$ e $m \neq 1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3 = \text{rang}(A) = n^\circ \text{ incógnitas}$. Sistema compatible determinado.

b) Caso $\boxed{m = 1}$. Polo visto no apartado anterior, o sistema é compatible indeterminado e ten infinitas solucións. Un sistema equivalente é:

$$\begin{array}{rcl} 2x & + & z = 2 - y \\ x & - & z = 1 - 3y \end{array}$$

e as infinitas solucións son

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{4}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{5}{3}\lambda \end{cases}; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2. a) Como o plano é perpendicular á recta, o vector director da recta é un vector perpendicular ao plano

Exemplos de resposta / Solucións

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 2, -3)$$

Como conocemos un punto, $P(1, 2, -3)$, e un vector perpendicular ao plano, a ecuación xeral do plano é:

$$-(x - 1) + 2(y - 2) - 3(z + 3) = 0$$

é dicir

$$\boxed{\beta: x - 2y + 3z + 12 = 0}$$

b) Utilizando a fórmula da distancia dun punto a un plano

$$d(Q, \beta) = \left| \frac{-1 - 6 + 12}{\sqrt{1 + 4 + 9}} \right| = \frac{5\sqrt{14}}{14} u$$

Como $\vec{v}_r = (-1, 2, -3)$ é un vector director da rectas r , e $(0, -2, 1)$ é un punto da mesma, as ecuacións paramétricas de r son:

$$r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$$

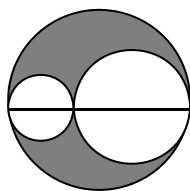
Temos que atopar un punto da recta, será da forma $(-\lambda, -2 + 2\lambda, 1 - 3\lambda)$, distinto de Q que tamén diste $\frac{5\sqrt{14}}{14}$ unidades do plano β . Utilizando novamente a fórmula da distancia dun punto a un plano, temos

$$\frac{5\sqrt{14}}{14} = \frac{|-\lambda + 4 - 4\lambda + 3 - 9\lambda + 12|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} \Rightarrow 5 = |19 - 14\lambda|$$

$5 = 19 - 14\lambda \Rightarrow \lambda = 1$ e obteríamos o punto Q .

$$-5 = 19 - 14\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{12}{7} \Rightarrow \boxed{Q'(-\frac{12}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{29}{7})}$$

- 3.** Se chamamos x e y aos radios das dúas circunferencias tanxentes interiores á dada, entón verificarase que



$$2x + 2y = 20 \Rightarrow y = 10 - x$$

Polo tanto, a función a maximizar está dada por

$$A(x) = \pi * 10^2 - [\pi x^2 + \pi(10 - x)^2]$$

$$A'(x) = -2\pi x + 2\pi(10 - x)$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ (punto crítico)}$$

$$A''(x) = -4\pi < 0 \Rightarrow A''(5) < 0 \text{ (máximo)}$$

Polo tanto, a área da rexión sombreada resulta máxima cando se divide o diámetro da circunferencia de partida en dúas partes iguais, é dicir que as circunferencias tanxentes interiores teñen 10cm. de diámetro

- 4. a)** A función $f(x)$ dise derivable no punto x_0 se existe e é finito o seguinte límite

Exemplos de resposta / Solucións

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

En $x < 0$, a función $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{e^x} & \text{se } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ é continua e derivable por ser cociente de

funcións continuas e derivables e non anularse o denominador.

En $x > 0$, a función é continua e derivable por ser polinómica.

Para que $f(x)$ sexa continua en $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-x}{e^x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= b = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

Para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1-x}{e^x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-x-e^x}{xe^x} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1-e^x}{e^x + xe^x} = -2 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + ax + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + a) = a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

(*) É unha indeterminación da forma $\frac{0}{0}$ e aplicamos a regra de L'Hopital

b) Chámase integral indefinida de $f(x)$ ao conxunto de todas as primitivas de $f(x)$. Representase por $\int f(x)dx = F(x) + C$.

O símbolo $\int$ chámase integral, mentras que $f(x)dx$ recibe o nome de integrando, $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ e C é a constante de integración.

Para calcular $\int x^2 \cos x dx$, utilizamos o método de integración por partes:

$$\left. \begin{aligned} u &= x^2 \\ dv &= \cos x dx \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} du &= 2x dx \\ v &= \sin x \end{aligned}$$

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx$$

Volvemos a utilizar o método de integración por partes

$$\left. \begin{aligned} u &= 2x \\ dv &= \sin x dx \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} du &= 2 dx \\ v &= -\cos x \end{aligned}$$

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - \int 2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1. a) $A^3 + I = 0 \Leftrightarrow A^3 = -I$. Polo tanto

$$[\det(A)]^3 = -1 \Rightarrow \det(A) = -1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{rang}(A) = 3}.$$

$$A^{30} = (A^3)^{10} = (-I)^{10} = I \Rightarrow \det(A^{30}) = 1.$$

Se A é ademais unha matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix} = -I \Rightarrow \begin{cases} a^3 = -1 \\ b^3 = -1 \\ c^3 = -1 \end{cases}$$

E así $\boxed{A = -I}$.

- b) $\det(B) = -1/2 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$

$$BXB - B = B^{-1} \Leftrightarrow X = B^{-1}(B + B^{-1})B^{-1} = B^{-1} + (B^{-1})^3$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} (\text{Ad}(B_{ij}))^t = -2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(B^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(B^{-1})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 12 & -16 \end{pmatrix}$$

$$X = B^{-1} + (B^{-1})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 14 & -18 \end{pmatrix}}$$

2. a) $(2,0,0)$ é un punto do plano π

$\begin{pmatrix} -1, 1, 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1, 0, 1 \end{pmatrix}$ son vectores do plano π

Ecuación xeral do plano π :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z - 2 = 0$$

Como a recta e o plano son perpendiculares, como vector director da recta tomamos o vector asociado ao plano π : $(1, 2, -1)$ e a ecuación da recta será

$$\boxed{r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}}$$

Para calcular o punto de corte da recta e o plano, escribimos as ecuacións paramétricas da recta

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

E substituímos na ecuación xeral do plano

$$1 + \lambda + 2(-2 + 2\lambda) - 1 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Punto de corte: $\boxed{(2, 0, 0)}$.

- b) Os vectores

$\overrightarrow{AB} = (-2, 0, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 2)$ non son proporcionais e polo tanto os puntos non están aliñados e determinan un plano.

Ecuación xeral do plano que pasa por estes tres puntos:

Exemplos de resposta / Solucións

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z + 1 = 0$$

Temos polo tanto dous planos paralelos

$$\pi: x + 2y - z - 2 = 0;$$

$$\alpha: x + 2y - z + 1 = 0$$

e a distancia entre eles ven dada por

$$d(\pi, \alpha) = \frac{|-2 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ unidades}$$

- 3. a)** Teorema de Bolzano: Se $f(x)$ é unha función continua nun intervalo $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$ (toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo), entón existe a lo menos un punto $c \in (a, b)$ no que a función se anula: $f(c) = 0$.

$$f(x) = 3\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x^2) \text{ continua en } [0, \pi]$$

$$f(0) < 0$$

$$f(\pi) > 0$$

Polo teorema de Bolzano, $\exists c \in (0, \pi)$ tal que $f(c) = 0$.

- b)** Sumandos: x ; $40 - x$. Hai que maximizar a función

$$P(x) = x^3(40 - x)^2$$

Calculamos os puntos críticos

$$P'(x) = 3x^2(40 - x)^2 - 2x^3(40 - x) = x^2(40 - x)(120 - 5x)$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \text{ que evidentemente non maximiza a } P(x) \\ x = 40, \text{ que evidentemente non maximiza a } P(x) \\ x = 24 \end{cases}$$

Posto que

$$x \in (0, 24) \Rightarrow P'(x) > 0$$

$$x \in (24, 40) \Rightarrow P'(x) < 0$$

podemos afirmar que $P(x)$ ten un máximo relativo en $x = 24$. Polo tanto, os sumandos son 24 e 16 e o produto será

$$P(24) = 24^3 \cdot 16^2 = \boxed{3.538.944}$$

- 4. a)** $2 = 1^3 + c \Rightarrow \boxed{c = 1}$

Pendente da recta tanxente no punto $(1, 2)$: $y'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$

Tendo en conta que $y = ax^2 + bx + 1$, pasa polo punto $(1, 2)$ e que a pendente da súa recta tanxente neste punto é 3, temos o sistema de ecuacións

$$2 = a + b + 1$$

$$3 = 2a + b$$

Obtendo que $\boxed{a = 2}$, e $\boxed{b = -1}$

- b)** Regra de Barrow: Se $f(x)$ é unha función continua nun intervalo $[a, b]$ e $G(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ en $[a, b]$, entón

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

$$\int \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) dx = \ln|x| - \int \ln x dx$$

Utilizando o método de integración por partes:

Exemplos de resposta / Solucións

$$\left. \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right\} \Rightarrow \int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1)$$

e utilizando a regra de Barrow

$$\int_1^e \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) dx = [\ln|x| - x(\ln x - 1)]_1^e = 1 - 1 = 0$$

OPCIÓN B

1. a)

$$\text{Matriz de coeficientes } (C) = \begin{pmatrix} 1 & m & 3 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{Matriz ampliada } (A) = \begin{pmatrix} 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 2 & m & m \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = m^2 - 7m + 12$$

Como

$$m^2 - 7m + 12 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \text{ ou } m = 4$$

Temos:

$$m = 3 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

$$m = 4 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

$$m \neq 3, e \ m \neq 4 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3$$

Como $\text{rang}(C) \leq \text{rang}(A) \leq 3$, só necesitamos calcular o rango da matriz ampliada nos casos $m = 3$ e $m = 4$:

$$\boxed{m = 3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

$$\boxed{m = 4}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

Discusión:

$m = 3 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A)$ Sistema incompatible.

$m = 4 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(A) < n^{\circ} \text{ incógnitas.}$ Sistema compatible indeterminado.

$m \neq 3 \text{ e } m \neq 4 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3 = \text{rang}(A) = n^{\circ} \text{ incóg}$. Sistema compatible determinado.

b) Caso $\boxed{m = 4}$. Polo visto no apartado anterior, o sistema é compatible indeterminado e ten infinitas solucións. Un sistema equivalente é:

$$\begin{array}{rcl} x & + & 2y = 4 - 4z \\ x & + & 4y = 1 - 3z \end{array}$$

Exemplos de resposta / Solucións

e as infinitas solucións son

$$\begin{cases} x = -5\lambda + 7 \\ y = \frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{2} \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

2. a)

Punto da recta r : $P_r(1,1,0)$

Vector director da recta r : $\vec{v}_r = (1,2,1)$

Vector director da recta s : $\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (1, -1, 0)$; $\overrightarrow{P_rP} = (-1, 1, 1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(\overrightarrow{P_rP}, \vec{v}_r, \vec{v}_s) = 3 \Rightarrow \boxed{\text{As rectas crúzanse.}}$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, -3)$$

$$d(r, s) = \frac{|\det(\overrightarrow{P_rP}, \vec{v}_r, \vec{v}_s)|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{3}{\sqrt{1+1+9}} = \boxed{\frac{3\sqrt{11}}{11} \text{ unidades}}$$

b) $P(0,2,1)$ é un punto do plano π

$\vec{n}_\pi = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = (1, 1, -3)$ é un vector perpendicular ao plano π . Polo tanto, a ecuación do plano π será:

$$x + y - 2 - 3(z - 1) = 0$$

$$\boxed{\pi : x + y - 3z + 1 = 0}$$

3. a) $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

$$f''(0) = -16 < 0. \boxed{\text{Máximo relativo: } (0,1)}$$

$$f''(-2) = f''(2) = 32 > 0. \boxed{\text{Mínimos relativos: } (-2,15), (2,15)}$$

$f(x)$ función polinómica $\Rightarrow f(x)$ é continua no intervalo $[-3,3] \Rightarrow f(x)$ alcanza o mínimo e máximo absolutos no intervalo $[-3,3]$

$$f(-3) = f(3) = 10$$

Polo tanto:

$$\boxed{\text{Mínimo absoluto no intervalo } [-3,3]: -15}$$

$$\boxed{\text{Maximo absoluto no intervalo } [-3,3]: 10}$$

b) A función pasa polo punto $(1,2)$

$$\boxed{f(1) = 2 \Rightarrow a = 2}$$

$$f(x) = 2x^2 + bx \ln x$$

Exemplos de resposta / Solucións

$$f'(x) = 4x + b \ln x + b$$

$$f''(x) = 4 + \frac{b}{x}$$

En $x = 1$, a función ten un punto de inflexión

$$0 = f''(1) = 4 + b \Rightarrow \boxed{b = -4}$$

$$\text{Polo tanto: } f(x) = 2x^2 - 4x \ln x.$$

Como a función $\ln$ só está definida para números positivos, temos que

$$\boxed{\text{Dom}(f(x)) = (0, +\infty)}$$

Por outra parte

$$f''(x) = 4 - \frac{4}{x} = \frac{4(x-1)}{x}$$

E analizando o signo da segunda derivada:

	(0,1)	(1, +∞)
$f''(x)$	< 0	> 0
$f(x)$	cóncava	convexa

4. a) A función $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$.

Chámase integral indefinida de $f(x)$ ao conxunto de todas as primitivas de $f(x)$.

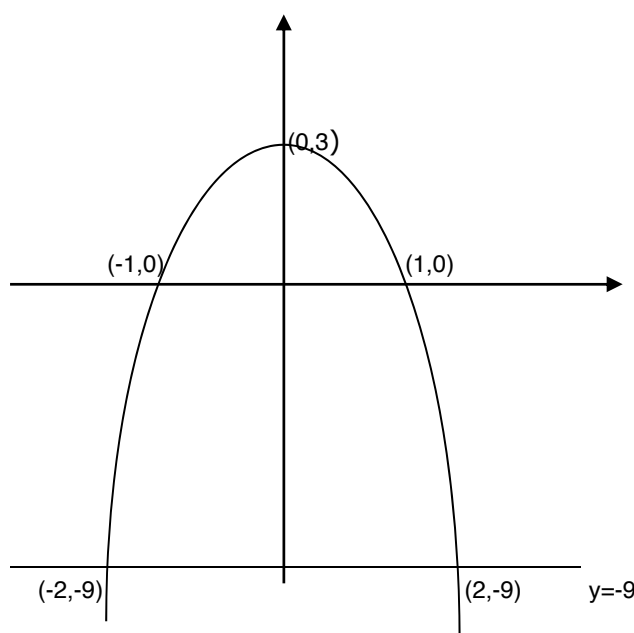
Representase por $\int f(x)dx = F(x) + C$.

O símbolo $\int$ chámase integral, mentras que $f(x)dx$ recibe o nome de integrando, $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ e C é a constante de integración.

b) Vértice da parábola: (0,3)

$$-3 < 0 \Rightarrow \text{convexa}$$

Puntos de corte da parábola cos eixos: (0,3), (-1,0), (1,0)



Puntos de corte das gráficas

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x^2 + 3 \\ y = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow (-2, -9), (2, -9)$$

Polo tanto

$$A = \int_{-2}^2 (-3x^2 + 3 + 9)dx;$$

$$A = [-x^3 + 12x]_{-2}^2 = \boxed{32 u^2}$$

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a deber responder só aos exercicios dunha das opcións . Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 2 puntos, exercicio 4 = 2 puntos).

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

a) Se I é a matriz identidade de orde 3, calcula os valores de λ para os que $A + \lambda I$ non ten inversa. Calcula, se existe, a matriz inversa de $A - 2I$.

b) Calcula a matriz X tal que $XA + A' = 2X$, sendo A' a matriz trasposta de A .

2. Sexa r a recta que pasa polo punto $P(1, -1, -2)$ e é perpendicular ao plano $\alpha: x + 2y + 3z + 6 = 0$. Sexa s a recta que pasa polos puntos $A(1, 0, 0)$ e $B(-1, -3, -4)$.

a) Estuda a posición relativa das rectas r e s . Se se cortan, calcula o punto de corte.

b) Calcula a distancia do punto $A(1, 0, 0)$ ao plano β que pasa polo punto $P(1, -1, -2)$ e é paralelo a α .

3. Debuxa a gráfica de $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$, estudando: dominio, puntos de corte cos eixos, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.

4. a) Enuncia o teorema fundamental do cálculo integral. Sabendo que $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$, con f unha función continua en todos os puntos da recta real, calcula $f(2)$.

b) Calcula $\int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x^2 + x} dx$

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro a , o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} ax + 2y + 2z &= a \\ x + y + z &= 0 \\ 2x - y + 2z &= a \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $a = 0$.

2. Dada a recta $r: \begin{cases} y = 1 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$

a) Calcula a ecuación do plano α que pasa polo punto $Q(0, 2, 2)$ e contén a recta r . Calcula a área do triángulo que ten por vértices os puntos de intersección de α cos eixos de coordenadas.

b) Calcula a ecuación xeral do plano que contén a recta r e é perpendicular ao plano α .

3. a) Define función continua nun punto. ¿Cando se di que unha discontinuidade é evitable? ¿Para que valores de k , a función $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + k}$ é continua en todos os puntos da recta real?

b) Determina os valores de a, b, c, d para que a función $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ teña un máximo relativo no punto $(0, 4)$ e un mínimo relativo no punto $(2, 0)$.

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola recta $x + y = 7$ e a gráfica da parábola $f(x) = x^2 + 5$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade)

MATEMÁTICAS II

(O alumnola debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 3 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 2 puntos, exercicio 4 = 2 puntos).

OPCIÓN A

1. a) Pon un exemplo de matriz simétrica de orde 3 e outro de matriz antisimétrica de orde 3.
b) Sexa M unha matriz simétrica de orde 3, con $\det(M) = -1$. Calcula, razoando a resposta, o determinante de $M + M^t$, sendo M^t a matriz trasposta de M .

- c) Calcula unha matriz X simétrica e de rango 1 que verifique: $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Dada a recta $r: \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 3x + 5y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$

- a) Calcula a ecuación xeral do plano π perpendicular a r e que pasa polo punto $P(2, -1, -2)$.
b) Calcula o punto Q no que r corta a π . Calcula o ángulo que forma o plano π con cada un dos planos coordenados.

3. a) Definición e interpretación xeométrica da derivada dunha función nun punto.

- b) Calcula: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{\sin(x^2)}$

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $y = -x^2 + 1$ e as rectas tanxentes a esta parábola nos puntos de corte da parábola co eixo OX. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións lineais

$$\begin{aligned} mx + y - 2z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ x - y + z &= m \end{aligned}$$

- b) Resólveo, se é posible, nos casos $m = 0$ e $m = -1$.

2. Dadas as rectas $r: \begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = -4\lambda \\ z = -6 \end{cases}$; $s: \begin{cases} 4x - 3y - 12 = 0 \\ 5y - 4z - 4 = 0 \end{cases}$

- a) Estuda a súa posición relativa. Se se cortan, calcula o punto de corte e o ángulo que forman r e s .
b) Calcula, se existe, o plano que as contén.

3. Debuxa a gráfica da función $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$, estudando: dominio, puntos de corte cos eixos, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.

4. a) Calcula $\int x \ln(1+x^2) dx$ (Nota: $\ln$ = logaritmo neperiano)

- b) Enuncia e interpreta xeometricamente o teorema do valor medio do cálculo integral.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1) a) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención dos valores de λ para os que $A+\lambda I$ non ten inversa.
- 1 punto polo cálculo da matriz inversa de $A-2I$.

b) 1 punto, distribuídos en:

- 0,5 puntos por desaxar X
- 0,5 puntos polos cálculos de $-A^t(A-2I)^{-1}$

2) a) 2 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención das rectas r e s .
- 1 punto polo estudo da posición relativa das rectas.
- 0,5 puntos pola obtención do punto de corte.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola obtención do plano β .
- 0,5 puntos pola obtención da distancia do punto ao plano.

3) 2 puntos, distribuídos en:

- 0,25 puntos polo dominio e puntos de corte cos eixes.
- 0,25 puntos polas asíntotas.
- 0,5 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento.
- 0,25 puntos por xustificar que non existen máximos nin mínimos relativos.
- 0,25 puntos por xustificar que non existen puntos de inflexión.
- 0,25 puntos polos intervalos de concavidade e convexidade.
- 0,25 puntos pola gráfica.

4) a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema fundamental do cálculo integral.
- 0,5 puntos pola obtención de $f(2)$.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola división do polinomio do numerador entre o do denominador e a descomposición en fraccións simples.
- 0,5 puntos polas integrais e aplicación da regra de Barrow.

OPCIÓN B

1) a) 2 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención do rango da matriz de coeficientes.
- 0,5 puntos polo cálculo do rango da matriz ampliada.
- 0,5 puntos. Sistema incompatible.
- 0,5 puntos. Sistema compatible determinado.

b) 1 punto, pola solución do sistema para o caso $a = 0$.

2) a) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención dunha ecuación do plano α .
- 1 punto polo cálculo da área do triángulo.

b) 1 punto, pola obtención da ecuación do plano.

Criterios de Avaliación / Corrección

3) a) **1 punto**, distribuído en:

- 0,25 puntos pola definición de función continua nun punto.
- 0,25 puntos pola definición de descontinuidade evitable.
- 0,5 puntos pola obtención dos valores de k .

b) **1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos pola obtención dos valores de a, b, c, d .

4) **2 puntos**, distribuídos en:

- 0,75 puntos polas gráficas.
- 0,75 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1) a) **0,5 puntos**, distribuídos en:

- 0,25 puntos polo exemplo de matriz simétrica.
- 0,25 puntos polo exemplo de matriz antisimétrica.

b) **1 punto**

c) **1,5 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos por expresar a condición do rango.
- 0,5 puntos polas ecuacións do produto de matrices.
- 0,5 puntos por resolver as ecuacións.

2) a) **1,5 puntos**

b) **1,5 puntos**, distribuídos en:

- 0,75 puntos pola obtención do punto de corte.
- 0,75 puntos (0,25 puntos por cada ángulo).

3) a) **1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos pola definición da derivada dunha función nun punto.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) **1 punto**

4) **2 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos por representar a parábola.
- 0,5 puntos pola obtención das tanxentes.
- 0,5 puntos pola formulación da área.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

OPCIÓN B

1) a) **2 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención do rango da matriz de coeficientes.

Criterios de Avaliación / Corrección

- 0,5 puntos polo cálculo do rango da matriz ampliada.
- 0,5 puntos. Sistema incompatible
- 0,5 puntos. Sistema compatible determinado.

b) 1 punto (0,5 puntos por cada caso)

2) a) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola posición relativa
- 0,5 puntos polo punto de corte.
- 0,5 puntos polo ángulo que forman as rectas.

b) 1 punto, pola obtención da ecuación do plano.

3) 2 puntos, distribuídos en:

- 0,25 puntos polo dominio e puntos de corte cos eixes.
- 0,25 puntos polas asíntotas.
- 0,5 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento.
- 0,25 puntos polo máximo e mínimo relativos.
- 0,25 puntos por xustificar que non existen puntos de inflexión.
- 0,25 puntos polos intervalos de concavidade e convexidade.
- 0,25 puntos pola gráfica.

4) a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola integración por partes.
- 0,5 puntos pola integral da función racional.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo integral.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

$$1) \text{ a) } A + \lambda I = \begin{pmatrix} -1+\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1+\lambda \end{pmatrix}; |A + \lambda I| = (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda + 1).$$

$$\text{Polo tanto, } A + \lambda I \text{ non ten inversa} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}; |A - 2I| = (-3)^2 \cdot (-1) = -9 \neq 0$$

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{1}{|A - 2I|} (Ad(A - 2I)_{ij})^t = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) $XA + A^t = 2X \Leftrightarrow X(A - 2I) = -A^t$. E, polo apartado anterior, sabemos que $A - 2I$ ten inversa.

Polo tanto: $X = -A^t(A - 2I)^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$2) \text{ a) } \left. \begin{matrix} P(1, -1, 2) \in r \\ \underline{v_r} = \underline{n_\alpha} = (1, 2, 3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} A(1, 0, 0) \in s \\ \underline{v_s} = \underline{AB} = (-2, -3, -4) \end{matrix} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 - 2\mu \\ y = -3\mu \\ z = -4\mu \end{cases}$$

$$\text{rang}(\underline{v_r}, \underline{v_s}) = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{as rectas córtanse ou crúzanse. Ademais}$$

$$\text{rang}(\underline{v_r}, \underline{v_s}, \underline{PA}) = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2, \text{ logo as rectas córtanse.}$$

Punto de corte:

$$\begin{cases} 1 + \lambda = 1 - 2\mu \\ -1 + 2\lambda = -3\mu \\ -2 + 3\lambda = -4\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T(3, 3, 4)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

b)
$$\left. \begin{array}{l} P(1, -1, -2) \in \beta \\ n_\beta = n_\alpha = (1, 2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \beta: (x-1) + 2(y+1) + 3(z+2) = 0 \Rightarrow \beta: x + 2y + 3z + 7 = 0$$

$$d(A, \beta) = \frac{|1+7|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{4\sqrt{14}}{7} \text{ unidades}$$

3) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Puntos de corte cos eixes:

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow f(x)=0 \\ f(x)=0 \Rightarrow x(x+3)=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{(0,0)}; \boxed{(-3,0)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \boxed{x = -1} \text{ Asíntota vertical}$$

Non existen asíntotas horizontais pois $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$

Cálculo da asíntota oblicua:

$$\left. \begin{array}{l} m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x}{x(x+1)} = 1 \\ b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x - x^2 - x}{x+1} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{y = x + 2}$$

Cálculo dos puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x+1) - x^2 - 3x}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = 0, \text{ que non ten raíces reais.}$$

Polo tanto, non existen máximos nin mínimos relativos.

Intervalos de crecemento e decrecemento:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	> 0	> 0
$f(x)$	crecent e	crecent e

$f(x)$ é crecente no intervalo $(-\infty, -1)$ e no intervalo $(-1, +\infty)$

Calculamos a segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2 + 2x + 3)}{(x+1)^4} = \frac{-4}{(x+1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ e polo tanto a función non ten puntos de inflexión.

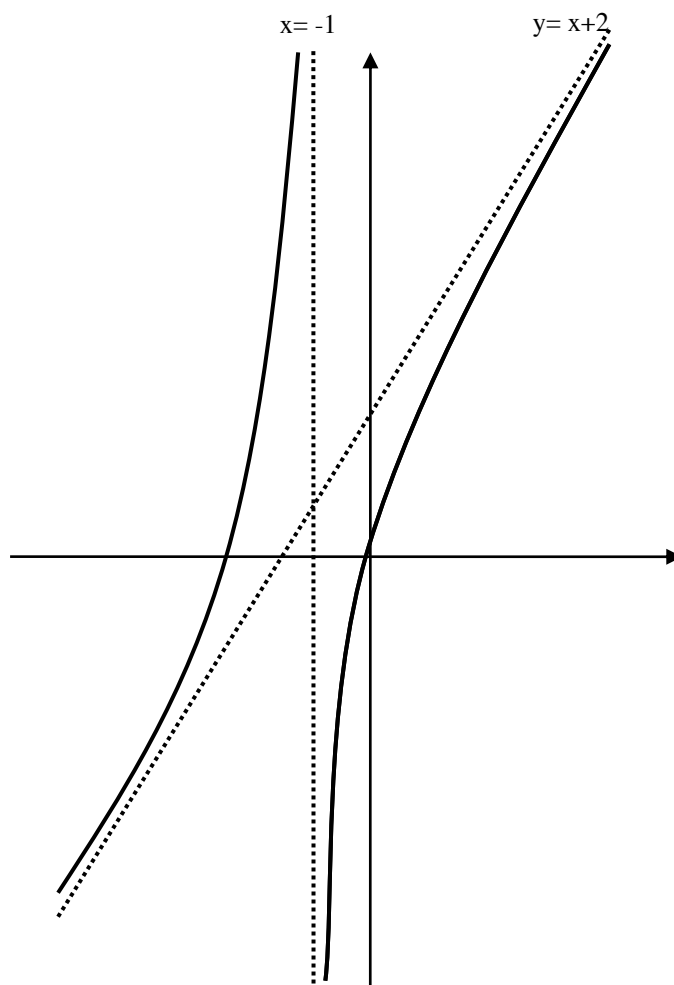
Intervalos de concavidade e convexidade:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f''(x)$	> 0	< 0
$f(x)$	convexa	cóncava

$f(x)$ é convexa no intervalo $(-\infty, -1)$ e cóncava no intervalo $(-1, +\infty)$

Con todos estes datos a gráfica da función será:

Exemplos de resposta / Solucións



4) a) Se $f(x)$ é unha función continua en $[a, b]$ e $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, entón $F(x)$ é derivable en (a, b) e ademais $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = x^2(1+x) \Rightarrow f(x) = F'(x) = 2x + 3x^2$$

e polo tanto:

$$f(2) = 4 + 12 = 16$$

b) O numerador e denominador son funcións polinómicas do mesmo grao. Polo tanto, en primeiro lugar, facemos a división:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 + x} = 1 + \frac{1-x}{x^2 + x}$$

e, tendo en conta que $x^2 + x = x(x+1)$, facemos a descomposición en fraccións simples

$$\frac{1-x}{x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax + Bx + A}{x^2 + x} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$$

Polo tanto

$$\int \frac{1-x}{x^2 + x} dx = \int dx + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{2dx}{x+1}$$

e aplicando a regra de Barrow

$$\int_1^2 \frac{1-x}{x^2 + x} dx = [x + \ln|x| - 2\ln|x+1|]_1^2 = 2 + \ln 2 - 2\ln 3 - 1 + 2\ln 2 = 1 + 3\ln 2 - 2\ln 3 = 1 + \ln(8/9)$$

Exemplos de resposta / Solucións

OPCIÓN B

1) a) Matriz de coeficientes $(C) = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; Matriz ampliada $(A) = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & a \end{pmatrix}$

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

$$|C| = 2a - 2 + \cancel{A} - \cancel{A} + a - 4 = 3a - 6; \quad 3a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

Polo tanto:

$$a = 2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

$$a \neq 2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3$$

Calculamos o rango da matriz ampliada:

$$a \neq 2 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3, \text{ pois } 3 = \text{rang}(C) \leq \text{rang}(A) \leq 3$$

para $a = 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \cancel{A} - 2 - \cancel{A} - 4 = -6 \neq 0$$

Concluimos que $\text{rang}(A) = 3$, para calquera valor do parámetro.

Discusión:

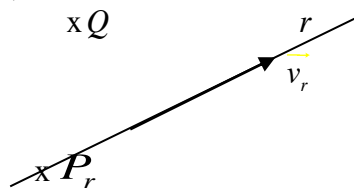
$a = 2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A)$. Sistema incompatible. Non ten solución.

$a \neq 2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3 = \text{rang}(A) = n^\circ \text{ incógnitas}$. Sistema compatible determinado. Solución única.

b) $a = 0$. Estamos no caso de sistema compatible determinado e é un sistema homoxéneo. Polo tanto a solución única é a solución trivial

$$\boxed{x = 0, y = 0, z = 0}$$

2) a)



$$r: \begin{cases} y = 1 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -4 + \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$P_r(-4, 1, 0) \in r; \quad Q(0, 2, 2) \in \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{v_r} = (1, 0, 1) \\ \overline{QP_r} = (-4, -1, -2) \end{array} \right\} \text{ vectores directores de } \alpha$$

Estes elementos determinan o plano α :

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha: x - 2y - z + 6 = 0}$$

Exemplos de resposta / Solucións

Vértices do triángulo: $M(-6,0,0)$; $N(0,3,0)$; $P(0,0,6)$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{MN} = (6,3,0) \\ \overrightarrow{MP} = (6,0,6) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (18, -36, -18)$$

$$\text{Área } \triangle MNP = \frac{1}{2} |\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP}| = \frac{1}{2} \sqrt{18^2 + 36^2 + 18^2} = 9\sqrt{6} \text{ u}^2$$

b) $\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1,0,1) \\ \vec{n}_\alpha = (1,-2,-1) \end{array} \right\} \text{ vectores directores de } \pi$
 $P_r(-4,1,0) \in \pi$

Estes elementos determinan o plano π :

$$\begin{vmatrix} x+4 & y-1 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x + y - z + 3 = 0}$$

3) a) Dise que $f(x)$ é continua no punto $x = x_0$, se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x); \exists f(x_0); \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Dise que $f(x)$ ten unha discontinuidade evitable no punto $x = x_0$, se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\nexists f(x_0) \text{ ou ben } \exists f(x_0) \text{ pero } f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$f(x) = \frac{e^x}{x^2 + k}$ é un cociente de funcións continuas en $\mathbb{R}$. Polo tanto $f(x)$ será continua en $\mathbb{R}$ se non se anula o denominador, pero

$$x^2 + k = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{-k}$$

Así $f(x)$ é continua en $\mathbb{R}$ para $k \in (0, \infty)$.

b) Máximo relativo en $(0,4) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(0) = 4 \Rightarrow \boxed{d=4} \\ g'(0) = 0 \Rightarrow \boxed{c=0} \end{array} \right\} \Rightarrow g(x) = ax^3 + bx^2 + 4$

$$\text{Mínimo relativo en } (2,0) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(2) = 0 \Rightarrow 8a + 4b + 4 = 0 \\ g'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{a=1} \\ \boxed{b=-3} \end{array} \right.$$

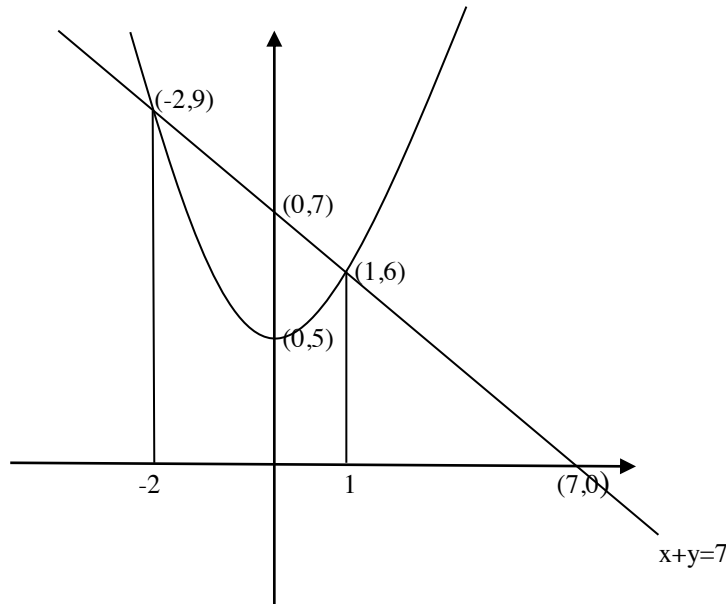
4) $x + y = 7 \Rightarrow$ Puntos de corte da recta cos eixes: $(0,7), (7,0)$

$$f(x) = x^2 + 5 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = 2x \Rightarrow \text{Decrecente en } (-\infty, 0) \text{ e crecente en } (0, \infty) \\ \text{Corte cos eixes: } (0,5); \text{ Vértice } (0,5); f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow \text{convexa} \end{array} \right.$$

Exemplos de resposta / Solucións

Puntos de corte de recta e parábola:

$$\begin{cases} y = 7 - x \\ y = x^2 + 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Puntos de corte das gráficas: } (-2, 9); (1, 6)$$



$$\text{Área} = \int_{-2}^1 [7 - x - (x^2 + 5)] dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \boxed{\frac{9}{2} u^2}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1) a) Exemplo de matriz simétrica de orde 3 : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; Exemplo de matriz antisimétrica de orde 3 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

b) M simétrica $\Leftrightarrow (a_{ij} = a_{ji}) \Leftrightarrow M = M^t \Leftrightarrow M + M^t = 2M$. Entón, tendo en conta que M é de orde 3:

$$\det(M + M^t) = \det(2M) = 2^3 \det(M) = -8$$

c) X cadrada de orde 2 e simétrica $\Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$$\text{rang}(X) = 1 \Rightarrow ac - b^2 = 0, \text{ e non todos nulos}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b & -a-2b \\ b+2c & -b-2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

temos así:

Exemplos de resposta / Solucións

$$\left. \begin{array}{l} a+2b=2 \\ b+2c=0 \\ ac-b^2=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=2 \\ b=0 \\ c=0 \end{array} \right\} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) a) Calculamos as ecuacións paramétricas de r :

$$\left. \begin{array}{l} x+y=-z+3 \\ 3x+5y=-3z+7 \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x=4-\lambda \\ y=-1 \\ z=\lambda \end{cases}$$

Por ser o plano e a recta perpendiculares:

$$\pi \perp r \Leftrightarrow \vec{n}_\pi \parallel \vec{v}_r = (-1, 0, 1)$$

Polo tanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pasa polo punto } P(2, -1, -2) \\ \vec{n}_\pi = (-1, 0, 1) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \pi: -1(x-2) + (z+2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\pi: x - z - 4 = 0}$$

b) Punto de corte da recta e o plano:

$$4 - \lambda - \lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{Q(4, -1, 0)}$$

Ángulo que forma π cos planos coordenados:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Plano } XY \equiv \alpha: z=0 \\ \pi: x-z-4=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\alpha, \pi) = \cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\pi) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\pi|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\pi\|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{(\alpha, \pi) = \pi/4}$$

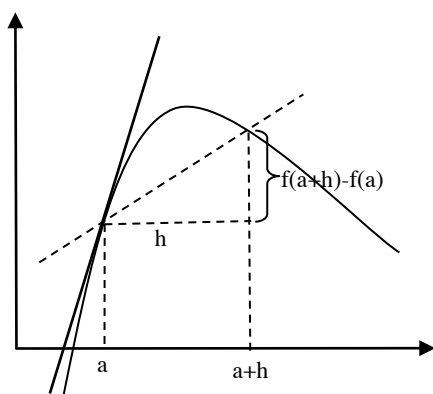
$$\left. \begin{array}{l} \text{Plano } YZ \equiv \beta: x=0 \\ \pi: x-z-4=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\beta, \pi) = \cos(\vec{n}_\beta, \vec{n}_\pi) = \frac{|\vec{n}_\beta \cdot \vec{n}_\pi|}{\|\vec{n}_\beta\| \cdot \|\vec{n}_\pi\|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{(\beta, \pi) = \pi/4}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Plano } XZ \equiv \gamma: y=0 \\ \pi: x-z-4=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\gamma, \pi) = \cos(\vec{n}_\gamma, \vec{n}_\pi) = \frac{|\vec{n}_\gamma \cdot \vec{n}_\pi|}{\|\vec{n}_\gamma\| \cdot \|\vec{n}_\pi\|} = 0 \Rightarrow \boxed{(\gamma, \pi) = \pi/2}$$

3) a) Dada a función $y = f(x)$, dise que $f(x)$ é derivable en $x = a$, se existe e é finito o límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

representase por $f'(a)$ e chámase derivada de $f(x)$ en $x = a$.



Interpretación xeométrica: o cociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

coincide coa pendente da recta secante que pasa por $(a, f(a))$ e $(a+h, f(a+h))$. A medida que vai diminuindo a amplitude do intervalo $[a, a+h]$, os puntos de corte determinados polas distintas secantes fanse máis e máis próximos. No límite, a secante convértese na tanxente.

Así: a derivada de $f(x)$, en $x = a$, coincide coa pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(a, f(a))$.

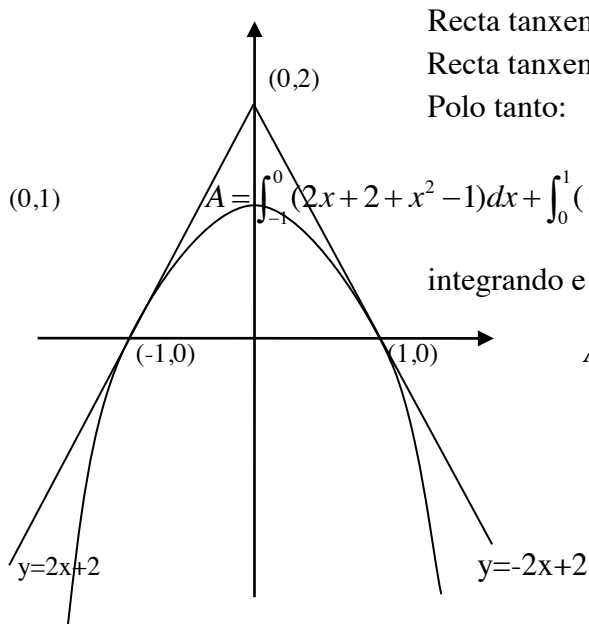
b) É unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos L'Hôpital

Exemplos de resposta / Solucións

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{\sin(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2 \sin x}{2x \cos(x^2)} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} + 2 \cos x}{2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2)} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

L'Hôpital

4) parábola: $y = -x^2 + 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{vértice: } (0,1) \\ \text{Puntos corte eixe } 0X: (-1,0), (1,0) \\ y' = -2x; \quad y'' = -2 < 0 \quad \text{cóncava} \end{array} \right.$



Recta tanxente en $(-1,0)$: $y = 2(x+1) \Leftrightarrow y = 2x + 2$

Recta tanxente en $(1,0)$: $y = -2(x-1) \Leftrightarrow y = -2x + 2$

Polo tanto:

$$A = \int_{-1}^0 (2x + 2 + x^2 - 1) dx + \int_0^1 (-2x + 2 + x^2 - 1) dx$$

integrando e aplicando a regra de Barrow

$$A = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{3} u^2}$$

OPCIÓN B

1) a) Matriz de coeficientes $(C) = \begin{pmatrix} m & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; Matriz ampliada $(A) = \begin{pmatrix} m & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & m \end{pmatrix}$

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\left. \begin{array}{l} |C| = 2m + 4 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 \\ m \neq -2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3 \end{cases}$$

Calculamos o rango da matriz ampliada:

$$m \neq -2, \quad 3 = \text{rang}(C) \leq \text{rang}(A) \leq 3 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

pero para $m = -2$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Así, $\text{rang}(A) = 3, \forall m$

Exemplos de resposta / Solucións

Discusión do sistema:

- $m = -2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A)$. Sistema incompatible. Non ten solución.
- $m \neq -2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3 = \text{rang}(A) = n^{\circ} \text{ incógnitas}$ Sistema compatible determinado.

Solución única.

b) Caso $m=0$. Queda un sistema homoxéneo e como estamos no caso dun sistema compatible determinado, a única solución é a trivial: $x = y = z = 0$

Caso $m=-1$. Tamén estamos no caso dun sistema compatible determinado e a solución única podémola obter por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{3}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{2} = 1$$

2) a) Determinamos un punto e un vector director de cada unha das rectas r e s :

$$P_r(3,0,-6); \quad \vec{v}_r = (-3,-4,0)$$

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = (12, 16, 20). \text{ Consideramos } \vec{v}_s = (3, 4, 5); \quad P_s(3,0,-1)$$

Podemos estudar a posición relativa utilizando rangos:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{As rectas córtanse ou crúzanse.}$$

$$\text{Pero como } \text{rang} \begin{pmatrix} \overrightarrow{P_r P_s} \\ \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -3 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 2, \text{ as rectas son secantes.}$$

Punto de corte:

$$4(3-3\lambda) + 12\lambda - 12 = 0$$

$$-20\lambda + 24 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow P(0, -4, -6)$$

O ángulo que forman as rectas podemos calculalo como:

$$\alpha = \angle(r, s) = \arccos \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{\|\vec{v}_r\| \cdot \|\vec{v}_s\|} = \arccos \frac{|-9 - 16|}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{9+16+25}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \pi/4$$

b) Como as rectas son secantes, están contidas nun plano:

$$(0, -4, -6) \in \pi \quad \left. \begin{matrix} \vec{v}_r, \vec{v}_s \text{ vectores de } \pi \end{matrix} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{cases} x = -3\lambda + 3\mu \\ y = -4 - 4\lambda + 4\mu \\ z = -6 + 5\mu \end{cases}$$

Exemplos de resposta / Solucións

3) $Dom(g) = \mathbb{R} - \{2\}$

Puntos de corte cos eixes:

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow g(x)=0 \\ g(x)=0 \Rightarrow x=0 \end{array} \right\} \Rightarrow (0,0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = +\infty \end{array} \right\} x=2 \text{ Asíntota vertical}$$

Non existen asíntotas horizontais pois $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$

Cálculo da asíntota oblicua:

$$\left. \begin{array}{l} m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-2)} = 1 \\ b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x-2} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y = x + 2$$

Cálculo dos puntos críticos:

$$g'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

Intervalos de crecemento e decrecemento:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
$g'(x)$	> 0	< 0	< 0	> 0
$g(x)$	crecent e	decrecent e	decrecent e	crecent e

$g(x)$ é crecente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(4, +\infty)$ e $g(x)$ é decrecente nos intervalos $(0, 2)$ e $(2, 4)$.

Calculamos a segunda derivada:

$$g''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

$$g''(0) = -1 < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo: } (0, 0)$$

$$g''(4) = 1 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo: } (4, 8)$$

$g''(x) \neq 0$ e polo tanto a función non ten puntos de inflexión.

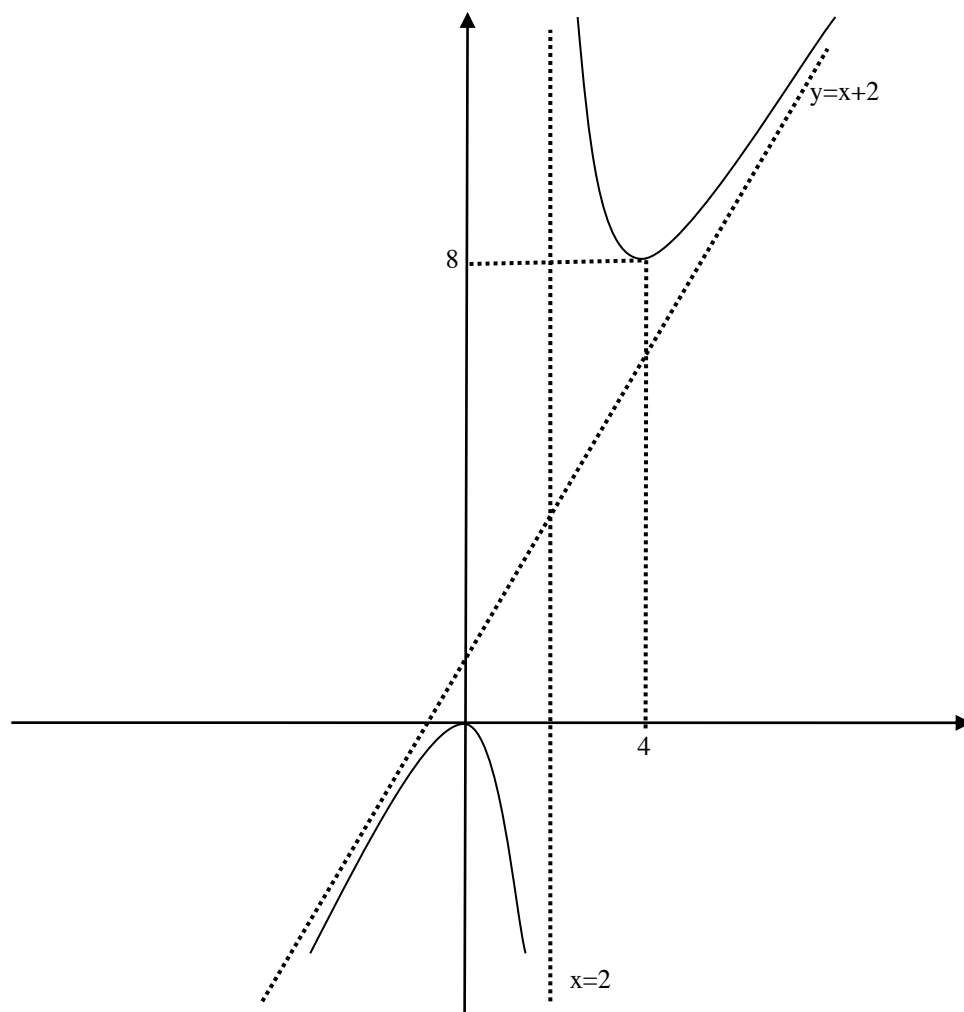
Intervalos de concavidade e convexidade:

x	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$g''(x)$	< 0	> 0
$g(x)$	cóncava	convexa

$g(x)$ é convexa no intervalo $(2, +\infty)$
e cóncava no intervalo $(-\infty, 2)$

Con todos estes datos, a gráfica de $g(x)$ será:

Exemplos de resposta / Solucións



4) a) Utilizamos o método de integración por partes:

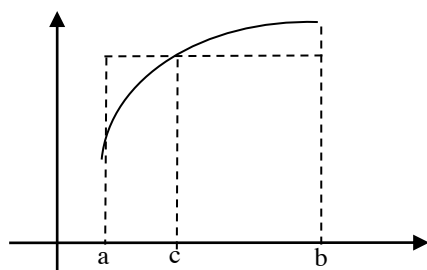
$$\left. \begin{array}{l} u = \ln(1+x^2) \Rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int x \ln(1+x^2) dx = \frac{x^2}{2} \ln(1+x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^2} dx$$

Como o grao do polinomio do numerador é maior que o grao do denominador, facemos a división dos polinomios. Así:

$$I = \frac{x^2}{2} \ln(1+x^2) - \int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \boxed{\frac{x^2}{2} \ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C}$$

b) Se $f(x)$ é unha función continua nun intervalo $[a, b]$, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$



Interpretación xeométrica: A área encerrada pola gráfica de unha función continua nun intervalo pechado, o eixo OX e as rectas $x=a$, $x=b$ é igual á área dun rectángulo de base $b-a$ e altura $f(c)$, sendo $f(c)$ o valor que toma a función nun punto intermedio c .

MATEMÁTICAS

(Responder só a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1. a) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$, calcula os rangos de AA^t e de A^tA , sendo A^t a matriz transposta de A . Para o valor $a = 1$, resolve a ecuación matricial $AA^tX = B$, sendo $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Sexa M unha matriz cadrada de orde 3 con $\det(M) = -1$ e que ademais verifica $M^3 + M + I = 0$, sendo I a matriz unidade de orde 3. Calcula os determinantes das matrices: $M + I$ e $3M + 3I$.

Opción 2. a) Resolve, se é posible, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 5 \\ 2x + y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

b) Calcula o valor de m , para que ao engadir ao sistema anterior a ecuación:

$$x + 2y - z = m$$

resulte un sistema compatible indeterminado.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1. Sexa r a recta que pasa polos puntos $P(0,8,3)$ e $Q(2,8,5)$ e s a recta

$$s: \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Estuda a posición relativa de r e s . Se se cortan, calcula o punto de corte.

b) Calcula a ecuación da recta que pasa por P e é perpendicular ao plano que contén a r e s .

Opción 2. Sexan π o plano que pasa polos puntos $A(1,-1,1)$, $B(2,3,2)$, $C(3,1,0)$ e r a recta dada por

$$r: \frac{x-7}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{2}$$

a) Calcula o ángulo que forman a recta r e o plano π . Calcula o punto de intersección de r e π .

b) Calcula os puntos da recta r que distan 6 unidades do plano π .

BLOQUE 3 (ANÁLISE) (Puntuación máxima 4 puntos)

Opción 1. a) Define función continua nun punto. ¿Qué tipo de descontinuidade presenta a función $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ en $x = 0$?

b) Calcula os intervalos de crecemento e decrecemento, os extremos relativos e os puntos de inflexión da función $g(x) = 2x^3 - 3x^2$.

c) Calcula a área do recinto limitado pola gráfica de $g(x) = 2x^3 - 3x^2$ e a recta $y = 2x$.

Opción 2. a) Enuncia e interpreta xeometricamente o teorema do valor medio do cálculo diferencial.

b) Calcula un punto da gráfica da función $g(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ no que a recta tanxente sexa paralela ao eixo OX; escribe a ecuación desa recta tanxente. Calcula as asíntotas, se as ten, de $g(x)$.

c) Calcula: $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$; (Nota: $\ln$ = logaritmo neperiano)

MATEMÁTICAS

(Responder só a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1. a) Estuda, segundo os valores de m o rango da matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & m & m+2 \\ m & 8 & 12 \end{pmatrix}$.

b) Resolve a ecuación matricial $A^2X = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Opción 2. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x - y - z &= 0 \\ x - 2y + 4z &= m \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = 0$.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1. Dados os planos $\pi_1 : x + y + z - 1 = 0$; $\pi_2 : y - z + 2 = 0$; e a recta $r : \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$

a) Calcula o ángulo que forman π_1 e π_2 . Calcula o ángulo que forman π_1 e r .

b) Estuda a posición relativa da recta r e a recta intersección dos planos π_1 e π_2 .

Opción 2. a) Calcula a ecuación da recta que pasa polo punto $P(2,3,5)$ e é perpendicular ao plano

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 2 + 3\lambda + \mu \end{cases}$$

a) Calcula a distancia do punto $P(2,3,5)$ ao plano π . Calcula o punto de π que está máis próximo ao punto $P(2,3,5)$.

BLOQUE 3 (ANÁLISE) (Puntuación máxima 4 puntos)

Opción 1. a) Enuncia e interpreta xeometricamente o teorema de Bolzano. Dada a función $f(x) = e^x + 3x \ln(1+x^2)$, xustifica se podemos asegurar que a súa gráfica corta ao eixo OX nalgún punto do intervalo $[-1, 0]$.

b) Calcula os valores de a e b para que a función $f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{se } x \leq 0 \\ \sin(2x)+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ sexa continua e derivable en $x = 0$.

c) Calcula a área do recinto limitado polo eixo OX e a parábola $y = \frac{x^2}{4} - x$.

Opción 2. a) Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x) = (1+x^2)e^{-x}$ no punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcula o dominio, as asíntotas, os intervalos de crecemento e decrecemento e os extremos relativos da función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.

c) Enuncia e interpreta xeometricamente o teorema do valor medio do cálculo integral.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

Bloque 1 (Álgebra lineal) (3 puntos)

OPCIÓN 1:

a) 2 puntos

0,5 puntos polo rango de AA^t

0,5 puntos polo rango de A^tA

1 punto polo cálculo da matriz X

b) 1 punto

0,5 puntos polo $\det(M + I)$

0,5 puntos polo $\det(3M + 3I)$

OPCIÓN 2:

a) 1,5 puntos

0,5 puntos por deducir que ten infinitas solucións

1 punto por obter as infinitas solucións

b) 1,5 puntos

0,5 puntos polo rango da matriz dos coeficientes

0,5 puntos por deducir que o rango da matriz ampliada ten que ser 2

0,5 puntos por obter o valor de m

Bloque 2 (Xeometría) (3 puntos)

OPCIÓN 1:

a) 1,5 puntos

1 punto polo estudo da posición relativa

0,5 puntos polo cálculo do punto de corte

b) 1,5 puntos

1 punto pola obtención do vector director da recta

0,5 puntos pola ecuación da recta

OPCIÓN 2:

a) 1,5 puntos

0,5 puntos pola ecuación do plano

0,5 puntos polo ángulo que forman a recta e o plano

0,5 puntos polo cálculo do punto de corte.

b) 1,5 puntos

0,75 puntos pola igualdade que expresa que un punto da recta dista 6 unidades do plano

0,75 puntos pola obtención dos dous puntos da recta que distan 6 unidades

Bloque 3 (Análise) (4 puntos)

OPCIÓN 1:

a) 1 punto

0,5 puntos pola definición de función continua nun punto

0,5 puntos polo tipo de descontinuidade

b) 1,5 puntos

0,75 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento

0,5 puntos polos extremos relativos (0,25 puntos por cada un)

0,25 puntos polo punto de inflexión

c) 1,5 puntos

0,75 puntos pola formulación do problema (expresión da área como suma de integrais definidas)

0,75 puntos polo cálculo da área (0,25 puntos pola integración e 0,5 puntos pola aplicación da regra de Barrow e obtención do resultado)

OPCIÓN 2:

a) 1 punto

0,5 puntos: enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial

0,5 puntos: interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial

b) 1,5 puntos

0,5 puntos polo cálculo do valor de x no que se anula a derivada de $g(x)$

0,5 puntos pola ecuación da recta tanxente

0,5 puntos polas asíntotas

c) 1,5 puntos

1 punto polo cálculo da integral indefinida

0,5 puntos pola aplicación da regra de Barrow e obtención do resultado

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL)

OPCIÓN 1:

a) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos por obter $m = 4$.

0,5 puntos por $\text{rang}(M) = 3$ se $m \neq 4$

0,5 puntos por $\text{rang}(M) = 1$ se $m = 4$.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos pola obtención de A^2 .

0,5 puntos polo cálculo de $(A^2)^{-1}$ ou pola formulación do sistema de ecuacións expresando X como unha matriz 2×1 .

0,5 puntos pola obtención da matriz X.

OPCIÓN 2:

a) 2 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos polo rango da matriz dos coeficientes.

0,5 puntos polo rango da matriz ampliada.

1 punto pola discusión do sistema:

- 0,5 puntos. Sistema Incompatible.
- 0,5 puntos. Sistema Compatible Indeterminado.

b) 1 punto pola resolución do sistema.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA)

OPCIÓN 1:

a) 1,5 puntos, distribuídos en

0,75 puntos polo ángulo que forman os planos.

0,75 puntos polo ángulo que forman o plano e a recta.

b) 1,5 puntos, distribuído en:

0,5 puntos polo cálculo do vector director da recta intersección dos planos ou pola expresión da recta como intersección de dous planos.

0,5 puntos polo paralelismo das rectas.

0,5 puntos, as rectas non son coincidentes.

OPCIÓN 2:

a) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos pola obtención do vector director da recta.

0,5 puntos pola ecuación da recta.

b) 2 puntos, distribuídos en:

1 punto pola distancia do punto ao plano.

1 punto pola obtención do punto do plano máis próximo ao punto dado.

BLOQUE 3 (ANÁLISE)

OPCIÓN 1:

a) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos polo enunciado do teorema de Bolzano.

0,5 puntos pola interpretación xeométrica do teorema de Bolzano.

0,5 puntos pola aplicación do teorema de Bolzano.

b) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos pola obtención de b (condición de continuidade).

0,5 puntos pola obtención de a (condición de derivable).

c) 1,5 puntos, distribuídos en:

1 punto pola formulación do problema.

0,5 puntos pola integración e aplicación de Barrow.

OPCIÓN 2:

a) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos pola derivada en $x=0$.

0,5 puntos pola ecuación da recta tanxente.

b) 2 puntos, distribuídos en:

1 punto polo dominio e asíntotas.

0,5 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento.

0,5 puntos polo máximo relativo.

c) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo integral.

0,5 puntos pola interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo integral.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1. a)

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a \\ a & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

$$|AA^t| = (1+a^2)^2 - a^2 = 1 + a^4 + a^2 > 0, \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{rang}(AA^t) = 2$$

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a & a \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |1+a^2 \ a| = 1 \neq 0 \\ |{}^tAA| = a^2(1+a^2) - a^2 - a^4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rang}({}^tAA) = 2$$

$$\boxed{a=1}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; |AA^t| = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists (AA^t)^{-1};$$

$$X = (AA^t)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $M^3 + M + I = 0 \Rightarrow M + I = -M^3$

$$\det(M + I) = \det(-M^3) = (-1)^3 \cdot (-1)^3 = 1$$

$$\det(3M + 3I) = \det(3(M + I)) = (3)^3 \cdot \det(M + I) = 3^3 \cdot 1 = 27$$

Opción 2. a) As infinitas solucións do sistema veñen dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 5 + z \\ 2x + y = 2 + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = t - 3 \\ y = 8 \\ z = t \end{array}}; t \in \mathbb{R}$$

b)

$$\text{Matriz de coeficientes } (C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{Matriz ampliada } (A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & m \end{pmatrix}$$

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} |C| = -1 - 4 - 2 + 1 + 4 + 2 = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

Para que sexa un sistema compatible indeterminado, terá que ser $\text{rang}(A) = 2$, xa que entón

$$\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2 < 3 = n^\circ \text{ de incógnitas}$$

Como $\text{rang}(A) \geq \text{rang}(C) = 2$, $\text{rang}(A) = 2 \Leftrightarrow \det(A) = 0$. Entón:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = m + 20 + 2 - 5 - 4 - 2m = -m + 13 \Rightarrow \boxed{m = 13}$$

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1. Determinamos un punto, un vector director e as ecuacións paramétricas de cada unha das rectas r e s :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (2, 0, 2) \\ P_r(0, 8, 3) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 8 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = -7 + 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_s(-7, 0, 0) \in s \\ \vec{v}_s = (2, 2, 1) \end{array} \right.$$

a)

$$\text{rang}(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{as rectas}$$

córtanse ou crúzanse, pero como

$$\text{rang}(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) = \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -7 & -8 & -3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{as}$$

rectas córtanse.

Calculamos o punto de corte:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2t - 8 + 7 = 0 \\ 8 - 6 - 4t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t = 1/2; \text{Punto de corte: } \boxed{(1, 8, 4)}$$

b) Un vector director da recta perpendicular ao plano que contén as rectas r e s é o vector

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4, 2, 4)$$

Polo tanto, as ecuacións paramétricas da recta pedida serán:

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = 8 + 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Opción 2. Calculamos a ecuación do plano π que pasa polos puntos dados:

Exemplos de resposta / Solucións

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -6(x-1) + 3(y+1) - 6(z-1) = 0$$

é dicir, $\pi \equiv 2x - y + 2z - 5 = 0$.

a) Vector normal ao plano π : $\vec{n}_\pi = (2, -1, 2)$. Vector director da recta r : $\vec{v}_r = (2, -1, 2)$. Como os dous vectores son proporcionais, podemos afirmar que a recta e o plano son perpendiculares.

Para calcular o punto de intersección da recta co plano, consideramos as ecuacións paramétricas da recta r :

$$r: \begin{cases} x = 7 + 2\lambda \\ y = -6 - \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases}$$

e substituímos na ecuación do plano:

$$2(7 + 2\lambda) - (-6 - \lambda) + 2(-3 + 2\lambda) - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

e polo tanto o punto de corte é: $(5, -5, -5)$.

b) A condición de que un punto $(7 + 2\lambda, -6 - \lambda, -3 + 2\lambda)$ da recta r diste 6 unidades do plano π , vén dada pola igualdade:

$$6 = \frac{|2(7 + 2\lambda) - (-6 - \lambda) + 2(-3 + 2\lambda) - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 4}}$$

de onde:

$$|9\lambda + 9| = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} 9\lambda + 9 = 18 \\ -9\lambda - 9 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

obtendo así os puntos da recta: $(9, -7, -1)$ e $(1, -3, -9)$.

BLOQUE 3 (ANÁLISE) (Puntuación máxima 4 puntos)

Opción 1. a) Unha función $f(x)$ dise continua en

$$x = x_0 \text{ se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

A función $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ non está definida en

$x = 0$, pero

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

polo tanto esta función presenta, en $x = 0$, unha discontinuidade evitable. Evítase esta discontinuidade definindo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$b) g(x) = 2x^3 - 3x^2$$

$$g'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Estudamos o signo de $g'(x)$ nos intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, \infty)$:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$g'(x)$	> 0	< 0	> 0
$g(x)$	crecente	decrecente	crecente

$x \in (-\infty, 0) \Rightarrow g'(x) > 0$. A función é crecente neste intervalo.

$x \in (0, 1) \Rightarrow g'(x) < 0$. A función é decrecente neste intervalo

$x \in (1, \infty) \Rightarrow g'(x) > 0$. A función é crecente neste intervalo.

Para os extremos relativos, estudamos o signo da segunda derivada nos valores que anulaban a primeira derivada

$$g''(x) = 12x - 6$$

$$g''(0) = -6 < 0; g''(1) = 6 > 0$$

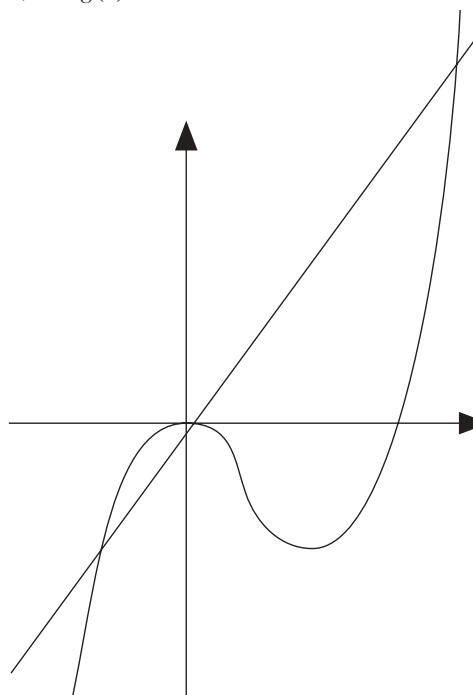
Polo tanto hai un máximo relativo no punto $(0, 0)$ e un mínimo relativo no punto $(1, -1)$.

Finalmente

$$\left. \begin{aligned} g''(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 1/2 \\ g'''(x) &= 12 \neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Punto de inflexión no}$$

punto $(1/2, -1/2)$.

c) Calculamos os puntos de intersección da recta $y = 2x$, con $g(x) = 2x^3 - 3x^2$



Exemplos de resposta / Solucións

$$x(2x^2 - 3x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

e polo tanto

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (2x^3 - 3x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (2x - 2x^3 + 3x^2) dx$$

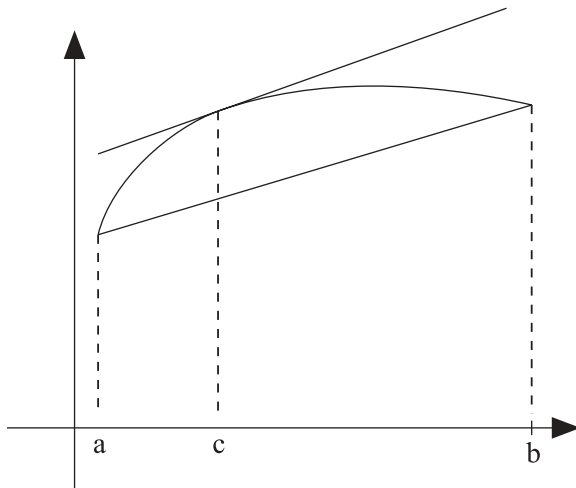
integrando e aplicando Barrow, resulta

$$A = \left[\frac{x^4}{2} - x^3 - x^2 \right]_{-\frac{1}{2}}^0 + \left[x^2 - \frac{x^4}{2} + x^3 \right]_0^2 = \frac{131}{32} u^2$$

Opción 2. a) Se $f(x)$ é unha función continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) , entón existe polo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación xeométrica:



Se $f(x)$ é unha función continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) , entón existe polo menos un punto intermedio c tal que a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(c, f(c))$ é paralela á corda que une os puntos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

b) As rectas paralelas ao eixo OX teñen pendente 0. Como a pendente da recta tanxente á gráfica dunha función coincide coa derivada da función nese punto, temos que encontrar os valores que anulan a derivada de $g(x)$.

$$g'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^{2x}(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3}$$

e tendo en conta que $e^x \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^x(1 - e^x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Así, a recta tanxente á gráfica de $g(x)$ no punto $(0, g(0))$ é paralela ao eixo OX e vén dada pola ecuación

$$y - g(0) = g'(0)(x - 0)$$

entón, como $g(0) = 1/4$, a ecuación da recta tanxente pedida será: $y = 1/4$.

Asíntotas verticais de $g(x)$:

$1 + e^x > 0 \Rightarrow$ Non existen asíntotas verticais

Asíntotas horizontais de $g(x)$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^x \cdot (1+e^x)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = 0$$

asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas de $g(x)$: Non hai.

c) É unha integral case inmediata

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+e^x} \right]_0^{\ln 5} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

tamén poderíamos resolvela facendo a substitución

$$t = 1 + e^x; dt = e^x dx$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1.

$$a) |M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & m & m+2 \\ m & 8 & 12 \end{vmatrix} = -m^2 + 8m - 16;$$

$$|M| = 0 \Leftrightarrow m = 4$$

Polo tanto:

$$\bullet m \neq 4 \Rightarrow \text{rang}(M) = 3$$

$$\bullet m = 4 \Rightarrow \text{rang}(M) = 1 \text{ (2ª fila} = 2 \times 1^\text{ª} \text{ fila, e 3ª fila} = 4 \times 1^\text{ª} \text{ fila)}$$

$$b) A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix};$$

Como $|A^2| = 4 \neq 0$, existe a matriz inversa de A^2 e temos: $A^2 X = B \Leftrightarrow X = (A^2)^{-1} \cdot B$

$$X = (A^2)^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A^2|} (\text{Adj}(A^2))^t \cdot B =$$

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Opción 2.

$$a) \text{ Matriz de coeficientes } (C) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{Matriz ampliada } (A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & m \end{pmatrix}$$

Calculamos os rangos da matriz de coeficientes e da matriz ampliada:

$$\left. \begin{aligned} |C| &= -4 - 4 + 1 + 1 - 2 + 8 = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} &= 1 \neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

$$\left. \begin{aligned} |A| &= m \\ \text{rang}(A) &\geq \text{rang}(C) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \\ m \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 \end{cases}$$

Discusión do sistema:

$$\bullet m = 0 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(A) < n^\circ \text{ incógnitas.}$$

Sistema compatible indeterminado, infinitas solucións.

$$\bullet m \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A).$$

Sistema incompatible. Non ten solución.

b) Caso $m = 0$. As infinitas solucións do sistema veñen dadas por:

$$\left. \begin{aligned} x - y &= -z \\ 2x - y &= z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1.

$$a) \text{ Vector normal ao plano } \pi_1: \vec{n}_{\pi_1} = (1, 1, 1).$$

$$\text{Vector normal ao plano } \pi_2: \vec{n}_{\pi_2} = (0, 1, -1).$$

$$\langle \vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2} \rangle = 0 \Rightarrow \pi_1 \text{ e } \pi_2 \text{ son perpendiculares.}$$

$$\text{Vector director da recta } r: \vec{v}_r = (-2, 1, 1)$$

$$\text{áng}(r, \pi_1) = \arcsen \frac{\langle \vec{v}_r, \vec{n}_{\pi_1} \rangle}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}_{\pi_1}|} = \arcsen \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = 0^\circ$$

b) Un vector director $\vec{v}_s$ da recta s é perpendicular aos vectores $\vec{n}_{\pi_1}$ e $\vec{n}_{\pi_2}$, polo tanto

$$\vec{v}_s = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 1)$$

$$\vec{v}_s = \vec{v}_r$$

$$\left. \begin{aligned} P_r &= (0, -1, 1) \in r \\ P_r &= (0, -1, 1) \notin s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{As rectas son paralelas.}$$

Opción 2.

a) Como a recta e o plano son perpendiculares, un vector director da recta é o vector normal ao plano:

$$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, 2)$$

Polo tanto, a recta pedida é:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-5}{2}$$

b) O punto $Q(-1, 2, 2) \in \pi$, e $\vec{n}_\pi = (-1, -2, 2)$ é un vector normal ao plano π . Polo tanto

$$\pi: x + 2y - 2z + 1 = 0$$

e aplicando a fórmula da distancia dun punto a un plano

$$d(P, \pi) = \frac{|2 + 6 - 10 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{1}{3} \text{ unidades}$$

Exemplos de resposta / Solucións

O punto de π máis próximo a P será o punto de intersección de π coa recta perpendicular a π pasando por P. Esta recta, xa obtida no apartado a), ten por ecuacións paramétricas

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$$

polo tanto, un punto xenérico desta recta vén dado por $(2-t, 3-2t, 5+2t)$ e substituíndo na ecuación de π

$$2-t+6-4t-10-4t+1=0 \Rightarrow 9t-1=0 \Rightarrow t=-1/9$$

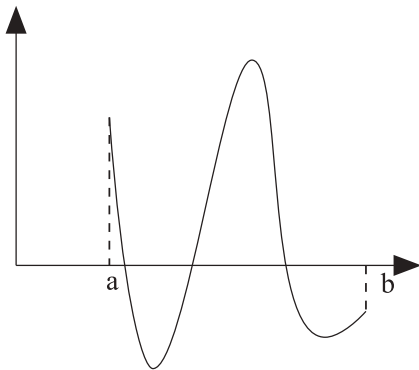
e polo tanto, o punto de π máis próximo a P é

$$Q(19/9, 29/9, 43/9)$$

BLOQUE 3 (ANÁLISE) (Puntuación máxima 4 puntos)

Opción 1. a) Teorema de Bolzano: se $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, é dicir $f(a)$ e $f(b)$ son de distinto signo, entón existe polo menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Interpretación xeométrica:



Se unha función continua nun intervalo pechado toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo, entón a función corta ao eixo OX polo menos nun punto.

$$\left. \begin{aligned} f(x) \text{ continua en } [-1,0] \\ f(-1) = \frac{1}{2} - 3\ln 2 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists c \in (-1,0) / f(c) = 0$$

b) Para que sexa continua en $x=0$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax+b) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin 2x + 1) = 1 \\ f(0) &= b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b=1}$$

para que tamén sexa derivable en $x=0$

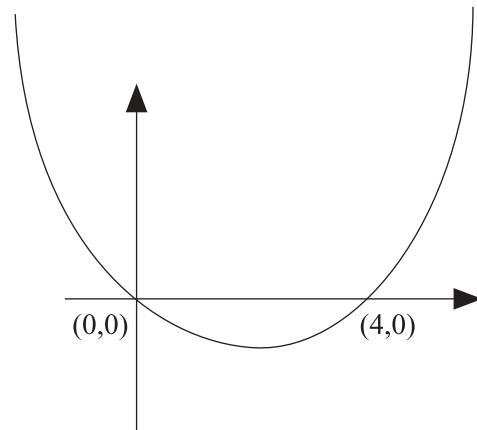
$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ah + 1 - 1}{h} = a$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2h + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2h}{h} = 2$$

de donde $\boxed{a=2}$

$$c) \frac{x^2}{4} - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Así, os puntos de corte da parábola co eixo OX son $(0,0)$ e $(4,0)$



$$\left. \begin{aligned} y' &= \frac{x}{2} - 1 \\ y' &= 0 \Rightarrow x = 2 \\ f(2) &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{vértice}(2, -1)$$

Como é a área dunha rexión situada por debaixo do eixo OX, a área será

$$A = -\int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} - x \right) dx = \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3} u^2$$

Opción 2. a) A ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x) = (1+x^2)e^{-x}$ no punto correspondente a $x=0$, vén dada por

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

e como

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = 2xe^{-x} - (1+x^2)e^{-x} \Rightarrow f'(0) = -1$$

a ecuación da recta tanxente pedida é: $\boxed{x + y = 1}$

b) Como é unha función racional, analizamos cando se anula o denominador

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

e polo tanto $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$\text{Asíntotas verticais: } \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Asíntotas horizontais:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ é unha asíntota horizontal}$$

Exemplos de resposta / Solucións

Non hai asíntotas oblicuas.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Estudamos o signo de $f'(x)$ nos intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, \infty)$

$x \in (-\infty, -1) \Rightarrow f'(x) > 0$. A función é crecente neste intervalo.

$x \in (-1, 0) \Rightarrow f'(x) > 0$. A función é crecente neste intervalo

$x \in (0, 1) \Rightarrow f'(x) < 0$. A función é decrecente neste intervalo

$x \in (1, \infty) \Rightarrow f'(x) < 0$. A función é decrecente neste intervalo.

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	> 0	> 0	< 0	< 0
$f(x)$	crecente	crecente	decrecente	decrecente

Para os extremos relativos, estudamos o signo da segunda derivada nos valores que anulaban a primeira derivada

$$f''(x) = \frac{-2(x^2-1)^2 + 8x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

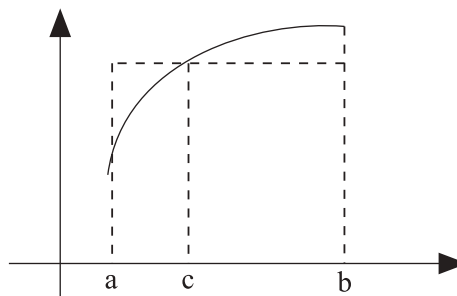
$$f''(0) = -2 < 0$$

Polo tanto hai un máximo relativo no punto $(0, 0)$.

c) Se $f(x)$ é unha función continua nun intervalo $[a, b]$, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

Interpretación xeométrica:



A área encerrada pola gráfica dunha función continua nun intervalo pechado, o eixo OX e as rectas $x = a$, $x = b$ é igual á área dun rectángulo de base $b - a$ e altura $f(c)$, o valor que toma a función nun punto intermedio c .

MATEMÁTICAS

(Responder só a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Calcula os valores de m para os que A ten inversa.
b) Para $m=1$, calcula a matriz X que verifica: $X \cdot A + X - 2A = 0$.

Opción 2. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= m \\ x - 2y + z &= 2 \\ 3x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

- b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = -1$.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1. a) Sexan $\vec{u}$, $\vec{v}$ dous vectores tales que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$, $|\vec{u} - \vec{v}| = 5$. Calcula o ángulo que forman os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Calcula o produto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}]$, sendo $\vec{u} \times \vec{v}$ o produto vectorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

b) Dadas as rectas $r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$; $s: \begin{cases} x = 1 + 6\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$

estuda a súa posición relativa e calcula a ecuación do plano que pasa polo punto $P(1,1,1)$ e contén a r .

Opción 2. a) ¿Son coplanares os puntos $A(1,0,0)$, $B(3,1,0)$, $C(1,1,1)$ e $D(3,0,-1)$? En caso afirmativo, calcula a distancia da orixe de coordenadas ao plano que os contén.

- b) Calcula o punto simétrico do punto $P(0,0,1)$ respecto do plano $\pi: x - 2y + 2z - 1 = 0$.

BLOQUE 3 (ANÁLISE) (Puntuación máxima 4 puntos)

Opción 1. a) Definición e interpretación xeométrica da derivada dunha función nun punto.

b) Calcula os valores de a e b para que a función $f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{se } x < -1 \\ x^2 - 4x & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$ sexa continua e derivable en $x = -1$.

- c) Calcula a área do recinto limitado polas parábolas $y = x^2 - 4x$; $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$.

Opción 2. a) Enunciado do teorema de Weierstrass. Se unha función $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e é estritamente decrecente nese intervalo, ¿onde alcanza a función o máximo e o mínimo absoluto?

b) Calcula o valor de m para que: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2 - 1 + \cos x}{\sin(x^2)} = 0$

c) Calcula $\int \frac{x+5}{x^2+4x+3} dx$.

MATEMÁTICAS

(Responder só a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1. a) Estuda, segundo os valores de m , o rango da matriz $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -m \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -m & m \end{pmatrix}$

b) Para o valor $m = 1$, resolve a ecuación matricial $MX = 3A^t$, sendo $A = (1 \ 0 \ 1)$ e $A^t =$ matriz transposta de A . Para este valor de m , ¿canto valerá o determinante da matriz $2M^{21}$?

Opción 2. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} 3x - y - 3z &= m \\ x + y - z &= 1 \\ mx + 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = 0$.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1. a) Calcula a distancia da orixe de coordenadas ao plano que pasa polo punto $P(1,1,2)$ e é perpendicular á recta $r: \begin{cases} 4x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

b) Calcula a área do triángulo que ten por vértices os puntos de intersección do plano $\pi: x - 2y + 2z - 3 = 0$ cos eixos de coordenadas. ¿É un triángulo rectángulo?

Opción 2. a) Dados os planos $\pi_1: x - 2y + 2z - 1 = 0$; $\pi_2: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda - 2\mu \\ z = 1 + \lambda - 3\mu \end{cases}$

estuda a súa posición relativa e calcula a distancia entre eles.

b) Dado o punto $P(2,1,7)$, calcula o seu simétrico respecto ao plano π_2 .

BLOQUE 3 (ANÁLISE) (Puntuación máxima 4 puntos)

Opción 1. a) Enunciado e interpretación xeométrica do teorema de Rolle.

b) Sexa $f(x) = e^x (2x - 1)$. Calcula os intervalos de crecemento e decrecemento e a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto de abscisa $x = 0$.

c) Calcula: $\int_0^1 e^x (2x - 1) dx$

Opción 2. a) Calcula a, b, c , para que $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{se } x \leq 0 \\ x + \ln(1 + x^2) & \text{se } x > 0 \end{cases}$

sexa continua e derivable en $\mathbb{R}$ e teña un extremo relativo en $x = -2$. (Nota: $\ln =$ logaritmo neperiano)

b) Sexa $g(x) = x(x - 1)$, $0 \leq x \leq 2$. Razoa se $g(x)$ ten máximo e mínimo absolutos no intervalo $[0,2]$. En caso afirmativo, calcúlaos.

c) Definición de primitiva dunha función. Enunciado da regra de Barrow.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL)

Opción 1

a) 1 punto

b) 2 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos por despexar X

1 punto polo cálculo de $(A+I)^{-1}$

0,5 puntos polos cálculos de $2A$ e $2A \cdot (A+I)^{-1}$

Opción 2

a) 2 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos pola obtención do rango da matriz dos coeficientes

0,5 puntos polo rango da matriz ampliada

0,5 puntos. Sistema Incompatible

0,5 puntos. Sistema Compatible Indeterminado

b) 1 punto, pola resolución do sistema

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA)

Opción 1

a) 1 punto, distribuído en

0,5 puntos por obter que os vectores son perpendiculares

0,5 puntos polo cálculo do produto mixto

b) 2 puntos, distribuídos en:

1 punto polo estudo da posición relativa das rectas

1 punto pola obtención da ecuación do plano.

Opción 2

a) 1,5 puntos, distribuídos en

0,5 puntos por probar que os puntos son coplanarios.

1 punto polo cálculo da distancia da orixe ao plano

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos pola obtención da recta perpendicular ao plano

0,5 puntos polo punto de intersección da recta co plano

0,5 puntos polo cálculo do punto simétrico

BLOQUE 3 (ANÁLISE)

Opción 1

a) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos pola definición da derivada dunha función nun punto.

0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) 1,5 puntos, distribuído en:

0,75 puntos pola continuidade

0,75 puntos pola derivabilidade

c) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,75 puntos pola formulación do problema

0,75 puntos polo cálculo da integral definida.

Opción 2

a) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos polo enunciado do teorema de Weierstrass

0,5 puntos pola cuestión relativa ao máximo e ao mínimo da función.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

1 punto pola aplicación da regra de L'Hôpital

0,5 puntos pola obtención de m

c) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos pola descomposición en fraccións simples.

1 punto pola integración

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL)

Opción 1

a) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos por $\text{rang}(M) = 3$ se $m \neq 0$.

0,5 puntos por $\text{rang}(M) = 1$ se $m = 0$.

b) 2 puntos, distribuídos en:

1,5 puntos pola obtención de X.

0,5 puntos polo cálculo do determinante da matriz $2M^{21}$.

Opción 2

a) 2 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos polo rango da matriz dos coeficientes

0,5 puntos polo rango da matriz ampliada

1 punto pola discusión do sistema:

0,5 puntos. Sistema Incompatible

0,5 puntos. Sistema Compatible Determinado

b) 1 punto, pola resolución do sistema

Criterios de Avaliación / Corrección

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA)

Opción 1

a) **1,5 puntos**, distribuídos en

0,5 puntos pola obtención do vector normal ao plano

0,5 puntos pola obtención do plano

0,5 puntos polo cálculo da distancia

b) **1,5 puntos**, distribuídos en:

0,5 puntos polo cálculo dos vértices

0,5 puntos polo cálculo da área

0,5 puntos por ver que non é rectángulo.

Opción 2

a) **1,5 puntos**, distribuídos en

1 punto polo estudo da posición relativa.

0,5 puntos polo cálculo da distancia entre os planos.

b) **1,5 puntos**, distribuídos en:

0,5 puntos pola obtención da recta perpendicular ao plano

0,5 puntos polo punto de intersección da recta co plano

0,5 puntos polo cálculo do punto simétrico

BLOQUE 3 (ANÁLISE)

Opción 1

a) **1 punto**, distribuído en:

0,5 puntos polo enunciado do teorema de Rolle.

0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) **1,5 puntos**, distribuídos en:

1 punto polo cálculo dos intervalos de crecemento e decrecemento.

0,5 puntos pola obtención da recta tanxente.

c) **1,5 puntos**, distribuídos en

1 punto pola integración por partes

0,5 puntos pola aplicación de Barrow.

Opción 2

a) **1,5 puntos**, distribuídos en:

0,5 puntos pola obtención de c (condición de continuidade)

0,5 puntos pola obtención de b (condición de derivable).

0,5 puntos pola obtención de a (condición de extremo relativo).

b) **1,5 puntos**, distribuídos en:

0,50 puntos polo razoamento

0,50 puntos polo máximo absoluto

0,50 puntos polo mínimo absoluto

c) **1 punto**, distribuído en

0,5 puntos pola definición de primitiva.

0,5 puntos pola regra de Barrow.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1.

a) A ten inversa $\Leftrightarrow |A| \neq 0$. Calculamos polo tanto o determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = m^2 - 2m = m(m-2)$$

así, A ten inversa para os valores de m distintos de 0 e 2: $\exists A^{-1} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$ **(1 punto)**

b) $\boxed{m=1}$: $XA + X = 2A \Leftrightarrow X(A+I) = 2A$. Para poder despxar X estudamos se a matriz $A+I$ ten inversa

$$|A+I| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1+1-1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists (A+I)^{-1}$$

entón, $X = 2A(A+I)^{-1}$. **(0,5 puntos)**

Calculamos $(A+I)^{-1}$:

$$(A+I)^{-1} = \frac{1}{|A+I|} (Adj(A+I))^t = - \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 punto)}$$

e así:

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(0,5 puntos)

Opción 2. a)

$$\text{Matriz de coeficientes } (C) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz ampliada } (A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & m \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} &= -7 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2 \\ |C| &= -8+1+9+6-2-6=0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

(0,5 puntos)

Calculamos o rango da matriz ampliada, orlando o menor de orde 2 non nulo anterior coa columna dos termos independentes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & m \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4+m+18+6m-4-3=7m+7=7(m+1)$$

Polo tanto

$$m \neq -1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

$$m = -1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

(0,5 puntos)

Discusión:

$m \neq -1$, $\text{rang}(C) = 2 \neq 3 = \text{rang}(A)$, sistema incompatible, non ten solución **(0,5 puntos)**

$m = -1$, $\text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(A) < 3 = n^\circ \text{ incógnitas}$, sistema compatible indeterminado, infinitas solucións. **(0,5 puntos)**

b) $\boxed{m=1}$: estamos no caso dun sistema compatible indeterminado. Un sistema equivalente ao dado é:

$$2x + 3y = -1 - z$$

$$x - 2y = 2 - z$$

polo tanto

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1-z & 3 \\ 2-z & -2 \end{vmatrix}}{-7} = -\frac{5}{7}z + \frac{4}{7}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1-z \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{-7} = \frac{1}{7}z - \frac{5}{7}$$

e as infinitas solucións son:

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{7}\lambda + \frac{4}{7} \\ y = \frac{1}{7}\lambda - \frac{5}{7}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \textbf{(1 punto)}$$

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1. a)

$$\left. \begin{aligned} |\vec{u}| &= 3 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = 9 \\ |\vec{v}| &= 4 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{v} = 16 \\ |\vec{u}-\vec{v}| &= 5 \Leftrightarrow 25 = (u-v) \cdot (u-v) = u \cdot u + v \cdot v - 2u \cdot v \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$25 = 9 + 16 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

O produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é nulo e polo tanto son dous vectores perpendiculares. **(0,5 puntos)**

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}] = [\vec{u} \times \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = |\vec{u} \times \vec{v}|^2 =$$

$$|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \text{sen}^2(\vec{u}, \vec{v}) = 9 \cdot 16 \cdot 1 = 144 \quad \textbf{(0,5 puntos)}$$

b) A partir das ecuacións das rectas podemos comparar os seus vectores directores:

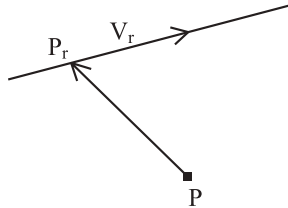
$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_r &= (3, 2, -2) \\ \vec{v}_s &= (6, 4, -4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \text{ e } \vec{v}_s \text{ son paralelos} \Rightarrow \text{as rectas}$$

son paralelas ou coincidentes.

Exemplos de resposta / Solucións

Pero o punto $P_r(3,1,-1) \in r$ e $P_r(3,1,-1) \notin s$. Polo tanto as rectas son paralelas non coincidentes **(1 punto)**

As coordenadas do punto $P(1,1,1)$ non cumpren as ecuacións da recta r , e polo tanto $P(1,1,1) \notin r$.



O plano pedido quedará determinado por:

$P(1,1,1)$, punto exterior a r ;

$\vec{v}_r = (3,2,-2)$, vector director de r

$\vec{PP}_r = (2,0,-2)$

Así, a ecuación xeral do plano será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \text{ e desenvolvendo o determinante}$$

$$\text{obtense } 2x - y + 2z - 3 = 0 \quad \textbf{(1 punto)}$$

Opción 2. a)

$\vec{AB} = (2,1,0)$
 $\vec{AC} = (0,1,1)$ } son dous vectores non nulos e non

proporcionais; polo tanto, o punto A e os vectores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ determinan un plano π que será o plano que contén aos puntos A, B e C :

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \pi: x - 2y + 2z - 1 = 0$$

Como as coordenadas do punto D verifican a ecuación anterior, os puntos son coplanares. **(0,5 puntos)**

A ecuación do plano que os contén é:

$$\pi: x - 2y + 2z - 1 = 0$$

A distancia da orixe $O(0,0,0)$ ao plano π será:

$$d(O, \pi) = \frac{|-1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{3} \quad \textbf{(1 punto)}$$

b) Sexa r a recta perpendicular a π pasando por $P(0,0,1)$, entón r ten como vector director

$\vec{v}_r =$ vector normal a $\pi = (1, -2, 2)$; polo tanto, as ecuacións paramétricas de r son:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases} \quad \textbf{(0,5 puntos)}$$

Substituíndo na ecuación de π , calculamos a intersección de r con π

$$\lambda + 4\lambda + 2 + 4\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1/9$$

e así, o punto de intersección da recta co plano é $M(-1/9, 2/9, 7/9)$ **(0,5 puntos)**

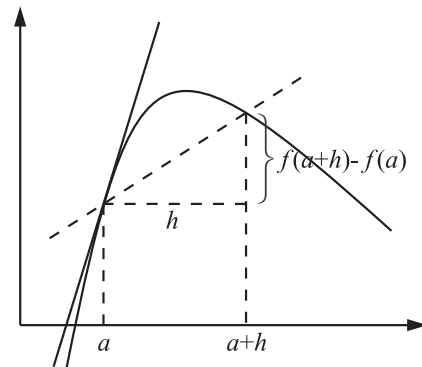
Como $M(-1/9, 2/9, 7/9)$ é o punto medio de $P(0,0,1)$ e o seu simétrico $P'(x,y,z)$, entón

$$\begin{cases} -1/9 = x/2 \\ 2/9 = y/2 \\ 7/9 = z+1/2 \end{cases} \Rightarrow P'(-2/9, 4/9, 5/9) \quad \textbf{(0,5 puntos)}$$

BLOQUE 3 (ANÁLISE) (Puntuación máxima 4 puntos)

Opción 1. a) Dada a función $y = f(x)$, dise que $f(x)$ é derivable en $x=a$, se existe e é finito o límite:

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ represéntase por $f'(a)$ e chámase derivada de $f(a)$ en $x=a$. **(0,5 puntos)**



Interpretación xeométrica: o cociente $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

coincide coa pendente da recta secante que pasa por $(a, f(a))$ e $(a+h, f(a+h))$. A medida que vai diminuíndo a amplitude do intervalo $[a, a+h]$, os puntos de corte determinados polas distintas secantes fanse máis e máis próximos. No límite, a secante convértese na tanxente.

Así: a derivada de $f(x)$, en $x=a$, coincide coa pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(a, f(a))$.

(0,5 puntos)

b)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax + b) = -a + b \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 4x) = 5 \end{cases} \Rightarrow -a + b = 5, \text{ para}$$

que sexa continua en $x = -1$ **(0,75 puntos)**

Para ser derivable en $x = -1$ ten que ser continua nese punto, polo tanto $-a + b = 5$ e ademais,

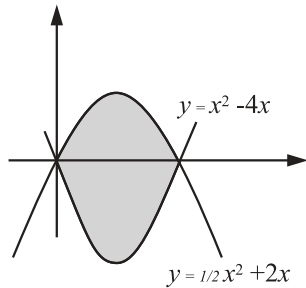
$$\left. \begin{aligned} f'(-1^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\cancel{1} + ah + \cancel{b} - \cancel{b}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ah}{h} = a \\ f'(-1^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{1} - 2h + h^2 + \cancel{4} - 4h - \cancel{b}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (-6 + h) = -6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -6 \Rightarrow b = -1 \quad \textbf{(0,75 puntos)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

c)
$$y = x^2 - 4x \begin{cases} \text{puntos de corte cos eixos: } (0,0), (4,0) \\ y' = 2x - 4; y' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ y'' = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{mínimo } (2, -4)$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \begin{cases} \text{puntos de corte cos eixos: } (0,0), (4,0) \\ y' = -x + 2; y' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ y'' = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{máximo } (2, 2)$$

Puntos de corte das parábolas:



$$x^2 - 4x = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Polo tanto a área da rexión limitada polas parábolas estará dada pola integral definida

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - x^2 + 4x \right) dx \quad (0,75 \text{ puntos})$$

Calculamos agora a integral anterior:

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - x^2 + 4x \right) dx = \int_0^4 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x \right) dx =$$

$$\left[-\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 \right]_0^4 = -32 + 48 = 16u^2 \quad (0,75 \text{ puntos})$$

Opción 2. a) Teorema de Weierstrass: Se unha función $f(x)$ é continua nun intervalo pechado $[a,b]$, a función alcanza nese intervalo o máximo e o mínimo absolutos. (0,5 puntos)

Por ser $f(x)$ continua en $[a,b]$, polo teorema anterior alcanza nese intervalo o máximo e o mínimo absolutos. Entón, como por hipótese a función é estritamente decrecente

$a < x \leq b \Rightarrow f(a) > f(x) \Rightarrow f(x)$ alcanza o máximo absoluto en $x = a$

$a \leq x < b \Rightarrow f(b) < f(x) \Rightarrow f(x)$ alcanza o mínimo absoluto en $x = b$ (0,5 puntos)

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2 - 1 + \cos x}{\sin(x^2)}$ é unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$. Utilizamos a regra de L'Hôpital dúas veces xa que despois de utilizala a primeira vez segue sendo unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2 - 1 + \cos x}{\sin(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2mx - \sin x}{2x \cdot \cos(x^2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2m - \cos x}{2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2)} = \frac{2m - 1}{2} \quad (1 \text{ punto})$$

entón $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2 - 1 + \cos x}{\sin(x^2)} = 0 \Leftrightarrow 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

(0,5 puntos)

c) Factorizamos o denominador $x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases} \text{ (raíces simples)}$$

descompoñemos o integrando en fraccións

$$\frac{x+5}{x^2+4x+3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$

e calculamos A e B

$$x = -1 \Rightarrow 4 = 2A \Rightarrow A = 2$$

$$x = -3 \Rightarrow 2 = -2B \Rightarrow B = -1 \quad (0,5 \text{ puntos})$$

polo tanto

$$\int \frac{x+5}{x^2+4x+3} dx = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx =$$

$$= 2 \ln |x+1| - \ln |x+3| + C \quad (1 \text{ punto})$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1.

a) $|M| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -m \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -m & m \end{vmatrix} = -m^2$; $|M| = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Polo tanto: $m \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(M) = 3$ (0,5 puntos)

$m = 0 \Rightarrow \text{rang}(M) = 1$

(2ª e 3ª columnas son de ceros) (0,5 puntos)

b) $\boxed{m = 1}$

M matriz cadrada de orde 3 $\left. \begin{matrix} \\ A' \text{ matriz columna de orde } 3 \times 1 \\ \text{columna de orde } 3 \times 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow X$ é unha matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x - z = 3 \\ -x = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1,5 puntos)

$$m = 1 \Rightarrow \det(M) = -1.$$

Exemplos de resposta / Solucións

$$\det(M^{21}) = (-1)^{21} = -1 \Rightarrow \det(2M^{21}) = 2^3 \cdot (-1) = -8$$

(0,5 puntos)

Opción 2.

a) Cálculo do rango da matriz C dos coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 9 + m + 3m + 9 + 2 = 4m + 8$$

Polo tanto:

$$m \neq -2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3$$

$$m = -2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 \quad \textbf{(0,5 puntos)}$$

Cálculo do rango da matriz ampliada A (polo anterior xa podemos dicir que ten rango 3 se $m \neq 2$), para $m = 2$ temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 9 + 6 - 2 - 4 - 9 + 3 = 3 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{rang}(A) = 3 \quad \textbf{(0,5 puntos)}$$

Discusión do sistema:

$m = -2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A)$. Sistema incompatible, non ten solución. **(0,5 puntos)**

$m \neq -2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3 = \text{rang}(A) = n^\circ \text{ incógnitas}$. Sistema compatible determinado, solución única. **(0,5 puntos)**

b) $m = 0$ Estamos no caso de sistema compatible determinado, solución única. Resolvémolo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{8} = \frac{5}{8}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{8} = \frac{3}{4};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{8} = \frac{3}{8} \quad \textbf{(1 punto)}$$

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1.

a) Poñendo $z = \lambda$, obtemos as ecuacións paramétricas da recta r :

$$\begin{cases} x = \lambda/2 \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Polo tanto, $\vec{v} = (1/2, -1, 1)$ = vector director da recta r = vector normal aos planos perpendiculares a r .

Entón o plano π perpendicular a r pasando polo punto $P(1, 1, 2)$ será:

$$1/2(x-1) - (y-1) + (z-2) = 0; \text{ é dicir}$$

$$\pi : x - 2y + 2z - 3 = 0 \quad \textbf{(1 punto)}$$

e a distancia da orixe $O(0,0,0)$ ao plano π será:

$$d(O, \pi) = \frac{|-3|}{\sqrt{1+4+4}} = 1 \quad \textbf{(0,5 puntos)}$$

b) Intersecando o plano cos eixes de coordenadas obtemos as coordenadas dos vértices do triángulo:

$$A(3, 0, 0); B(0, -3/2, 0); C(0, 0, 3/2) \quad \textbf{(0,5 puntos)}$$

Polo tanto $\vec{AB} = (-3, -3/2, 0); \vec{AC} = (-3, 0, 3/2);$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3/2 & 0 \\ -3 & 0 & 3/2 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4}\vec{i} + \frac{9}{2}\vec{j} - \frac{9}{2}\vec{k}$$

$$\text{Área } \triangle ABC = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{81}{16} + \frac{81}{4} + \frac{81}{4}} = 27/8 u^2$$

(0,5 puntos)

Ademais, como os produtos escalares

$$\left. \begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &\neq 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{BC} &\neq 0 \\ \vec{AC} \cdot \vec{BC} &\neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Non hai dous lados perpendiculares}$$

e polo tanto o triángulo non é rectángulo. **(0,5 puntos)**

Opción 2.

a) Das ecuacións paramétricas do plano π_2 dedúcese que un punto deste plano é $(3, 0, 1)$ e dous vectores do plano son $(2, 2, 1)$ e $(2, -2, -3)$. Podemos entón obter a ecuación xeral deste plano:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0; -4(x-3) + 8y - 8(z-1) = 0;$$

$$\pi_2 : x - 2y + 2z - 5 = 0$$

Polo tanto, comparando os coeficientes das ecuacións xerais dos dous planos, temos:

$$\frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} = \frac{2}{2} \neq \frac{-5}{-1} \Rightarrow \text{Os planos son paralelos e}$$

distintos. **(1 punto)**

A distancia entre π_1 e π_2 será

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|-5 - (-1)|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{4}{3} \quad \textbf{(0,5 puntos)}$$

b) Para obter as ecuacións paramétricas da recta r perpendicular a π_2 pasando por $P(2, 1, 7)$, basta ter en conta que o vector $(1, -2, 2)$ normal a π_2 é un vector director de r . Polo tanto:

Exemplos de resposta / Solucións

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases} \quad (0,5 \text{ puntos})$$

Substituíndo na ecuación de π_2 , calculamos a intersección de r con π_2

$$2 + \lambda - 2(1 - 2\lambda) + 2(7 + 2\lambda) - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

e así, o punto de intersección de r con π_2 é $M(1,3,5)$ **(0,5 puntos)**

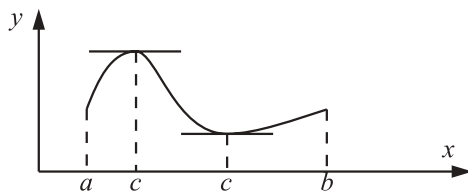
Como $M(1,3,5)$ é o punto medio de $P(2,1,7)$ e o seu simétrico $P'(x,y,z)$, entón

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \frac{x+2}{2} \\ 3 &= \frac{y+1}{2} \\ 5 &= \frac{z+7}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P'(0,5,3) \quad (0,5 \text{ puntos})$$

BLOQUE 3 (ANÁLISE) (Puntuación máxima 4 puntos)

Opción 1.

a) Teorema de Rolle: sexa $f(x)$ unha función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) e con $f(a) = f(b)$. Entón, existe algún punto $c \in (a,b)$ no que a derivada da función se anula, $f'(c) = 0$. **(0,5 puntos)**



Interpretación xeométrica:

Baixo as hipóteses do teorema de Rolle, podemos garantir a existencia de polo menos un punto c en (a,b) tal que a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ en $(c, f(c))$ é paralela ao eixe OX. **(0,5 puntos)**

$$b) f(x) = e^x (2x - 1)$$

$$f'(x) = e^x (2x - 1) + 2e^x = e^x (2x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1/2 \quad (\text{a función exponencial non se anula en ningún punto})$$

Estudamos o signo de $f'(x)$ nos intervalos $(-\infty, -1/2)$ e $(-1/2, \infty)$: **(1 punto)**

$x \in (-\infty, -1/2) \Rightarrow f'(x) < 0$. A función é decrecente neste intervalo.

$x \in (-1/2, \infty) \Rightarrow f'(x) > 0$. A función é crecente neste intervalo.

x	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, \infty)$
$f'(x)$	< 0	> 0
$f(x)$	decrecente	crecente

A ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(0, f(0))$ está dada por: $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$. Entón, como $f(0) = -1$, e $f'(0) = 1$, a ecuación da recta tanxente pedida é: $y = x - 1$ **(0,5 puntos)**

c) Calculamos a integral indefinida polo método de integración por partes:

$$\int e^x (2x - 1) dx = e^x (2x - 1) - \int 2e^x dx = e^x (2x - 3) + C$$

$$u = 2x - 1 \Rightarrow du = 2dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \quad (1 \text{ punto})$$

e aplicando a regra de Barrow

$$\int_0^1 e^x (2x - 1) dx = [e^x (2x - 3)]_0^1 = e(-1) - (-3) = 3 - e \quad (0,5 \text{ puntos})$$

Opción 2.

a)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= c \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 0 \\ f(0) &= c \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = 0, \text{ para que sexa continua en } x = 0$$

$$x = 0 \quad (0,5 \text{ puntos})$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^2 + bx}{x} = b \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln(1 + x^2)}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{1 + x^2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = 1,$$

para que sexa derivable en $x = 0$ **(0,5 puntos)**

Finalmente, analizamos a condición de extremo relativo:

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 2ax + 1, \text{ se } x < 0 \\ f'(-2) &= -4a + 1 \\ f'(-2) &= 0, \text{ por ser un extremo relativo} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 1/4$$

(0,5 puntos)

b) $g(x) = x^2 - x$ é continua no intervalo pechado $[0,2]$ xa que é unha función polinómica. Polo teorema de Weierstrass, $g(x)$ alcanza en $[0,2]$ o máximo e o mínimo absolutos. **(0,5 puntos)**

$$\left. \begin{aligned} g'(x) &= 2x - 1 \\ g'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 1/2 \\ g''(x) &= 2 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{mínimo relativo en } (1/2, -1/4)$$

Como nos extremos do intervalo $g(0)=0$; $g(2)=2$ entón, $g(x)$ alcanza o mínimo absoluto en $x = 1/2$

(0,5 puntos)

e alcanza o máximo absoluto en $x = 2$. **(0,5 puntos)**

c) Dada unha función $f(x)$, dise que a función $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$ **(0,5 puntos)**

Regra de Barrow: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a,b]$ e $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$, entón cúmprese que $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. **(0,5 puntos)**

MATEMÁTICAS

(Responder só a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1. a) Sexan F_1, F_2, F_3 as filas primeira, segunda e terceira, respectivamente, dunha matriz cadrada M de orde 3, con $\det(M) = -2$. Calcula o valor do determinante da matriz que ten por filas $F_1 - F_2, 2F_1, F_2 + F_3$.

b) Dada a matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, acha dúas matrices X e Y que verifiquen:

$$X + Y^{-1} = C$$

$$X - Y^{-1} = C^t$$

sendo C^t a matriz traspuesta de C .

Opción 2. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$mx + y + z = 0$$

$$x - my - z = 1$$

$$2x + y + z = 0$$

b) Resólveo, se é posible, no caso $m = 2$.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1. a) Os puntos $A(1,1,0)$, $B(0,1,1)$ e $C(-1,0,1)$ son vértices consecutivos dun paralelogramo $ABCD$. Calcula as coordenadas do vértice D e a área do paralelogramo.

b) Calcula a ecuación do plano que pasa polo punto $B(0,1,1)$ e é perpendicular á recta que pasa polos puntos $A(1,1,0)$ e $C(-1,0,1)$.

Opción 2. Dadas as rectas $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$; $s: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$

a) Estuda a súa posición relativa.

b) Calcula a ecuación do plano que contén as dúas rectas.

BLOQUE 3 (ANÁLISE) (Puntuación máxima 4 puntos)

Opción 1. a) Dada a función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{se } x < 2 \\ e^{2-x} + 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

calcula a para que $f(x)$ sexa continua en $x = 2$. Para o valor obtido de a , ¿é $f(x)$ derivable en $x = 2$?

b) Dada $g(x) = ax^4 + bx + c$, calcula os valores de a, b, c para que $g(x)$ teña no punto $(1, -1)$ un mínimo relativo e a recta tanxente á gráfica de $g(x)$, en $x = 0$, sexa paralela á recta $y = 4x$.

c) Enunciado do teorema fundamental do cálculo integral. Dada a función $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, ¿ten $F(x)$ puntos de inflexión? Xustifica a resposta.

Opción 2. a) Enunciado e interpretación xeométrica do teorema de Rolle.

b) Dada $f(x) = x^3 - 9x$, calcula para $f(x)$: puntos de corte cos eixes, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, intervalos de concavidade e convexidade e puntos de inflexión.

c) Calcula a área da rexión do plano limitada polo eixe OX e a curva $y = x^3 - 9x$.

MATEMÁTICAS

(Responder só a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$

- Estuda, segundo os valores de m , o rango de A
- Para $m = -1$, calcula a matriz X que verifica $X \cdot A + A = 2I$, sendo I a matriz unidade de orde 3.

Opción 2. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} x + my + mz &= 1 \\ x + my + mz &= m \\ my + mz &= 4m \end{aligned}$$

- Resólveo, se é posible, no caso $m = 1$.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1. a) Calcula m para que os puntos $A(2,1,-2)$, $B(1,1,1)$ e $C(0,1,m)$ estean aliñados.

b) Calcula o punto simétrico do punto $P(-2,0,0)$ respecto da recta que pasa polos puntos $A(2,1,-2)$ e $B(1,1,1)$.

Opción 2. Dadas as rectas $r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-3}$; $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

- Estuda a súa posición relativa.
- Calcula a ecuación do plano que contén á recta r e é paralelo á recta s .

BLOQUE 3 (ANÁLISE) (Puntuación máxima 4 puntos)

Opción 1. a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x}{2x^2 + x^4}$.

b) Calcula os vértices e a área do rectángulo de área máxima que se pode construír de modo que a súa base estea sobre o eixe OX e os vértices do lado oposto estean sobre a parábola $y = -x^2 + 12$.

c) Enunciado do teorema fundamental do cálculo integral. Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica de $F(x) = \int_0^x [2 + \cos(t^2)] dt$, no punto de abscisa $x=0$.

Opción 2. a) Enunciado do teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que a gráfica de $f(x) = x^5 + 2x^4 - 4$ corta ao eixe OX nalgún punto do intervalo $(1, 2)$?

b) Dada a función $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -\sqrt{2} \\ -x^2 + 2 & \text{se } x > -\sqrt{2} \end{cases}$

¿É $g(x)$ continua en $x = -\sqrt{2}$? ¿É derivable en $x = -\sqrt{2}$?

c) Calcula a área da rexión do plano limitada polas gráficas de $g(x)$ e $h(x) = |x|$.

CONVOCATORIA DE XUÑO

Soamente se puntuará a primeira pregunta respondida de cada un dos tres bloques.

Bloque 1 (Álgebra lineal) (3 puntos)

OPCIÓN 1:

a) 1 punto

b) 2 puntos, distribuídos en

Cálculo de X (0,5 puntos)

Cálculo de Y (1,5 puntos)

OPCIÓN 2:

a) 2 puntos

b) 1 punto

Bloque 2 (Xeometría) (3 puntos)

OPCIÓN 1:

a) 2 puntos, distribuídos en

Cálculo do vértice D (1 punto)

Cálculo da área (1 punto)

b) 1 punto

OPCIÓN 2:

a) 2 puntos

b) 1 punto

Bloque 3 (Análise) (4 puntos)

OPCIÓN 1:

a) 1 punto, distribuído en

Cálculo de **a** para que a función sexa continua en $x = 2$ (0,5 puntos)

Estudo da derivabilidade en $x = 2$ (0,5 puntos)

b) 1,5 puntos

c) 1,5 puntos, distribuídos en

Enunciado do teorema fundamental do cálculo integral (1 punto)

Punto de inflexión (0,5 puntos)

OPCIÓN 2:

a) 1 punto, distribuído en

Enunciado do teorema de Rolle (0,5 puntos)

Interpretación xeométrica do teorema de Rolle (0,5 puntos)

b) 2 puntos, distribuídos en

Puntos de corte cos eixes (0,25 puntos)

Intervalos de crecemento e decrecemento (0,75 puntos)

Máximos e mínimos relativos (0,25 puntos)

Intervalos de concavidade e convexidade (0,5 puntos)

Punto de inflexión (0,25 puntos)

c) 1 punto

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Soamente se puntuará a primeira pregunta respondida de cada un dos tres bloques

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) (3 puntos)

Opción 1.

a) 1,5 puntos

b) 1,5 puntos

Opción 2.

a) 2 puntos

b) 1 punto

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) (3 puntos)

Opción 1.

a) 1 punto

b) 2 puntos

Opción 2.

a) 1,5 puntos

b) 1,5 puntos

BLOQUE 3 (ANÁLISE) (4 puntos)

Opción 1.

a) 1 punto

b) 2 puntos

c) 1 punto

Opción 2.

a) 1 punto

b) 1 punto

c) 2 punto

CONVOCATORIA DE XUÑO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1.

a) Sabemos que $\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -2$. Entón, polas propiedades

dos determinantes, temos que

$$\begin{vmatrix} F_1 - F_2 \\ 2F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -F_2 \\ 2F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -4 \quad (1 \text{ punto})$$

b) Sumando membro a membro as dúas ecuacións obtemos $2X = C + C'$. Polo tanto:

$$X = \frac{1}{2}(C + C') = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

(0,5 puntos)

Da primeira ecuación obtemos:

$$Y^{-1} = C - X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

e tendo en conta que $Y = (Y^{-1})^{-1}$, só nos resta o cálculo da matriz inversa de Y^{-1} . Así:

$$Y = \frac{1}{\det(Y^{-1})} (\text{Adj}(Y^{-1}))^t = 4 \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1,5 puntos)

Opción 2.

a) Matriz de coeficientes

$$C = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo do rango de C:

(0,5 puntos)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

$$|C| = -m^2 + 3m - 2; \quad |C| = 0 \Leftrightarrow m = 1, \text{ ou } m = 2$$

Polo tanto: $\text{rang}(C) = 2$, se $m = 1$ ou $m = 2$

$\text{rang}(C) = 3$, nos demais casos.

Cálculo do rango de A:

(0,5 puntos)

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - m$$

Polo tanto: $\text{rang}(A) = 2$, se $m = 2$

$\text{rang}(A) = 3$, se $m \neq 2$.

Discusión:

(1 punto)

Se $m = 1$, $\text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A)$. Sistema incompatible. Non ten solución.

Se $m = 2$, $\text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(A) < n^\circ \text{ incógnitas}$. Sistema compatible indeterminado. Infinitas solucións.

Se $m \neq 1$ e $m \neq 2$, $\text{rang}(C) = 3 = \text{rang}(A) = n^\circ \text{ incógnitas}$. Sistema compatible determinado. Solución única.

b) Segundo vimos no apartado anterior, estamos no caso dun sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. Neste caso, un sistema equivalente ao dado é:

$$\begin{aligned} x - z &= 1 + 2y \\ 2x + z &= -y \end{aligned}$$

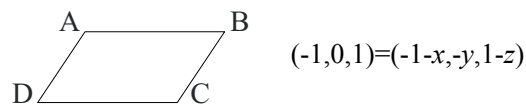
e as infinitas solucións serán:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}; \\ y = t; \\ z = -\frac{5}{3}t + \frac{2}{3}; \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(1 punto)

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1. a) Se ABCD é un paralelogramo, cumprírase que $\vec{AB} = \vec{DC}$, e polo tanto, se $D(x, y, z)$



Obtendo así que o vértice D é a orixe de coordenadas, $D(0,0,0)$.

(1 punto)

A área do paralelogramo vén dada polo módulo do vector $\vec{DC} \times \vec{DA}$. Entón:

$$\vec{DC} \times \vec{DA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, -1)$$

$$\text{Área} = \sqrt{(-1)^2 + 1 + (-1)^2} = \sqrt{3} u^2 \quad (1 \text{ punto})$$

b) Un vector normal ao plano pedido é $\vec{AC} = (-1, 0, 1)$ - $(1, 1, 0) = (-2, -1, 1)$. Como o plano pasa polo punto $B(0, 1, 1)$, podemos escribir a ecuación xeral do plano

$$-2(x - 0) - (y - 1) + (z - 1) = 0$$

é dicir,

$$2x + y - z = 0 \quad (1 \text{ punto})$$

Opción 2.

a) Vector director da recta r : $\vec{v}_r = (0, 1, 2)$. Vector director da recta s : $\vec{v}_s = (1, 2, 2)$.

Un punto da recta r : $P_r = (1, 2, 2)$. Un punto da recta

Exemplos de resposta / Solucións

$$s: Q_s = (0, -1, -2)$$

$$\text{Polo tanto, } \overrightarrow{P_r Q_s} = (0, -1, -2) - (1, 2, 2) = (-1, -3, -4).$$

$$\text{Consideramos as matrices } M = \begin{pmatrix} \overrightarrow{v_r} \\ \overrightarrow{v_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$N = \begin{pmatrix} \overrightarrow{P_r Q_s} \\ \overrightarrow{v_r} \\ \overrightarrow{v_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(M) = 2$. Xa podemos dicir que as rectas se cortan ou cruzan. Para decidir entre estas dúas posibilidades, recorremos ao rango da matriz N , e como

$$|N| = -2 - 6 + 4 + 4 = 0 \Rightarrow \text{rang}(N) = 2$$

as rectas córtanse.

(2 puntos)

b) Como son dúas rectas secantes, o plano que as contén queda determinado por un punto dunha recta, por exemplo P_r , que será un punto do plano e polos vectores directores das rectas, é dicir $\overrightarrow{v_r}$ e $\overrightarrow{v_s}$, que serán dous vectores contidos no plano. Así, a ecuación do plano será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \text{ é dicir: } 2x-2y+z=0 \quad (1 \text{ punto})$$

BLOQUE 3 (ANÁLISE) (Puntuación máxima 4 puntos)

Opción 1.

$$a) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 1) = 4a + 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (e^{2-x} + 2) = 3; \quad f(2) = 3$$

Polo tanto, para que a función sexa continua en $x=2$ ten que cumprirse $4a+1=3$. Así, a función é continua para $a=1/2$.

(0,5 puntos)

Calculamos as derivadas laterais:

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1/2x^2 - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2}(x + 2) = 2;$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} e^{2-x} = -1$$

Polo tanto, a función non é derivable en $x=2$.

(0,5 puntos)

$$b) g(x) = ax^4 + bx + c; \quad g'(x) = 4ax^3 + b$$

$$g(1) = -1 \Rightarrow a + b + c = -1$$

$$g'(1) = 0 \Rightarrow 4a + b = 0$$

$$g'(0) = 4 \Rightarrow b = 4$$

(1,5 puntos)

c) Teorema fundamental do cálculo integral: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a, b]$, a función

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$ é derivable e a súa derivada é $F'(x) = f(x)$. (1 punto)

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \Rightarrow F'(x) = e^{-x^2} \Rightarrow F''(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow F'''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$$

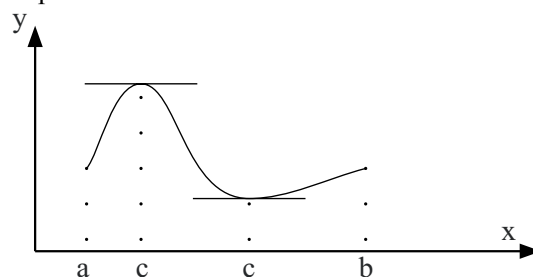
$$\left. \begin{aligned} F''(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ F'''(0) &= -2 \neq 0 \end{aligned} \right\} \text{ En } x=0, \text{ hai un punto de inflexión.}$$

(0,5 puntos)

Opción 2.

a) Teorema de Rolle: sexa $f(x)$ unha función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) e con $f(a) = f(b)$. Entón, existe algún punto $c \in (a, b)$ no que a derivada da función se anula, $f'(c) = 0$. (0,5 puntos)

Interpretación xeométrica:



Baixo as hipóteses do teorema de Rolle, podemos garanti-la existencia de polo menos un punto c en (a, b) tal que a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ en $(c, f(c))$ é paralela ao eixe OX. (0,5 puntos)

$$\left. \begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow y = 0 \\ y = 0 &\Rightarrow x(x^2 - 9) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ Puntos de corte cos eixes: } (0,0); (-3,0); (3,0) \quad (0,25 \text{ puntos})$$

$$f'(x) = 3x^2 - 9; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$f''(x) = 6x; \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$f'(-\sqrt{3}) < 0$; $f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$. Máximo relativo no punto $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$

$f'(\sqrt{3}) > 0$; $f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$. Mínimo relativo no punto $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ (0,25 puntos)

$f''(x) = 6$; $f''(0) \neq 0$; $f(0) = 0$. Punto de inflexión no punto $(0,0)$ (0,25 puntos)

Crecemento e decrecemento:

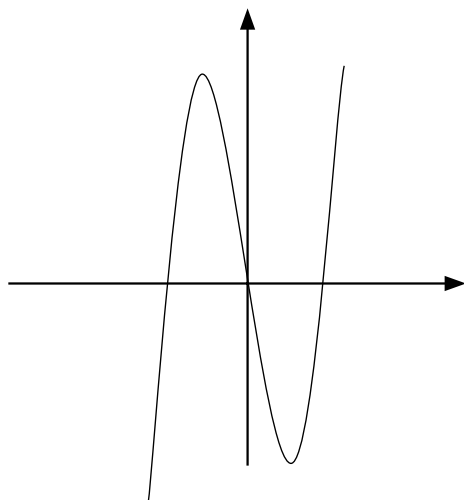
	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	crecente	decrecente	crecente

(0,75 puntos)

Concavidade e convexidade: (0,5 puntos)

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	< 0	> 0
$f(x)$	cóncava	convexa

Exemplos de resposta / Solucións



c) Os resultados obtidos no apartado b) permítenos debuxa-la rexión do plano da que queremos calcular a área

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-3}^0 (x^3 - 9x^2) dx - \int_0^9 (x^3 - 9x^2) dx = \\ &= 2 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} \right]_{-3}^0 = -2 \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) = \frac{81}{2} u^2 \end{aligned}$$

(1 punto)

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL)

(Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1.

$$a) \quad |A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2; |A| = 0 \Leftrightarrow m = 0$$

Temos así:

$$m \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

$$m = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 1 \quad (A \text{ ten dúas filas de ceros})$$

(1,5 puntos)

b) Por a), se $m = -1$, $|A| = 1 \neq 0$ e existe a inversa da matriz A . Ademais, para este valor de m

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = I \text{ e polo tanto, } A = A^{-1}$$

Entón

$$XA + A = 2I \Leftrightarrow X = (2I - A)A^{-1} = 2A - I;$$

$$X = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(1,5 puntos)

Opción 2.

a) Matriz de coeficientes

Matriz ampliada

$$C = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 1 & m & m \\ 0 & m & m \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & m & m & 1 \\ 1 & m & m & m \\ 0 & m & m & 4m \end{pmatrix}$$

Cálculo do rango de C :

1ª fila = 2ª fila. Eliminámola 2ª fila.

2ª columna = 3ª columna. Eliminámola 3ª columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & m \end{vmatrix} = m$$

Polo tanto:

$$m = 0 \Rightarrow \text{rang}(C) = 1$$

$$m \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

Cálculo do rango de A :

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & m & m \\ 0 & m & 4m \end{vmatrix} = 4m^2 + m - m^2 - 4m^2 = m(1 - m)$$

$$\text{Se } m = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0. \text{ Se } m = 1, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Polo tanto:

$$\text{Se } m = 0, \text{rang}(A) = 2$$

$$\text{Se } m = 1, \text{rang}(A) = 2$$

$$\text{Nos demais casos, } \text{rang}(A) = 3$$

Discusión:

$$\text{Se } m = 0, \text{rang}(C) = 1 < 2 = \text{rang}(A).$$

Sistema incompatible. Non ten solución.

$$\text{Se } m = 1, \text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(A) < n^\circ \text{ incógnitas.}$$

Sistema compatible indeterminado. Infinitas solucións.

$$\text{Se } m \neq 0 \text{ e } m \neq 1, \text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A).$$

Sistema incompatible. Non ten solución. (2 puntos)

b) Para $m = 1$, temos un sistema compatible indeterminado. Un sistema equivalente ao dado é

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ y + z &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ temos: } x = -3, y = 4 - z. \text{ As}$$

infinitas solucións serán

$$\begin{cases} x = -3; \\ y = 4 - t; \\ z = t; \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(1 punto)

Exemplos de resposta / Solucións

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1. a) Calculámo-la recta r que pasa polos puntos $A(2,1,-2)$ e $B(1,1,1)$. Vector director da recta: $\vec{AB} = (-1,0,3)$. Punto de r : $A(2,1,-2)$

Vector director da recta r : $\vec{AB} = (-1,0,3)$ }
Punto de r $A(2,1,-2)$ }

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$$

Para que os puntos estean aliñados, C debe pertencer á recta r . Polo tanto

$$\begin{cases} 0 = 2 - \lambda \\ 1 = 1 \\ m = -2 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{m = 4}$$

(1 punto)

b) Calculámo-lo plano π perpendicular á recta r , polo tanto o vector $\vec{AB}$ é un vector perpendicular ao plano, pasando polo punto $P(-2,0,0)$:

$$\vec{AB} \perp \pi \Rightarrow -x + 3z + D = 0 \quad \left. \begin{matrix} D = -2; \\ P \in \pi \end{matrix} \right\} \pi: x - 3z + 2 = 0$$

Calculámo-lo punto $M(2-\lambda, 1, -2+3\lambda)$ intersección da recta r co plano π :

$$2 - \lambda - 3(-2+3\lambda) + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1; \quad M = (1,1,1)$$

Se $P'(x,y,z)$ é o simétrico de $P(-2,0,0)$, como $M = (1,1,1)$ é o punto medio de $\overline{PP'}$, temos que

$$\frac{x-2}{2} = 1; \quad \frac{y}{2} = 1; \quad \frac{z}{2} = 1$$

e así, $\boxed{P'(4,2,2)}$

(2 puntos)

Opción 2. a) Das ecuacións das rectas podemos obter os seus vectores directores:

$$\vec{v}_r = (1, -1, -3)$$

$$\vec{v}_s = (1, 2, 1)$$

e estudando o rango da matriz formada polas compo-

$$\text{nentes destes vectores } \text{rang}(M) = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

xa podemos dicir que as rectas se cortan ou cruzan.

Para decidirmos entre estas dúas posibilidades, consideramos agora un punto en cada unha das rectas

$$P_r(0,1,2) \in r; \quad Q_s(1,3,1) \in s; \quad \vec{P_r Q_s} = (1,2,-1)$$

e a matriz

$$N = \begin{pmatrix} \vec{P_r Q_s} \\ \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|N| = -1 - 2 - 6 - 1 + 6 - 2 = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(N) = 3$ podemos concluir que as rectas se cruzan. (1,5 puntos)

b) O plano está determinado polo punto P_r e os vectores $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$. Polo tanto, a ecuación do plano será

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 5x - 4y + 3z - 2 = 0 \quad (1,5 \text{ puntos})$$

BLOQUE 3 (ANÁLISE) (Puntuación máxima 4 puntos)

Opción 1.

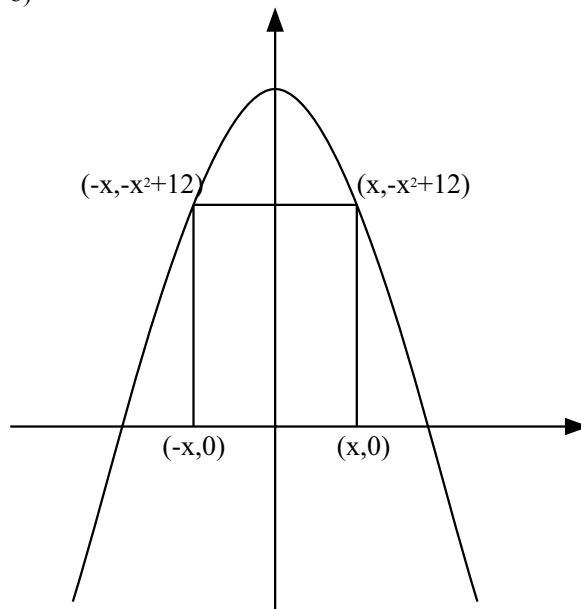
a) É unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$ e aplicamos a regra de L'Hôpital dúas veces

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sen x - x}{2x^2 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sen x + e^x \cos x - 1}{4x + 4x^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (\sen x + \cos x) + e^x (\cos x - \sen x)}{4 + 12x^2} = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}$$

(1 punto)

b)



O vértice da parábola é o punto $V(0,12)$. A función a maximizar, área do rectángulo, é

$$A(x) = 2x(-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x \quad (1 \text{ punto})$$

Determinamo-lo máximo:

$$A'(x) = -6x^2 + 24$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$A''(x) = -12x; \quad A''(2) = -24 < 0$$

Polo tanto,

$$A(x) \text{ alcanza o máximo para } x = 2. \quad (0,5 \text{ puntos})$$

$$\text{Vértices } (-2,8), (2,8), (2,0), (-2,0) \quad (0,25 \text{ puntos})$$

$$\text{Área: } A(2) = 32 \text{ u}^2 \quad (0,25 \text{ puntos})$$

c) Teorema fundamental do cálculo integral: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a,b]$, a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivable e a súa derivada é $F'(x) = f(x)$. (0,5 puntos)

Ecuación da recta tanxente á gráfica de $F(x)$ no punto de abscisa $x = 0$:

$$y - F(0) = F'(0)(x-0).$$

Exemplos de resposta / Soluções

$F(0) = \int_0^0 [2 + \cos(t^2)] dt = 0$, e polo teorema fundamental do cálculo integral $F'(x) = 2 + \cos(x^2) \Rightarrow F'(0) = 3$ c)

Polo tanto, a ecuación da recta tanxente é: $y = 3x$

(0,5 puntos)

Opción 2.

a) Teorema de Bolzano: se $f(x)$ é continua en $[a, b]$ e toma valores de signo contrario nos extremos do intervalo, é dicir $f(a) \cdot f(b) < 0$, entón existe algún punto $c \in (a, b)$ onde a función se anula, é dicir $f(c) = 0$.

(0,5 puntos)

A función $f(x) = x^5 + 2x^4 - 4$ é continua en $\mathbb{R}$ e polo tanto en $[1, 2]$, por ser polinómica.

$$f(1) = -1 < 0; \quad f(2) = 60 > 0$$

Entón, polo teorema de Bolzano, existe polo menos un punto $c \in (1, 2)$ no que a función se anula, é dicir $f(c) = 0$

(0,5 puntos)

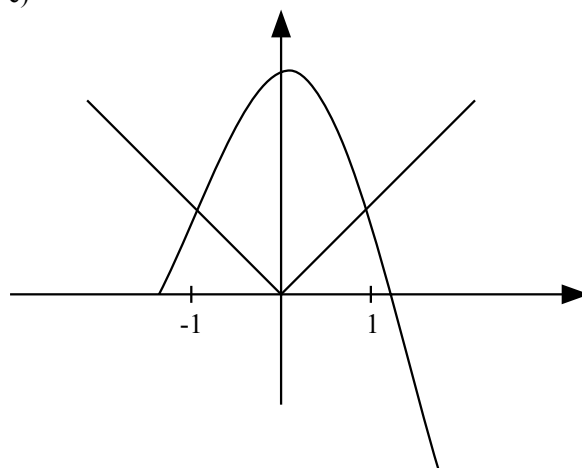
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} g(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} g(x) &= 0 \\ g(-\sqrt{2}) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} g(x) = g(-\sqrt{2}).$$

Polo tanto, $g(x)$ é continua en $x = -\sqrt{2}$. **(0,5 puntos)**

$$g'(-\sqrt{2}^-) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} \frac{0}{x + \sqrt{2}} = 0$$

$$g'(-\sqrt{2}^+) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} \frac{-x^2 + 2}{x + \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} \frac{(-x + \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x + \sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Dado que $g'(-\sqrt{2}^-) \neq g'(-\sqrt{2}^+)$, temos que $g(x)$ non é derivable en $x = -\sqrt{2}$. **(0,5 puntos)**



$$h(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Calculámo-los puntos de corte de $g(x)$ con $h(x)$

$$-x = -x^2 + 2 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

$$x = -x^2 + 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$A = \int_{-1}^0 (-x^2 + 2 + x) dx + \int_0^1 (-x^2 + 2 - x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{7}{3}$$

(2 puntos)

MATEMÁTICAS

(Responder soamente a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- Calcula os valores do parámetro m para os que A ten inversa.
- Para $m = 0$, calcula A^3 e A^{25} .
- Para $m = 0$, calcula a matriz X que verifica $X \cdot A = B$, sendo $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Opción 2. a) Discute e interpreta xeometricamente, segundo os valores do parámetro m , o sistema

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ x - 2y + z &= m \\ mx - y + z &= 0 \end{aligned}$$

- Resólveo, se é posible, para os casos $m = 0$ e $m = 2$.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Definición e interpretación xeométrica do produto vectorial de dous vectores en $\mathbb{R}^3$.

- Calcula os vectores unitarios e perpendiculares ós vectores $\vec{u} = (1, -2, 2)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$.

c) Calcula a distancia da orixe de coordenadas ó plano determinado polo punto $(1,1,1)$ e os vectores $\vec{u} = (1, -2, 2)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$.

Opción 2. Dado o plano $\pi: 2x + \lambda y + 3 = 0$; e a recta $r: \begin{cases} x + 2y - 2z + 6 = 0 \\ 7x - y - 2z = 0 \end{cases}$

- Calcula o valor de λ para que a recta r e o plano π sexan paralelos. Para ese valor de λ , calcula a distancia entre r e π .
- ¿Para algún valor de λ , a recta está contida no plano π ? Xustifica a resposta.
- ¿Para algún valor de λ , a recta e o plano π son perpendiculares? Xustifica a resposta.

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1. a) Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x) = (x+1)e^{-x}$ no punto de corte de $f(x)$ co eixo OX.

b) Calcula, para $f(x) = (x+1)e^{-x}$: intervalos de crecemento e decrecemento, extremos relativos, puntos de inflexión, concavidade e convexidade.

c) Enunciado e interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo integral.

Opción 2. a) Enunciado e interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial.

b) De entre tódolos triángulos rectángulos con hipotenusa 10cm., calcula as lonxitudes dos catetos que corresponden ó de área máxima

c) Calcula o valor de m , para que a área do recinto limitado pola recta $y = mx$ e a curva $y = x^3$, sexa 2 unidades cadradas.

MATEMÁTICAS

(Responder somente a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Sexan A , B e C tres matrices tales que o produto $A \cdot B \cdot C$ é unha matriz 3×2 e o produto $A \cdot C^t$ é unha matriz cadrada, sendo C^t a trasposta de C . Calcula, razoando a resposta, as dimensións de A , B e C .

b) Dada $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, obtén todas as matrices X que conmutan con M , é dicir, verifican $X \cdot M = M \cdot X$.

c) Calcula a matriz Y que verifica $M \cdot Y + M^{-1} \cdot Y = I$, sendo a matriz dada en b), M^{-1} a matriz inversa de M e I a matriz unidade de orde 2.

Opción 2. a) Se nun sistema de tres ecuacións lineais con tres incógnitas, o rango da matriz dos coeficientes é 3, ¿podemos afirmar que o sistema é compatible? Razona a resposta.

b) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} y & + & mz & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ mx & - & y & & & = & m \end{array}$$

c) Resolve o sistema anterior para o caso $m = 0$.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Dados os vectores $\vec{u} = (1, 0, -1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$, calcula os vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$ que son ortogonais ós dous vectores dados.

b) Sexa π o plano determinado polo punto $P(2, 2, 2)$ e os vectores $\vec{u} = (1, 0, -1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$. Calcula o ángulo que forma o plano π coa recta que pasa polos puntos $O(0, 0, 0)$ e $Q(2, -2, 2)$.

c) Calcula o punto simétrico de $O(0, 0, 0)$ respecto do plano $x - y + z - 2 = 0$.

Opción 2. Os lados dun triángulo están sobre as rectas

$$r_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}; \quad r_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 \end{cases}; \quad r_3: \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

a) Calcula os vértices do triángulo. ¿É un triángulo rectángulo? Razona a resposta

b) Calcula a ecuación do plano π que contén ó triángulo. Calcula a intersección do plano π cos eixes OX , OY e OZ .

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1. a) Calcula os valores de a e b para que a gráfica de $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ teña un mínimo relativo no punto $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$. Para eses valores de a e b , calcula: asíntotas e intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x)$.

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{\cos^2 x - 1}$

c) Definición de primitiva e integral indefinida dunha función. Enunciado da regra de Barrow.

Opción 2. a) Definición de función continua nun punto. ¿Que tipo de discontinuidade ten en $x = 0$ a función

$$f(x) = \frac{x^2}{x}?$$

b) Un arame de 170 cm. de lonxitude divídese en dúas partes. Con unha das partes quérese formar un cadrado e coa outra un rectángulo de xeito que a base mida o dobre da altura. Calcula as lonxitudes das partes nas que se ten que dividir o arame para que a suma das áreas do cadrado e do rectángulo sexa mínima

c) Calcula a área do recinto limitado pola recta $y = 2 - x$ e a curva $y = x^2$.

CONVOCATORIA DE XUÑO

Soamente se puntuará a primeira pregunta respondida de cada un dos tres bloques.

Bloque 1 (Álgebra lineal)

OPCIÓN 1:

- a) 1 punto
- b) 1 punto, distribuido en
Cálculo de A^3 (0,5 puntos)
Cálculo de A^{25} (0,5 puntos)
- c) 1 punto

OPCIÓN 2:

- a) 2 puntos, distribuidos en
Discusión (1 punto)
Interpretación xeométrica (1 punto)
- b) 1 punto, distribuido en
Resolución no caso $m = 0$ (0,50 puntos)
Resolución no caso $m = 2$ (0,50 puntos)

Bloque 2 (Xeometría)

OPCIÓN 1:

- a) 1 punto, distribuido en
Definición do produto vectorial de dous vectores (0,5 puntos)
Interpretación xeométrica do produto vectorial de dous vectores (0,5 puntos)
- b) 1 punto.
- c) 1 punto, distribuido en
Determinación do plano (0,5 puntos)
Cálculo da distancia (0,5 puntos)

OPCIÓN 2:

- a) 1,5 puntos, distribuidos en
Determinación de λ . (0,75 puntos)

Cálculo da distancia (0,75 puntos)

- b) 0,75 puntos
- c) 0,75 puntos

Bloque 3 (Análise)

OPCIÓN 1:

- a) 1 punto, distribuido en
Cálculo do punto de corte co eixo OX (0,25 puntos)
Cálculo da derivada (0,25 puntos)
Ecuación da recta tanxente (0,5 puntos)
- b) 2 puntos, distribuidos en
Intervalos de crecemento e decrecemento (0,5 puntos)
Extremos relativos (0,5 puntos)
Puntos de inflexión (0,5 puntos)
Concavidade e convexidade (0,5 puntos)
- c) 1 punto, distribuido en
Enunciado do teorema do valor medio do cálculo integral (0,5 puntos)
Interpretación xeométrica do teorema (0,5 puntos)

OPCIÓN 2:

- a) 1 punto, distribuido en
Enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial (0,5 puntos)
Interpretación xeométrica do teorema (0,5 puntos)
- b) 1,5 puntos, distribuidos en
Formulación do problema (0,5 puntos)
Obtención dos catetos (1 punto)
- c) 1,5 puntos, distribuidos en
Formulación do problema (0,75 puntos)
Cálculo da integral e obtención de m (0,75 puntos)

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Soamente se puntuará a primeira pregunta respondida de cada un dos tres bloques.

Bloque 1 (Álgebra lineal)

Opción 1:

- a) 1 punto, distribuido en
Dimensión de A (0,5 puntos)
Dimensión de B (0,25 puntos)
Dimensión de C (0,25 puntos)
- b) 1 punto, distribuido en
Formulación das ecuacións (0,5 puntos)
Solución (0,5 puntos)
- c) 1 punto, distribuido en
Cálculo de M^{-1} (0,5 puntos)
Cálculo de Y (0,5 puntos)

Opción 2:

- a) 1 punto
- b) 1 punto, distribuido en
Sistema incompatible (0,5 puntos)
Sistema compatible indeterminado (0,5 puntos)
- c) 1 punto

Bloque 2 (Xeometría)

Opción 1:

- a) 1 punto, distribuido en
Cálculo de $\vec{u} \times \vec{v}$ (0,25 puntos)
Cálculo de $|\vec{u} \times \vec{v}|$ (0,25 puntos)
Por cada solución (0,25 puntos)
- b) 1 punto, distribuido en
Vector asociado ó plano (0,25 puntos)
Vector director da recta (0,25 puntos)
Cálculo do ángulo (0,5 puntos)
- c) 1 punto

Opción 2:

- a) 1,5 puntos, distribuidos en
Cálculo dos vértices (1 punto)
Triángulo rectángulo (0,5 puntos)
- b) 1,5 puntos, distribuidos en
Obtención do plano (1 punto)
Intersección cos eixos (0,5 puntos)

Bloque 3 (Análise)

Opción 1:

- a) 2 puntos, distribuidos en
Cálculo de a e b (0,5 puntos)
Asíntotas (0,75 puntos)
Intervalos de crecemento e decrecemento (0,75 puntos)
- b) 1 punto
- c) 1 punto, distribuido en
Definición de primitiva (0,25 puntos)
Definición de integral indefinida (0,25 puntos)
Regla de Barrow (0,5 puntos)

Opción 2:

- a) 1 punto, distribuido en
Definición de función continua nun punto (0,5 puntos)
Tipo de discontinuidade (0,5 puntos)
- b) 1,5 puntos, distribuidos en
Expresión a minimizar (0,75 puntos)
Cálculo da lonxitude das dúas partes nas que se divide o arame (0,5 puntos)
Comprobación de mínimo (0,25 puntos)
- c) 1,5 puntos, distribuidos en
Formulación do problema (0,75 puntos)
Determinación dos límites de integración (0,25 puntos)
Cálculo da integral (0,5 punto)

CONVOCATORIA DE XUÑO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL)

(Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1.

a) $|A| = m^2 - 1$. Polo tanto $|A| = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$. Así, A ten inversa $\Leftrightarrow m \neq \pm 1$. **(1 punto)**

b) Se $m = 0$, utilizando as propiedades do produto

de matrices $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = -I$; **(0,5 puntos)**

$A^{25} = (-I)^8 \cdot A = I \cdot A = A$. **(0,5 puntos)**

c) Tendo en conta a), para $m = 0$, $\exists A^{-1}$ e ademais, por

b), $A^{-1} = -A^2$. Polo tanto $X \cdot A = B \Leftrightarrow X = B \cdot A^{-1}$,
 $X = (0 \ -1 \ -1) \cdot (-A^2) = (-1 \ 0 \ 1)$ **(1 punto)**

Opción 2.

a) Matriz de coeficientes : $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Matriz ampliada : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdot & m \\ m & -1 & 1 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$

$|C| = m - 2$

$m \neq 2 \Rightarrow \text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 3$

$m = 2 : \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$;

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{rang}(A) = 2$

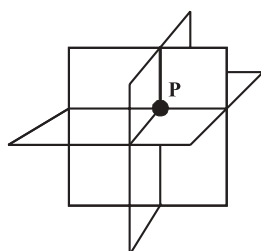
Discusión: **(1 punto)**

$m \neq 2$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible determinado (S.C.D.). Solución única.

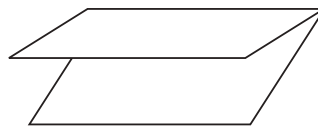
$m = 2$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2 < \text{n}^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible indeterminado (S.C.I.). Infinitas solucións. **(1 punto)**

Interpretación xeométrica:

$m \neq 2$, tres planos que se cortan nun punto P



$m = 2$, dous planos coincidentes (o 1º e o 3º) que se cortan co outro plano ó longo dunha recta



b) Se $m=0$, estamos no caso dun S.C.D. e como é un sistema homoxéneo, a solución única é a trivial:

$x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; **(0,5 puntos)**

Se $m=2$, estamos no caso dun S.C.I.

$\begin{cases} -y + z = -2x \\ -2y + z = 2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 2x \\ -2y + z = 2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 2 \\ z = -3x - 2 \end{cases}$

As infinitas solucións pódense expresar:

$\{x = \lambda, y = -\lambda - 2, z = -3\lambda - 2 / \lambda \in \mathbb{R}\}$; **(0,5 puntos)**

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1.

a) Definición do produto vectorial de dous vectores en $\mathbb{R}^3$. **(0,5 puntos)**

Interpretación xeométrica do produto vectorial de dous vectores en $\mathbb{R}^3$. **(0,5 puntos)**

b) $\vec{u} \times \vec{v} = (-2, 1, 2)$; $|\vec{u} \times \vec{v}| = 3$

Os dous vectores unitarios e ortogonais a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ son
 $\vec{w}_1 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; $\vec{w}_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ **(1 punto)**

c) A ecuación do plano será: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

é dicir $\pi : 2x - y - 2z + 1 = 0$ **(0,5 puntos)**

Utilizando a fórmula da distancia dun punto, neste caso $O = (0, 0, 0)$, a un plano temos:

$d(O, \pi) = 1/3$ **(0,5 puntos)**

Opción 2.

a) Vector asociado ó plano π : $\vec{n}_\pi = (2, \lambda, 0)$

Vector director da recta $\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 7 & -1 & -2 \end{vmatrix}$;

$\vec{v}_r = (-6, -12, -15)$

Como $r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$, e $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \Leftrightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$, temos que $r \parallel \pi \Leftrightarrow \lambda = -1$ **(0,75 puntos)**

Para $\lambda = -1$, temos o plano $\pi : 2x - y + 3 = 0$. Como

Exemplos de resposta / Solucións

$r \parallel \pi$, podemos calcular a distancia de r a π como a distancia entre un punto calquera de r , por exemplo $P_r = (0, -2, 1)$, e o plano π . Polo tanto

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad (0,75 \text{ puntos})$$

b) Vimos no apartado anterior que $r \parallel \pi \Leftrightarrow \lambda = -1$ e ademais, para este valor de λ , $d(r, \pi) = \sqrt{5}$. Polo tanto Non existe ningún valor de λ para o que a recta r estea contida no plano. **(0,75 puntos)**

c) $r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{n}_\pi$, pero non existe λ que faga que os vectores $\vec{v}_r = (-6, -12, -15)$ e $\vec{n}_\pi = (2, \lambda, 0)$ sexan proporcionais. Polo tanto, non hai ningún valor de λ para o que r e π son perpendiculares. **(0,75 puntos)**

BLOQUE 3 (ANÁLISE) (Puntuación máxima 4 puntos)

Opción 1.

a) Punto de corte co eixo OX: $(-1, 0)$ **(0,25 puntos)**

$$f'(x) = -xe^{-x}; \quad f'(-1) = e \quad (0,25 \text{ puntos})$$

Recta tanxente en $(-1, 0)$: $y = e(x+1)$ **(0, 5 puntos)**

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

A función é crecente en $(-\infty, 0)$ e decrecente en $(0, \infty)$ **(0,5 puntos)**

$f''(x) = e^{-x}(x-1)$; $f''(0) < 0$. Hai un máximo relativo no punto $(0, 1)$ **(0,5 puntos)**

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Cóncava en $(-\infty, 1)$ e convexa en $(1, \infty)$ **(0,5 puntos)**

$f'''(x) = e^{-x}(2-x)$; $f'''(1) \neq 0$. Hai un punto de inflexión no punto $(1, 2/e)$ **(0,5 puntos)**

c) Enunciado do teorema do valor medio do cálculo integral. **(0,5 puntos)**

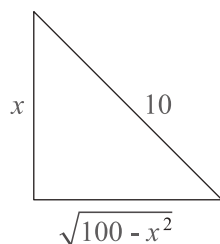
Interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo integral. **(0,5 puntos)**

Opción 2.

a) Enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial. **(0,5 puntos)**

Interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial. **(0,5 puntos)**

b)



Función a optimizar:

$$A(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{100 - x^2}, \quad (0,75 \text{ puntos})$$

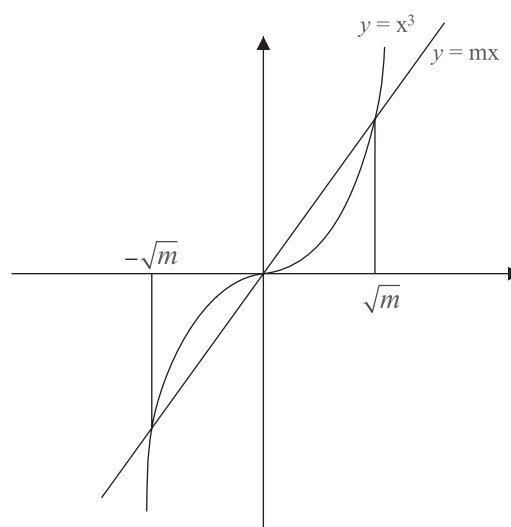
$$A'(x) = \frac{100x - 2x^3}{\sqrt{100x^2 - x^4}} \quad (0,25 \text{ puntos})$$

Puntos críticos: $x = 0$ (non vale), $x = -5\sqrt{2}$ (non vale), $x = 5\sqrt{2}$ **(0,25 puntos)**

Xustificación de que $5\sqrt{2}$ corresponde a un máximo: $A''(5\sqrt{2}) < 0$ **(0,25 puntos)**

Polo tanto, de entre tódolos triángulos rectángulos de hipotenusa 10cm, o que ten área máxima corresponde a un triángulo rectángulo isósceles de catetos $5\sqrt{2}$ cm.

c)



Abcisas dos puntos de corte das gráficas

$$x^3 = mx \Leftrightarrow x = 0; \quad x = \pm\sqrt{m}$$

Como a área do recinto ten que ser 2 unidades cadradas

$$2 = \int_{-\sqrt{m}}^0 (x^3 - mx)dx + \int_0^{\sqrt{m}} (mx - x^3)dx \quad (0,75 \text{ puntos})$$

Integrando

$$2 = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{mx^2}{2} \right]_{-\sqrt{m}}^0 + \left[\frac{mx^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{m}}$$

e así $m = \pm 2$, pero $m = -2$ non vale, polo tanto $m = 2$ **(0,75 puntos)**

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1.

a) Da hipótese $A \cdot B \cdot C \in M_{3 \times 2}$, dedúcese que $A \in M_{3 \times m}$, $B \in M_{m \times n}$, $C \in M_{n \times 2}$. Polo tanto $C^t \in M_{2 \times n}$ e para que $\exists A \cdot C^t$, necesariamente $m = 2$ e $A \in M_{3 \times 2}$.

(0,5 puntos)

Da hipótese $A \cdot C^t$ é unha matriz cadrada, dedúcese que $n = 3$ e polo tanto $B \in M_{2 \times 3}$, $C \in M_{3 \times 2}$,

(0,5 puntos)

b) Para que existan os produtos $X \cdot M$ e $M \cdot X$, X ten que ser unha matriz cadrada de orde 2. Da igualdade

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ deducimos que}$$

$$b = 0, a = d \text{ e polo tanto } X = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} / a, c \in \mathbf{R} \right\}$$

(1 punto)

c) $|M| = 1$, $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, **(0,5 puntos)**

$M \cdot Y + M^{-1} \cdot Y = I \Leftrightarrow Y = (M + M^{-1})^{-1}$ e como $M + M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, obtemos que $Y = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

(0,5 puntos)

Opción 2.

a) Se denotamos por C a matriz dos coeficientes

e por A a matriz ampliada, temos que $C \in M_{3 \times 3}$ e $A \in M_{3 \times 4}$, polo que $\text{rang}(A) \leq 3$. Ademais sabemos que sempre $\text{rang}(C) \leq \text{rang}(A)$, entón

$$\left. \begin{matrix} 3 = \text{rang}(C) \leq \text{rang}(A) \\ \text{rang}(A) \leq 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 3$$

Polo tanto, o sistema é compatible. Como o número de incógnitas tamén é 3, trátase dun sistema compatible determinado (S.C.D.). **(1 punto)**

b) Matriz dos coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ m & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

Matriz ampliada: $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ m & -1 & 0 & \cdot & m \end{pmatrix}$;

$$\left. \begin{matrix} |A| = 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ m & -1 & m \end{vmatrix} = -m \Rightarrow \text{rang}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } m \neq 0 \\ 2 & \text{se } m = 0 \end{cases}$$

Discusión:

(1 punto)

Se $m \neq 0$, $\text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A)$. Sistema incompatible. Non ten solución.

Se $m = 0$, $\text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(A) < n^\circ$ incógnitas. Sistema Compatible Indeterminado (S.C.I.). Infinitas solucións

c) Se $m = 0$, é un sistema homoxéneo e vimos que era un (S.C.I.). Para obter as infinitas solucións

$$\left. \begin{matrix} y = 0 \\ x = -z \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{Solucións : } \{(-\lambda, 0, \lambda) / \lambda \in \mathbf{R}\} \text{ (1 punto)}$$

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1.

a) $\vec{u} \times \vec{v} = (1, -1, 1)$ **(0,25 puntos)**

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{3}$ **(0,25 puntos)**

Entón, os dous vectores unitarios e ortogonais a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ son: $w_1 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$; $w_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ **(0,5 puntos)**

b) Vector asociado ó plano: $\vec{n}_\pi = \vec{u} \times \vec{v} = (1, -1, 1)$. **(0,25 puntos)**

Vector director da recta: $\vec{v}_r = \overrightarrow{OQ} = (2, -2, 2)$. **(0,25 puntos)**

Estes dous vectores son proporcionais e polo tanto a recta e plano son perpendiculares **(0,5 puntos)**

c) Ecuación da recta que pasa por $O(0, 0, 0)$ e é perpendicular a π

$$s : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

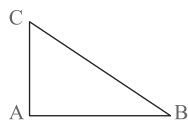
Punto de intersección de S con π : $P(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

Este punto P é o punto medio de O e o seu simétrico O' . Polo tanto $O'(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. **(1 punto)**

Opción 2.

a) Calculamos as coordenadas dos vértices facendo a intersección das rectas $r_1 \cap r_2 : A(1, 1, -1)$
 $r_2 \cap r_3 : B(-1, -1, -1)$ $r_1 \cap r_3 : C(3, -1, 3)$

Exemplos de resposta / Solucións



(1 punto)

$$\begin{cases} \vec{AB} = (-2, -2, 0) \\ \vec{AC} = (2, -2, 4) \end{cases} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{AC}$$

Polo tanto, o triángulo é rectángulo en A (0,5 puntos)

b) Podemos calcular o plano π como o plano determinado polo punto A e os vectores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$. Así

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \text{ é dicir } \pi : x - y - z - 1 = 0$$

(1 punto)

Intersección cos eixos OX, OY e OZ: $P(1, 0, 0)$, $Q(0, -1, 0)$ e $R(0, 0, -1)$ respectivamente. (0,5 puntos)

BLOQUE 3 (ANÁLISE) (Puntuación máxima 4 puntos)

Opción 1.

a) $f'(x) = a - \frac{b}{x^2}$

$$\begin{cases} f(1/2) = 4 \Rightarrow a + 4b = 8 \\ f'(1/2) = 0 \Rightarrow a - 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 4, b = 1 \text{ e temos así}$$

que $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$ (0,5 puntos)

Asíntota vertical: $x = 0$ (0,25 puntos)

Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{x^2} = 4$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 1}{x} - 4x \right) = 0$$

Polo tanto a asíntota oblicua é a recta $y = 4x$ (0,5 puntos)

Como $f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$, temos que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 0)$	$(0, 1/2)$	$(1/2, \infty)$
$f''(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

é dicir > Crecente en $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, \infty)$,
Decrecente en $(-1/2, 0) \cup (0, 1/2)$ (0,75 puntos)

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot e^x}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot e^x}{-\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-\sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} e^x = -1$

(1 punto)

c) Definición de primitiva (0,25 puntos)

Definición de integral indefinida (0,25 puntos)

Enunciado da regra de Barrow (0,5 puntos)

Opción 2.

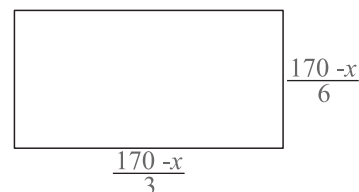
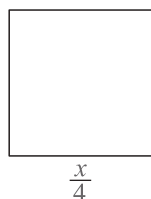
a) Definición de función continua nun punto (0,5 puntos)

$$\left. \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \\ \neq f(0) \end{matrix} \right\} \text{Discontinuidade evitable, que se evita}$$

definindo $f(0) = 0$ (0,5 puntos)

b) Parte de arame para o cadrado: x cm. Parte de arame para o rectángulo: $(170 - x)$ cm

$$A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(170 - x)^2}{18}; \quad A'(x) = \frac{x}{8} - \frac{170 - x}{9}$$



$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 80; \quad A''(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} > 0$$

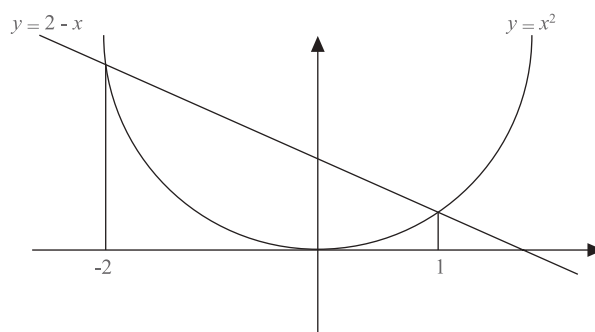
Solución: 80 cm para o cadrado e 90 cm para o rectángulo. (1,5 puntos)

c) Abscisas dos puntos de corte das gráficas

$$2 - x = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \quad (0,25 \text{ puntos})$$

$$A = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx \quad (0,75 \text{ puntos})$$

$$A = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1; \quad A = \frac{9}{2} u^2 \quad (0,5 \text{ puntos})$$



MATEMÁTICAS

PRIMEIRA PARTE (Parte Común)

(Nesta primeira parte **tódolos** alumnos deben responder a tres preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos tres bloques temáticos: Álgebra Lineal, Xeometría e Análise. A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.)

Bloque 1 (Álgebra Lineal) (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. Ache tódalas matrices $A = (a_{ij})$, cadradas de orde tres, tales que $a_{21} = a_{32} = 0$ e $A + A^t = 4I$, sendo I a matriz identidade de orde tres e A^t a matriz trasposta de A , das que ademáis sábese que o seu determinante vale 10.
2. Discuta e interprete xeométricamente, según os diferentes valores do parámetro m , o seguinte sistema:

$$\begin{array}{rcccccl} -x & + & y & - & z & = & -1 \\ 4x & - & 2y & + & 2z & = & 2m \\ -3x & - & 2y & + & mz & = & -4 \end{array}$$

Bloque 2 (Xeometría) *(Responda a unha das dúas preguntas)*

1. Calcule a distancia entre as rectas de ecuacións $r: \left\{ x = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{7} \right\}$ e $s: \left\{ x-2 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \right\}$.
2. Demostre que os puntos $P=(0,0,4)$, $Q=(3,3,3)$, $R=(2,3,4)$ e $S=(3,0,1)$ son coplanares e determine o plano que os contén.

Bloque 3 (Análise) (*Responda a unha das dúas preguntas*)

- 1. A.** Enunciado e interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo integral para funcións continuas.
- B.** Sexa $f : [-2, 2] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continua en $[-2, 2]$ tal que $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = \int_1^2 f(t)dt$, ¿pódese asegurar que existen b e c en $[-2, 2]$ tales que $b \leq -1$, $c \geq 1$ e $f(b) = f(c)$? Xustifique a súa resposta.
- 2. A.** Enunciado da Regra de L'Hopital.
- B.** Calcule a relación entre a e b para que sexa continua en toda a recta real a función $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax} - 1}{2x} & \text{se } x \neq 0 \\ b & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS

SEGUNDA PARTE

Bloque 4.a. (Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque **só** aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante os cursos académicos 2003/2004 ou 2004/2005. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)

1. A. Definición de cota superior dunha sucesión de números reais. Definición de sucesión acotada inferiormente.

B. Demostre que a sucesión de termo xeral $a_n = \frac{4n-1}{n+1}$ é crecente e ache unha cota inferior positiva (xustificando que é cota inferior.)

2. A. Explique **BREVEMENTE** o método de integración de funcións racionais $P(x)/Q(x)$, no caso de que o polinomio do denominador, $Q(x)$, teña só raíces reais.

B. Calcule $\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2} dx$.

Bloque 4.b. (Estatística) (Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque **só** aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante o curso académico 2002/2003 ou anteriores. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)

1. A. Propiedades da función de densidade dunha variable aleatoria que segue unha distribución normal.

B. Se X é unha variable aleatoria normal de media $\mu > 0$ e varianza σ^2 entón $P\left(\frac{\mu}{2} \leq X \leq \frac{3\mu}{2}\right)$ vale:

a) cero

b) $2P\left(Z \leq \frac{\mu}{2\sigma}\right) - 1$, donde Z é unha variable aleatoria que segue unha distribución $N(0,1)$.

c) ningunha das anteriores.

Elixa unha das tres respostas xustificando a súa elección.

2. A. A media dunha variable aleatoria pode ser negativa:

(a) Nunca (b) Sempre (c) Só se as probabilidades son negativas (d) Ningunha das anteriores.

Escolla unha das anteriores respostas e razoe por que as outras tres opcións non son correctas.

B. Se X é unha variable aleatoria discreta de media m , demostre, (empregando a definición de media) que a media da variable aleatoria discreta Y , con $Y = a + bX$, (para calesqueira $a, b \in \mathbf{R}$) é $a + bm$.

MATEMÁTICAS

PRIMEIRA PARTE (Parte Común)

(Nesta primeira parte **tódolos** alumnos deben responder a tres preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos tres bloques temáticos: Álgebra Lineal, Xeometría e Análise. A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.)

Bloque 1 (Álgebra Lineal) (Responda a unha das dúas preguntas)

1. Resolva a ecuación matricial: $A \cdot X + C = B$, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Discuta e resolva, segundo os valores do parámetro α , o seguinte sistema de ecuacións. Interpreteo xeométricamente en cada caso:

$$2x - 3y + z = 0$$

$$x - \alpha y - 3z = 0$$

$$5x + 3y - z = 0$$

Bloque 2 (Xeometría) (Responda a unha das dúas preguntas)

1. A. ¿Que condición deben cumprir os coeficientes das ecuacións xerais de dous planos para que estes sexan perpendiculares?

B. Ache o ángulo que forman os planos $\pi : 2x - y + z - 7 = 0$ e $\sigma : x + y + 2z = 11$.

2. A. Definición de produto mixto de tres vectores. ¿Pode ocorrer que o produto mixto de tres vectores sexa cero sen ser ningún dos vectores o vector nulo? Razoe a resposta.

B. Para $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, tres vectores no espacio tales que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $|\vec{w}| = 5$, ache os valores mínimo e máximo do valor absoluto do seu produto mixto.

Bloque 3 (Análise) (Responda a unha das dúas preguntas)

1. A. Continuidade lateral dunha función nun punto.

B. Analice a continuidade, no punto $x = 0$, da función f dada por $f(x) = \begin{cases} \frac{2^x - 1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

2. A. Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema Fundamental do Cálculo Integral para funcións continuas.

B. Sexa $F(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$. Calcule a segunda derivada da función F (**sen intentar resolver a integral.**)

MATEMÁTICAS

SEGUNDA PARTE

Bloque 4.a. (Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque só aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante os cursos académicos 2003/2004 ou 2004/2005. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)

1. Calcule:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 5n + 4} - n)$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n - 8}{2^{n+1}} \right)$

2. Calcule $\int \frac{x^3 + x + 2}{x^2 + 3} dx$.

Bloque 4.b. (Estatística) (Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque só aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante o curso académico 2002/2003 ou anteriores. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)

1. Tódolos días se seleccionan, de maneira aleatoria, 15 unidades dun proceso de taponado de botellas co propósito de verificar a porcentaxe de taponados defectuosos. A xerencia decidiu deter o proceso cada vez que unha mostra de 15 unidades teña dous ou máis defectuosos. Se se sabe que a probabilidade de realizar un taponado defectuoso é p , ¿cal é a probabilidade de que, un determinado día, o proceso se deteña? (O resultado debe expresalo en función de p .)

Se $p = 0.1$, ¿é máis probable que nunha caixa non haxa ningún defectuoso ou que sexan todos defectuosos? Xustifique a súa resposta.

2. Un distribuidor de cristalerías empaceta as copas en lotes de catro copas cada un. A función de masa de probabilidade do número de copas defectuosas en cada lote vén dada por:

k	0	1	2	3	4
P(X=k)	0.9	m	0.02	0.01	0.005

Pídese:

- Calcule o valor de m .
- Calcule a media da variable X .
- Calcule a probabilidade de que polo menos o 50% das copas dun lote sexa defectuoso.

CONVOCATORIA DE XUÑO

A puntuación máxima de cada bloque é 2,5 puntos. O alumno debe resolver só un exercicio de cada bloque temático e no caso de responde-los dous, soamente se puntuará o primeiro exercicio respondido dese bloque.

Bloque 1 (Álgebra lineal)**EXERCICIO 1:**

Formulación da condición $A + A^t = 4I$ **(0, 5 puntos)**

Obtención de $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 2$ **(0,25 puntos)**

Obtención de $a_{12} = a_{23} = 0$ **(0,25 puntos)**

Condición $a_{13} + a_{31} = 0$ **(0,25 puntos)**

Formulación da condición $\det(A) = 10$ **(0, 5 puntos)**

$$\text{Solución } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(0,75 puntos)

EXERCICIO 2:

Sexan M a matriz dos coeficientes e M^* a matriz ampliada. Facemos a discusión utilizando o Teorema de Rouché-Frobenius (tamén se podería facer polo método de Gauss).

$\det(M) = 4 - 2m$. Polo tanto $\det(M) = 0 \Leftrightarrow m = 2$ **(0, 5 puntos)**

Discusión:

1. $m \neq 2$, $\text{rang}(M) = 3 = \text{rang}(M^*) = n^\circ$ incógnitas. Sistema compatible determinado. Solución única **(0,5 puntos)**

2. $m = 2$, $\text{rang}(M) = 2 \neq \text{rang}(M^*) = 3$ pois

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

temos neste caso un sistema incompatible **(0,5 puntos)**

Interpretación xeométrica:

1. $m \neq 2$. Tres planos que se cortan nun punto **(0,5 puntos)**

$m = 2$. Como non hai un par de planos paralelos, son tres planos que se cortan dous a dous formando unha superficie prismática (planos que se cortan dous a dous según rectas paralelas).

Bloque 2 (Xeometría)**EXERCICIO 1:**

Pode resolverse de varias maneiras: fórmula que dá a distancia entre dúas rectas que se cruzan; distancia de un punto de s ao plano que contén a r e a s ; pola

perpendicular común;... A puntuación será:

Formulación de cómo calcula-la distancia **(1 punto)**

Determinación da distancia **(1,5 puntos)**

Utilizando o primeiro dos métodos sinalados temos

$$A_r = (0,1,4); A_s = (2,2,3); \overrightarrow{A_r A_s} = (2,1,-1)$$

$$\vec{u}_r = (1,3,7); \vec{u}_s = (1,3,4)$$

$\text{rang}(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2$; $\text{rang}(\overrightarrow{A_r A_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = 3$. Son dúas rectas que se cruzan.

$$\text{Aplicamo-la fórmula } d(r,s) = \frac{|\det(\overrightarrow{A_r A_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s)|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|}$$

$$\text{e como } |\det(\overrightarrow{A_r A_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s)| = 15; |\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = 3\sqrt{10},$$

$$\text{resulta que } d(r,s) = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

EXERCICIO 2:

Este exercicio tamen se pode resolver de varias maneiras. Por exemplo:

$$\overrightarrow{PQ} = (3,3,1); \overrightarrow{PR} = (2,3,0); \overrightarrow{PS} = (3,0,-3)$$

$\text{rang}(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}) = 2$. Polo tanto, os puntos son coplanares **(1,5 puntos)**

Como non se especifica cal, podemos dar a ecuación vectorial do plano que contén os puntos

$$\vec{x} = (0,0,4) + t(3,3,-1) + s(2,3,0) \quad \textbf{(1 punto)}$$

Bloque 3 (Análise)**EXERCICIO 1:**

A. Enunciado do teorema do valor medio do cálculo integral **(0,5 puntos)**

Interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo integral **(0,5 puntos)**

B. A aplicación do teorema do valor medio do cálculo integral permite afirmar que $\exists b \in (-2,-1)$ tal que $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = f(b)$ **(0, 5 puntos)**

$$\exists c \in (1,2) \text{ tal que } \int_1^2 f(t)dt = f(c) \quad \textbf{(0, 5 puntos)}$$

Polo tanto, tendo en conta a hipótese, podemos concluir que

Existen $b \in (-2,-1)$ e $c \in (1,2)$ tales que $f(b) = f(c)$ **(0,5 puntos)**

EXERCICIO 2:

A. Enunciado da Regra de L'Hopital **(1 punto)**

CRITERIOS DE AVALIACIÓN / CORRECCIÓN

B. En $\mathbb{R} - \{0\}$ é continua (cociente de continuas e non se anula o denominador) **(0, 25 puntos)**

Estudiamos-la continuidade en $x=0$. Aplicando a Regra de L'Hopital, temos $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a/2$ **(0, 75 puntos)**

e como $f(0) = b$, deducimos $f(x)$ é continua en $x=0 \Leftrightarrow a=2b$ **(0, 5 puntos)**

Bloque 4.a

1. A. Definición de cota superior dunha sucesión de números reais **(0,5 puntos)**

Definición de sucesión acotada inferiormente **(0,5 puntos)**

B. A sucesión é crecente posto que

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5}{(n+1)(n+2)} > 0 \quad \textbf{(0,75 puntos)}$$

Como a sucesión é crecente, entón $a_1 = 3/2$ é cota inferior **(0,75 puntos)**

2. A. Método de integración de funcións racionais, no caso de que o polinomio do denominador só teña raíces reais **(1 punto)**

$$\textbf{B.} \int \frac{2x-1}{x(x+1)} dx = \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{3}{x+1} + C$$

Descomposición en suma de fraccións **(0,25 puntos)**.

Determinación das constantes **(0,25 puntos)**. Integración logarítmica **(0,25 puntos)**. Integración da potencia **(0,5 puntos)**. Constante de integración **(0,25 puntos)**.

Bloque 4.b (Estatística)

EXERCICIO 1:

A. Propiedades da función de densidade dunha variable aleatoria que sigue unha distribución normal **(1 punto)**

B. b) . Tipifica-la variable aleatoria **(0,75 puntos)** e face-las transformacións **(0,75 puntos)**.

EXERCICIO 2:

A. O apartado B deste exercicio serve para poñer contraexemplos de a) e b). Ademais como as probabilidades non son negativas, c) tamén é falso. **(1 punto)**

B. Se X é unha variable aleatoria discreta que toma valores x_i con probabilidades p_i , $i = 1, \dots, n$

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i = m; \quad E[Y] = \sum_{i=1}^n (a + b x_i) p_i$$

(0,75 puntos)

e polo tanto, operando, $E[Y] = a + b m$ **(0,75 puntos)**

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

A puntuación máxima de cada bloque é 2,5 puntos. O alumno debe resolver só un exercicio de cada bloque temático e no caso de responde-los dous, soamente se puntuará o primeiro exercicio respondido dese bloque.

Bloque 1 (Álgebra lineal)

EXERCICIO 1:

Obtención de $X = A^{-1}(B - C)$ **(1 punto)**

Obter $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ **(0,75 puntos)**

Cálculo de $A^{-1}(B - C) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$ **(0,75 puntos)**

EXERCICIO 2:

É un sistema lineal homoxéneo. Sexa M a matriz dos coeficientes.

M ten menores de orden 2 distintos de cero, por exemplo $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 21$ $|M| = 7\alpha + 63$

Discusión e resolución:

1. $\alpha \neq -9$, $\text{rang}(M) = 3 = n^\circ$ incógnitas. Sistema compa-

tible determinado. **(0, 5 puntos)**

Solución única $x=0, y=0, z=0$ **(0,25 puntos)**

2. $\alpha = -9$, $\text{rang}(M) = 2 < n^\circ$ incógnitas. Sistema compatible indeterminado. **(0, 5 puntos)**

Infinitas solucións $x=0; y=\lambda/3; z=\lambda$; con $\lambda \in \mathbb{R}$ **(0,25 puntos)**

Interpretación xeométrica:

1. $\alpha \neq -9$. Tres planos que se cortan nun punto (a orixe de coordenadas) **(0, 5 puntos)**

$\alpha = -9$. Tres planos distintos que se cortan nunha recta **(0, 5 puntos)**

Bloque 2 (Xeometría)

EXERCICIO 1:

A. O ángulo α que forman os planos

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\Pi': A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

ven dado pola expresión $\alpha = \arccos \frac{|n \cdot n'|}{|n||n'|} =$

$$\arccos \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

polo tanto $\Pi \perp \Pi' \Leftrightarrow |AA' + BB' + CC'| = 0$

(1 punto)

B. Tendo en conta a fórmula anterior para o ángulo que forman dous planos, resulta que $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

e polo tanto $\alpha = \pi/3$ radiáns **(1,5 puntos)**

EXERCICIO 2:

A. Dados tres vectores libres $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$; $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ o seu produto mixto é o número real

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad \text{(1 punto)}$$

Tendo en conta a expresión anterior, resulta que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente dependentes **(0, 5 puntos)**

B. O valor mínimo de $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ será 0, e corresponderá ó caso de ser $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ linealmente dependentes **(0,5 puntos)**

Tendo en conta que

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |\vec{u}| |\vec{v}| |\vec{w}| |\sin(\vec{v}, \vec{w})| |\cos(\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w})|$$

o valor máximo de $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ será 30 **(0, 5 puntos)**

Bloque 3 (Análise)

EXERCICIO 1:

A. Definición de continuidade lateral dunha función nun punto **(1 punto)**

B. Calculamos os límites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \ln 2 \quad \text{(0, 5 puntos)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \text{(0, 5 puntos)}$$

Como os límites laterais non coinciden, a función non é continua en $x = 0$ **(0, 5 puntos)**

EXERCICIO 2:

A. Enunciado do Teorema Fundamental do Cálculo Integral para funcións continuas **(1 punto)**

Interpretación xeométrica **(0, 5 puntos)**

B. $F'(x) = \sin(x^2)$ **(0, 5 puntos)**

$$F''(x) = 2x \cos(x^2) \quad \text{(0, 5 puntos)}$$

Bloque 4.a

1. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 5n + 4} - n) = -5/2$ **(1,5 puntos)**

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n - 8}{2^{n+1}} \right) = 1/2$ **(1 punto)**

2. $\int \frac{x^3 + x + 2}{x^2 + 3} dx = \int x dx + \int \frac{-2x + 2}{x^2 + 3} dx$
(0,5 puntos)

Integración da potencia **(0,25 puntos)**

Integración logarítmica **(0,5 puntos)**

Integración arcotanxente **(1 punto)**

Constante de integración **(0,25 puntos)**

Solución:

$$\int \frac{x^3 + x + 2}{x^2 + 3} dx = \frac{x^2}{2} - \ln(x^2 + 3) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Bloque 4.b (Estatística)

EXERCICIO 1:

Sexa $X = n^\circ$ de tapóns defectuosos nunha mostra de 15 unidades dun proceso de taponado e p = probabilidade de realizar un taponado defectuoso. Entón $X \in B(15; p)$ **(0,5 puntos)**

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (1 - p)^{15} - 15(1 - p)^{14}$ **(0,75 puntos)**

Caso $p = 0,1$:

$P(X = 0) = 0,9^{15}$ **(0,5 puntos)**

$P(X = 15) = 0,1^{15}$ **(0,5 puntos)**

Polo tanto $P(X = 15) < P(X = 0)$ **(0,25 puntos)**

EXERCICIO 2:

a) $0,9 + m + 0,02 + 0,01 + 0,005 = 1$. Polo tanto $m = 0,065$ **(0,5 puntos)**

b) $E[X] = \mu = 0,065 \times 1 + 0,02 \times 2 + 0,01 \times 3 + 0,005 \times 4 = 0,155$ **(0,75 puntos)**

c) Sexa X = número de copas defectuosas nun lote de 4 copas

$P(X=2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - 0,9 - 0,065 = 0,035$
(1,25 puntos)

MATEMÁTICAS

PRIMEIRA PARTE (Parte Común)

(Nesta primeira parte **tódolos** alumnos deben responder a tres preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos tres bloques temáticos: Álgebra Lineal, Xeometría e Análise. A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.)

Bloque 1 (Álgebra Lineal) (Responda a unha das dúas preguntas)

1. Ache tres números sabendo que o primeiro menos o segundo é igual a un quinto do terceiro, se ó dobre do primeiro lle restamos seis resulta a suma do segundo e o terceiro e, ademais, o triple do segundo menos o dobre do terceiro é igual ó primeiro menos oito.
2. Demosta que toda matriz cadrada 3-dimensional se pode escribir como suma dunha matriz simétrica e outra antisimétrica.

Bloque 2 (Xeometría) (Responda a unha das dúas preguntas)

1. A. Distancia entre dúas rectas que se cruzan.
B. Ache a distancia entre as rectas r e s de ecuacións:

$$r : \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 2 \\ z = 2\beta \end{cases}$$

2. A. Ángulo que forman dúas rectas. Condición de perpendicularidade.
B. Determine o ángulo que forman a recta que pasa polos puntos $A = (1,0,-1)$ e $B = (0,1,-2)$ e a recta de ecuación: $x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$

Bloque 3 (Análise) (Responda a unha das dúas preguntas)

1. Un barco B e dúas cidades A e C da costa forman un triángulo rectángulo en C. As distancias do barco ás cidades A e C son 13 Km e 5 Km, respectivamente. Un home situado en A desexa chegar ata o barco B. Sabendo que pode nadar a 3 Km/h e camiñar a 5 Km/h, ¿a que distancia de A debe abandonar a costa para nadar ata B se quere chegar o antes posible?
2. Demostre que a función f dada por $f(x) = \frac{4}{x^2 + x - 2}$ é estrictamente positiva en $(2, +\infty)$ e ache a área da rexión determinada pola gráfica de f , o eixe de abscisas e as rectas $x = 2$ e $x = 3$.

MATEMÁTICAS

SEGUNDA PARTE

Bloque 4.a. (Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque **só** aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante o actual curso académico 2003/2004. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)

1. **A.** Escriba os distintos casos de indeterminacións que poden xurdir ó calcular límites de sucesións de números reais e poña un exemplo sinxelo (sen resolvelo) de, polo menos, catro deses casos.

B. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+7} - \sqrt{n})\sqrt{3n+5}$ indicando que tipo de indeterminación (ou indeterminacións) se presentan ó intentar resolver este límite.

2. **A.** Explique **BREVEMENTE** (en non máis de cinco liñas) como se aplica o método de Gauss para calcular o rango dunha matriz.

B. Determine, **empregando o método de Gauss**, o rango da matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bloque 4.b. (Estatística) (Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque **só** aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante o curso académico 2002/2003 ou anteriores. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)

1. **A.** Definición de función de densidade. Propiedades da función de densidade.

B. Obteña a función de distribución da variable aleatoria continua que téñen por función de densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \beta x & \text{se } 1 \leq x < 5 \\ 0 & \text{en outro caso} \end{cases}, \quad (\beta \in \mathbb{R})$$

2. **A.** Defina media e varianza dunha variable aleatoria binomial.

B. Lánzase unha moeda oito veces e anotamos o resultado. Repítese o proceso oitenta veces (é dicir, realízanse oitenta series de oito tiradas cada unha). ¿En cantos casos cabe esperar que obteñamos seis cruces e dúas caras?

MATEMÁTICAS

(Nesta primeira parte **tódolos** alumnos deben responder a tres preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos tres bloques temáticos: Álgebra Lineal, Xeometría e Análise. A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.)

Bloque 1 (Álgebra Lineal) (Responda a unha das dúas preguntas)

1. A. Enunciado da regra de Cramer.

B. Determine os coeficientes do polinomio de grao dous tal que a súa gráfica pasa polos puntos (0,5), (1, 7) e (-1,5). ¿Pode haber outro polinomio de segundo grao, que pase por eses tres puntos? Razone a súa resposta.

2. A. Expresa a condición que teñen que cumprir dúas matrices M e N para que poida realizarse a súa suma. E, se o que pretendemos é multiplicalas, ¿que condición deben cumprir as matrices?

B. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, ache unha matriz X tal que $AX + B = 0$.

Bloque 2 (Xeometría) (Responda a unha das dúas preguntas)

1. Compruebe que os puntos A = (1,0,3), B = (-2,5,4), C = (0,2,5) e D = (-1,4,7) son coplanarios. De todos os triángulos que se poden construír tendo como vértices tres deses catro puntos, ¿cal é o de maior área? Obteña o valor de dita área.

2. Ache a ecuación xeral do plano π que contén á recta $r: \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{2} \right\}$ e é paralelo á recta s que pasa polos puntos $P = (2,0,1)$ e $Q = (1,1,1)$. Calcule a distancia de s a π .

Bloque 3 (Análise) (Responda a unha das dúas preguntas)

1. A. Interpretación xeométrica da derivada dunha función nun punto.

B. Determine as abscisas dos puntos da curva $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$ nos que a recta tanxente forma un ángulo de 135° co sentido positivo do eixe de abscisas.

2. A. Definición de función continua nun punto. Explique brevemente os tipos de discontinuidades que existen.

B. Estudie a continuidade en toda a recta real da función f dada por:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{se } x > 0 \\ x + 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS

Bloque 4.a. (Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque só aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante o actual curso académico 2003/2004. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)

1. Deixamos caer unha pelota desde unha altura de 4 metros e, tras cada rebote, a altura acadada redúcese á metade da altura anterior. ¿Que altura acadará a pelota tras cada un dos cinco primeiros rebotes? ¿E tras o rebote vixésimo? ¿E tras o n -ésimo rebote? Se a_n denota a altura acadada tras o n -ésimo rebote, obteña unha cota superior e outra inferior desta sucesión. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

2. Calcule $\int \frac{3x-2}{x^2+x+1} dx$

Bloque 4.b. (Estatística) (Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque só aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante o curso académico 2002/2003 ou anteriores. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)

1. A velocidade dos coches que circulan por unha cidade segue unha distribución normal de media 40 Km./hora e varianza 100. Calcule a probabilidade de que un coche circule a unha velocidade v con $v \in (\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ donde μ denota a media e σ denota a desviación típica. Utilizando a resposta anterior, ache a porcentaxe de coches que circulan a máis de 60 Km./hora. ¿Cal é a probabilidade de que un coche circule a menos de 70 Km./hora se se sabe que circula a máis de 40 Km./hora? Pode ser útil saber que se Z é unha variable normal estándar entón $P(Z < 2) = 0.9772$ e $P(Z < 3) = 0.9987$.

2. A vida útil (medida en anos) dun teléfono móbil fabricado por unha determinada empresa é unha variable aleatoria con función de densidade: $f(x) = \frac{2}{5} - \frac{2}{25}x$ se $0 < x < 5$ (e cero noutro caso).

A devandita marca ofrece unha garantía de ano e medio, de xeito que se o móbil falla nese período terá que reemplazalo por outro novo. Calcule a probabilidade de que se teña que reemplazar un móbil no período de garantía. Se un pai merca a cada un dos seus cinco fillos un móbil desa marca, determine a probabilidade de que polo menos un deles se avaríe durante o período de garantía.

CONVOCATORIA DE XUÑO

A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.

Soamente se puntuará a a primeira pregunta respondida de cada un dos catro bloques temáticos.

Non se puntuarán respostas (Si ou Non) que non veñan acompañadas dunha xustificación. Por cada erro cometido en cálculos (que non sexan erros conceptuais) descontarase 0.1. Entendendo que se ese valor errado se emprega despois no mesmo exercicio e conleva un resultado (aínda que erróneo) consecuente con esa conta, non se penalizará o resultado final.

Bloque 1.(Álgebra Linear)

1. Plantexamento: 1.5 puntos.
Resolución: 1 punto.

2. Plantexamento: 1.5 puntos.
Resolución: 1 punto.

Bloque 2.(Xeometría)

1. A. 1 punto.
1. B. 1.5 puntos.

2. A. Ángulo: 0.5 puntos. Condición de perpendicularidade: 0.5 puntos.

2. B. 1.5 puntos.

Bloque 3.(Análise)

1. Plantexamento: 1.5 puntos. Cálculo do punto crítico: 0.5 puntos. Comprobación da segunda derivada: 0.5 puntos.

2. Signo da función: 0.5 puntos. Cálculo da primitiva: 1.5 puntos. Aplicación da regra de Barrow: 0.5 puntos.

Bloque 4.a.

1. A. 1 punto: (0.5 polos casos de indeterminación e 0.5 puntos polos exemplos).

1. B. 1.5 puntos.

2. A. 1 punto.

2. B. 1.5 puntos.

Bloque 4.b. (Estatística)

1. A. Definición: 0.25 puntos. Propiedades: 0.5 puntos.

1. B. Cálculo do coeficiente: 0.75 puntos. Determinación da función de distribución: 1 punto.

2. A. 1 punto (0.5 puntos cada definición)

2. B. 1.5 puntos.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.

Soamente se puntuará a a primeira pregunta respondida de cada un dos catro bloques temáticos.

Non se puntuarán respostas (Si ou Non) que non veñan acompañadas dunha xustificación. Por cada erro cometido en cálculos (que non sexan erros conceptuais) descontarase 0.1. Entendendo que se ese valor errado

se emprega despois no mesmo exercicio e conleva un resultado (aínda que erróneo) consecuente con esa conta, non se penalizará o resultado final.

Bloque 1.(Álgebra Linear)

1. A. 1 punto.

1. B. 1.5 puntos. (Plantexamento e cálculo dos coeficientes: 1 punto. Resposta á

CRITERIOS DE AVALIACIÓN / CORRECCIÓN

pregunta: 0.5 puntos)

2. A. 1 punto (0.5 puntos por cada resposta.)

2. B.: 1.5 puntos. (Plantexamento do sistema 1 punto. Resolución: 0.5 puntos)

Bloque 2.(Xeometría)

1. Comprobación de que son coplanarios: 1 punto. Cálculo da área: 1 punto. Resposta á pregunta: 0.5 puntos.

2. Ecuación do plano: 1.5 puntos. Cálculo da distancia: 1 punto.

Bloque 3.(Análise)

1. A. 1 punto se se inclue unha explicación. Non se considera válido un simple debuxo.

1. B. Planteamiento: 1 punto (Pos saber que $\tan(135^\circ) = -1$: 0.5 puntos, Por igualar la derivada a -1: 0.5 puntos). Resolución de la ecuación de segundo grado: 0.5 puntos.

2. A. Definición: 0.75 puntos.

Discontinuidades: 0.75 puntos (0.25 por cada tipo)

2. B. 1. punto.

Bloque 4.a.

1. Cálculo dos primeiros términos: 0.5 puntos (0.1 por cada un deles). Cálculo do término vixésimo: 0.5 puntos. Cálculo do término xeral: 0.5 puntos. Cota superior e inferior 0.5 puntos. Cálculo do límite: 0.5 puntos.

2. 2.5 puntos (Por calcular a primitiva en términos de logaritmos: 1 punto, por calcular a outra primitiva en términos dunha función arcotangente: 1.5 puntos).

Nota: se non incluen na expresión final a constante de integración rebáixanse 0.25 puntos.

Bloque 4.b. (Estatística)

1. Probabilidade de que un coche circule a unha velocidade $v \in (\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ 1 punto.

Cálculo da porcentaxe de coches que circulan a máis de 60 Km/h, (utilizando o resultado anterior): 0.5 puntos. Se o calcula sen empregar o resultado anterior, é dicir, sen utilizar a simetría : 0.4 puntos) Cálculo da última probabilidade: 1 punto.

2. Cálculo da probabilidade de reemplazo de un móbil no período de garantía: 1 punto distribuido da seguinte maneira: Plantexamento como a integral da función de densidade no intervalo $[0, 1.5]$: 0.5 puntos. Cálculo da primitiva: 0.25 puntos. Aplicación da regra de Barrow: 0.25 puntos

Cálculo da última probabilidade pedida: 1.5 puntos. (0.5 puntos polo plantexamento dos parámetros da binomial e 1 punto polo plantexamento e cálculo da citada probabilidade).

MATEMÁTICAS

(O alumno debe responder a catro preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos catro bloques temáticos: Álgebra, Xeometría, Análise Matemática e Estatística. A puntuación máxima de cada pregunta é de 2,5 puntos.)

Álgebra (responda a unha das dúas preguntas)

1. Considéranse dúas matrices A e B que verifican $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ e $A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Calcule a matriz $A^2 - B^2$

2. Calcule, por transformacións elementales (sen empregar a regra de Sarrus) e xustificando os pasos, o determinante

$$\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix}$$

Xeometría (responda a unha das dúas preguntas)

1. A. Definición de módulo dun vector. Propiedades.

B. Determine os valores de a e b, $a > 0$, para que os vectores $\vec{v}_1 = (a, b, b)$, $\vec{v}_2 = (b, a, b)$ e $\vec{v}_3 = (b, b, a)$ sexan unitarios e ortogonales dous a dous.

2. A. Ángulo que forman unha recta e un plano.

B. Determine o ángulo que forman o plano $\pi : x + 2y - 3z + 4 = 0$ e a recta r: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y + 2z = 12 \end{cases}$

Análise matemática (responda a unha das dúas preguntas)

1. A. ¿Que é un punto de inflexión dunha función?

B. Ache a condición que debe cumprir λ para que o polinomio $x^4 + x^3 + \lambda x^2$ sexa cóncavo nalgún intervalo. Determine o intervalo de concavidade en función de λ .

2. A. Enunciado e interpretación xeométrica do teorema de Bolzano.

B. ¿Pódese asegurar, empregando o teorema de Bolzano, que a función $f(x) = \tan(x)$ ten unha raíz no intervalo

$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$? Razone a resposta. Esboce a gráfica de f nese intervalo.

Nota: tg denota a función tanxente.

Estatística (responda a unha das dúas preguntas)

1. Determine o valor de K para o que a función $f(x) = \begin{cases} K \sin(x) & \text{se } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{noutro caso} \end{cases}$ sexa unha función de densidade.

Determine para ese valor de K a expresión da función de distribución e calcule a media da variable aleatoria que ten por función de densidade a f.

2. O 1% dos individuos dunha poboación supera os 185cm de estatura, mentras que o 3% non chega a 160cm.

Se se supón que a estatura segue unha distribución normal, calcule os parámetros desa distribución.

Nota: Pode ser útil saber que se Z é unha variable con distribución $N(0,1)$, entón $P(Z \leq 2.33) = 0.99$ e

$P(Z \leq 1.89) = 0.97$.

MATEMÁTICAS

(O alumno debe responder a catro preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos catro bloques temáticos: Álgebra, Xeometría, Análise Matemática e Estatística. A puntuación máxima de cada pregunta é de 2,5 puntos.)

Álgebra (responda a unha das dúas preguntas)

1. Demostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica unha ecuación do tipo $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, determinando α e β

(I denota a matriz identidade). Utilice este feito para calcular a inversa de A .

2. Discuta e interprete xeométricamente, según o parámetro a o sistema de ecuacións:

$$3x - y = ax$$

$$5x + y + 2z = ay$$

$$4y + 3x = az$$

Xeometría (responda a unha das dúas preguntas)

1. A. ¿Que significa xeométricamente que tres vectores do espazo tridimensional sexan linealmente dependentes?

B. Dados os vectores $\vec{u}_1 = (1,2,1)$, $\vec{u}_2 = (1,3,2)$, $\vec{v}_1 = (1,1,0)$ e $\vec{v}_2 = (3,8,5)$, demostre que os vectores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ dependen linealmente dos vectores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Determine a ecuación xeral do plano que pasa pola orixe e contén os vectores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, e determine a posición relativa dos vectores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ respecto a ese plano.

2. A. Definición de produto escalar de dous vectores. Interpretación xeométrica.

B. Determine a ecuación que satisfacen os vectores ortogonales á recta $r: \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$. Interprete xeométricamente o resultado obtido.

Análise matemática (responda a unha das dúas preguntas)

1. Dada a parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$, determine os valores de a , b e c sabendo que f ten un máximo no punto de abscisa $x = -\frac{1}{2}$ e a recta tanxente a f no punto $(1,3)$ é $y = -3x + 6$.

2. Determine a área da rexión limitada pola gráfica da función $f(x) = x^2 + x + 5$, o eixe OX e as rectas $x = -\frac{1}{2}$ e $y = x + 6$.

Estatística (responda a unha das dúas preguntas)

1. A. ¿Cando unha distribución normal se considera unha aproximación aceptable dunha distribución binomial?

B. A distribución normal $N(32,4)$ é unha boa aproximación para a distribución binomial de parámetros:

(a) $n=32$, $p=4$ (b) $n=32$, $p=\frac{1}{2}$ (c) n calquera, $p=q$ (d) $n=64$, $p=\frac{1}{2}$

Escolle unha das catro opcións anteriores e xustifique a súa resposta.

2. A. Propiedades da función de distribución dunha variable aleatoria continua.

B. A función $F(X) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ k(x^2 - 1) & 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$, ($k \in \mathbb{R}$), é función de distribución de certa variable continua X , se:

(a) $k < 0$, (b) $k = 1$, (c) $k = \frac{1}{8}$, (d) nunca.

Elixa unha das opcións anteriores e xustifique a súa resposta.

CONVOCATORIA DE XUÑO

A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.

Somente se puntuará á primeira pregunta respondida de cada un dos catro bloques temáticos.

Non se puntuarán respostas (Si ou Non) que non veñan acompañadas dunha xustificación.

Álgebra

1. Plantexamento: 1.5 puntos. Resolución: 1 punto.
- 2: 2.5 puntos.

Xeometría

1. A. Definición de módulo dun vector: 0.5 puntos. Propiedades: 0.5 puntos.
1. B. Plantexamento da ortonormalidade: 1 punto. Resolución: 0.5 puntos.
2. A. 1 punto.
2. B. 1.5 puntos.

Análise Matemática

1. A. 0.5 puntos.
1. B. Cálculo da condición para: 1 punto. Intervalo de concavidade: 1 punto.
2. A. Enunciado: 0.5 puntos. Interpretación xeométrica: 0.5 puntos.
2. B. Resposta á pregunta: 1 punto. Gráfica: 0.5 puntos.

Estatística

1. Plantexamento da función de densidade: 0.25 puntos. Cálculo do valor de K: 0.25 puntos. Expresión da función de distribución: 1 punto. Cálculo da media: 1 punto. (expresión da media: 0.25 puntos 0.5 polo cálculo da primitiva e 0.25 pola aplicación da Regra de Barrow).
2. Plantexamento: 1.5 puntos. Resolución: 1 punto.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.

Somente se puntuará á primeira pregunta respondida de cada un dos catro bloques temáticos.

Non se puntuarán respostas (Si ou Non) que non veñan acompañadas dunha xustificación.

Álgebra

- Plantexamento das ecuacións: 1 punto. Cálculo dos parámetros: 0.5 puntos (0.25 por cada un)
- Obtención da inversa: plantexamento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
2. Discusión: 1.5 puntos. Interpretación xeométrica: 1 punto.

Xeometría

1. A. 0.5 puntos
- B. Demostración da dependencia lineal: 0.5 puntos.

Determinación da ecuación do plano: 1 punto. Posición relativa: 0.5 puntos.

2. A. Definición de produto escalar: 0.75 puntos. Interpretación xeométrica: 0.75 puntos.
- B. Determinación da ecuación: 0.75 punto. Interpretación: 0.25 puntos.

Análise Matemática

1. Plantexamento: 1.5 puntos. Resolución: 1 punto.
2. Puntos de corte: 0.5 puntos. Plantexamento da integral: 1 punto. Resolución: 1 punto.

Estatística

1. A. 1 punto.
- B. 1.5 puntos. (Só se xustifica ben).
2. A. 1 punto.
- B. 1.5 puntos (Só se xustifica ben).

MATEMÁTICAS

(O alumno debe responder a catro preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos catro bloques temáticos: Álgebra, Xeometría, Análise Matemática e Estatística. A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.)

Álgebra (Responda a unha das dúas preguntas)

- A. Definición de produto de matrices.

B. Dadas tres matrices A , B e C sábese que $A \cdot B \cdot C$ é unha matriz de orde 2×3 e que $B \cdot C$ é unha matriz de orde 4×3 , ¿cal é a orde de A ? Xustifíqueo.
- A. Enunciado do teorema de Rouché-Frobenius.

B. ¿É compatible determinado o sistema de ecuacións
$$\begin{cases} 3x + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \end{cases}$$
 ? Xustifique a súa resposta.

Como consecuencia da súa resposta anterior, xustifique se téñ unha, ningunha ou máis dunha solución ese sistema.

Xeometría (Responda a unha das dúas preguntas)

- Ache a distancia do plano $\pi : 4x - 10y + 2z = -1$ ó plano $\sigma : \begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$.
- Determine o vector (ou vectores) unitarios, $\vec{v} = (a, b, c)$ (con $a > 0, b > 0, c > 0$), que forman un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radiáns co vector $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radiáns con $\vec{w} = (2, 0, 2)$.

Análise Matemática (Responda a unha das dúas preguntas)

- Debuxe a gráfica de $f(x) = |x^2 - 4|$ no intervalo $[-3, 3]$ e calcule a súa integral nese intervalo.
- Dada $F(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 4}$, escriba a ecuación da secante a F que une os puntos $(-2, F(-2))$ e $(2, F(2))$

¿Existe un punto c no intervalo $[-2, 2]$ verificando que a tanxente á gráfica de F en $(c, F(c))$ é paralela á secante que achou? En caso afirmativo razoe a súa resposta e calcule c , en caso negativo razoe porque non existe.

Estatística (Responda a unha das dúas preguntas)

- A. Función de distribución dunha variable aleatoria continua. Propiedades.

B. Se X é unha variable aleatoria continua que segue unha distribución normal de media μ e desviación típica σ calcule $P(X \leq \mu)$ ¿Que porcentaxe de observacións se atopa no intervalo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$? NOTA: Pode ser útil saber que se Z é unha variable con distribución $N(0, 1)$, entón $P(Z \leq 1) = 0.84$.
- A. Función de probabilidade dunha variable aleatoria binomial. Media e varianza dunha variable aleatoria binomial.

B. Determine os parámetros dunha variable aleatoria binomial da que se sabe que a súa media é 12 e a súa desviación típica é $4\sqrt{0.3}$.

MATEMÁTICAS

(O alumno debe responder a catro preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos catro bloques temáticos: Álgebra, Xeometría, Análise Matemática e Estatística. A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.)

Álgebra (Responda a unha das dúas preguntas)

1. Discuta o seguinte sistema de ecuacións segundo o valor de α e resólvao no caso en que sexa compatible indeterminado.

$$\begin{aligned}x + y + z &= \alpha - 1 \\ \alpha x + 2y + z &= \alpha \\ x + y + \alpha z &= 1\end{aligned}$$

2. Ache, se existe, unha matriz X que verifique a ecuación: $B^2 X - BX + X = B$, sendo $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Xeometría (Responda a unha das dúas preguntas)

1. A. Deduza as ecuacións vectorial, paramétricas e implícita (ou xeral) dun plano determinado por un punto e dous vectores directores.

B. Dados os puntos $P=(3,4,1)$ e $Q=(7,2,7)$, determine a ecuación xeral do plano que é perpendicular ó segmento $\overline{PQ}$ e que pasa polo punto medio dese segmento.

2. A. Definición e interpretación xeométrica de produto vectorial de dous vectores.

B. Dado-los vectores $\vec{u} = (-2, 0, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 0, \alpha)$, ¿para que valores de α o módulo do vector

$(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$ vale 4?

Análise Matemática (Responda a unha das dúas preguntas)

1. Calcule a ecuación da recta que pasa polo punto $(3,1)$ e tal que a área do triángulo formado por esta recta e os semieixos positivos coordenados sexa mínima.

2. Calcule o número positivo α tal que o valor da área da rexión limitada pola recta $y = \alpha$ e a parábola $y = (x - 2)^2$ sexa 36.

Estatística (Responda a unha das dúas preguntas)

1. A. Definición de variable aleatoria. Tipos de variables aleatorias. Definición de función de masa de probabilidade dunha variable aleatoria discreta.

B. Unha variable aleatoria discreta X toma os valores 2, 4, 6, 8, 10 e 12 con probabilidades 0.1, α , β , 0.3, γ e 0.2, respectivamente. Sabendo que $P(X < 6) = 0.3$ e que $P(X > 6) = 0.9$, ache os valores de α , β e γ .

2. A. ¿Que relación existe entre a distribución binomial e a distribución normal?

B. Sábese que o 10% dos alumnos de Bacharelato son fumadores. En base a isto, calcule a probabilidade aproximada de que, polo menos, haxa 310 alumnos fumadores dos 3.000 que se presentan ó exame de selectividade.

NOTA: Pode ser útil saber que se Z é unha variable con distribución $N(0,1)$, entón $P(Z < 0.578) = 0.718$.

CONVOCATORIA DE XUÑO

A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.

Soamente se puntuará a a primeira pregunta respondida de cada un dos catro bloques temáticos.

Non se puntuarán respostas (Si ou Non) que non veñan acompañadas dunha xustificación.

Álgebra

1. A. 1.5 puntos.

B. 1 punto.

2. A. 1 punto.

B. Análise da compatibilidade do sistema: 1 punto. Análise do número de solucións: 0.5 puntos.

Xeometría

1. 2.5 puntos.

2. Plantexamento do sistema: 1 punto. Resolución: 1.5 puntos.

Análise Matemática

1. Gráfica da función: 1 punto. Plantexamento da integral: 0.75 puntos (0.25 por cada subintervalo correcto. Se utilizase simetrías, 0.25 polo plantexamento de cada simetría e 0.25 polo plantexamento global.) Resolución: 0.75 puntos (0.25 por cada integral coa aplicación correcta da regra de Barrow. No caso de emprego de simetrías reparto uniforme dos 0.75 puntos)

2. Ecuación da secante: 0.5 puntos. Razonamento da existencia de c : 1 punto. Cálculo de c : 1 punto.

Estatística

1. A. Definición de función de distribución: 0.5 puntos. Propiedades: 0.5 puntos.

1. B. Cálculo de $P(X \leq \mu)$: 0.5 puntos. Cálculo da porcentaxe pedida: 1 punto.

2. A. Función de probabilidade dunha variable aleatoria binomial: 0.5 puntos. Media e varianza: 1 punto.

2. B. 1 punto.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.

Soamente se puntuará a a primeira pregunta respondida de cada un dos catro bloques temáticos.

Non se puntuarán respostas (Si ou Non) que non veñan acompañadas dunha xustificación.

Álgebra

1. Discusión: 1.5 puntos. Resolución: 1 punto.

2. Planteamento: 1 punto. Resolución: 1.5 puntos.

Xeometría

1. A: 1.5 puntos (0.5 puntos por cada ecuación)

B: 1 punto (cálculo de $\overline{PQ}$ e do punto medio de $\overline{PQ}$: 0.5 puntos, ecuación do plano: 0.5 puntos).

1. A: 1 punto (0.5 a definición e 0.5 a interpretación xeométrica)

1. B. Planteamento do determinante: 0.75 puntos. Resolución: 0.75 puntos.

Análise Matemática

1. Planteamento da función área: 1 punto. Resolución: 1.5 puntos.

2. Planteamento da integral definida: 1 punto. Resolución: 1.5 puntos.

Estatística

1. A: 1 punto (definición e tipos de variables aleatorias: 0.5 puntos; definición de función de masa de probabilidade dunha variable aleatoria discreta: 0.5 puntos)

1. B: Planteamento: 0.75 puntos. Cálculo de α , β e γ : 0.75 puntos (0.25 por cada unha)

2. A: 1 punto.

2. B: Planteamiento de $P(X > 310)$ en términos da binomial: 0.5 puntos. Planteamento da probabilidade aproximada: 0.5 puntos. Resolución : 0.5 puntos.

MATEMÁTICAS

(O alumno debe responder a catro preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos catro bloques temáticos: Álgebra, Xeometría, Análise Matemática e Estatística. A puntuación máxima de cada pregunta é de 2,5 puntos.)

Álgebra (responda a unha das dúas preguntas)

1. A. Propiedades do produto de matrices (só enuncialas).

B. Sexan $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $N = M + I$, donde I denota a matriz identidade de orde n , calcule N^2 e M^3 .

¿Son M ou N inversibles? Razoe a resposta.

2. A. Propiedades dos determinantes (só enuncialas).

B. Sexan F_1, F_2, F_3 e F_4 as filas dunha matriz cadrada P de orde 4×4 , tal que o seu determinante vale 3. Calcule razoadamente o valor do determinante da inversa de P , o valor do determinante da matriz αP , donde α denota un número real non nulo, e o valor do determinante da matriz tal que as súas filas son $2F_1 - F_4, F_3 \cdot 7F_2$ e F_4 .

Xeometría (responda a unha das dúas preguntas)

1. A. ¿En que posición relativa poden estar tres planos no espacio que non teñen ningún punto en común?

B. Determine a posición relativa dos planos $\pi: x - 2y + 3z = 4, \sigma: 2x + y + z + 1 = 0$ e $\varphi: -2x + 4y - 6z = 0$.

2. A. Ángulo que forman dúas rectas.

B. Determine o ángulo que forman a recta r , que pasa polo punto $(1, -1, 0)$ e tal que o seu vector director é $\vec{v} = (-2, 0, 1)$, e a recta s de ecuación: $\frac{x-7}{4} = \frac{y+6}{4} = \frac{z}{2}$

Análise matemática (responda a unha das dúas preguntas)

1. Sabendo que $P(x)$ é un polinomio de terceiro grao cun punto de inflexión en $(1, 0)$ e con $P'''(1) = 24$ donde, ademáis, a tanxente ó polinomio nese punto é horizontal, calcule $\int_{-1}^0 P(x) dx$.

2. Dadas $f(x) = \frac{x - |x|}{2}$ e $g(x) = \begin{cases} 3x & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$, calcule $\int_{-1}^0 x^2 (g \circ f)(x) dx$. ($g \circ f$ denota a composición desas funcións).

Estatística (responda a unha das dúas preguntas)

1. Un vendedor de coches estima as seguintes probabilidades para o número de coches que vende nunha semana:

Número de coches	0	1	2	3	4
Probabilidade	0.22	0.35	0.25	0.1	0.08

Calcule o número esperado de coches que venderá nunha semana. Se o vendedor recibe un salario semanal de 25.000 pesetas, máis 25.000 pesetas adicionais por cada coche vendido, ¿Cal é a probabilidade de que unha semana o seu salario sexa inferior a 100.000 pesetas no suposto de que se saiba que é superior a 25.000 pesetas?

2. A vida útil dunha marca de lámpadas segue unha distribución normal de media 1.200 horas de desviación típica 250 horas. ¿Que proporción de lámpadas téñen un tempo de vida inferior a 1.050 horas?, ¿que proporción de lámpadas téñen un tempo de vida superior a 1.350 horas? Explique brevemente o porqué da relación entre os resultados. ¿Que proporción de lámpadas téñen un tempo de vida entre 1.050 e 1.350 horas? Pode ser útil saber que si Z é unha variable con distribución $N(0, 1)$, entón $P(Z < 0.6) = 0.7257$.

MATEMÁTICAS

(O alumno debe responder a catro preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos catro bloques temáticos: Álgebra, Xeometría, Análise Matemática e Estatística. A puntuación máxima de cada pregunta é de 2,5 puntos.)

Álgebra (responda a unha das dúas preguntas)

1. Calcule α para que o seguinte sistema homoxéneo teña máis solucións que a trivial. Resólvao para dito valor de α e dea unha interpretación xeométrica do sistema de ecuacións e da súa solución.

$$x + 2y - z = 0$$

$$2x + y - \alpha z = 0$$

$$x - y - z = 0$$

2. Calcule os valores do parámetro α para os que a matriz M non ten inversa. Calcule a matriz inversa de M para $\alpha = 2$, se é posible.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 4 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}$$

Xeometría (responda a unha das dúas preguntas)

1. A. Sexan $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dous vectores. Comprobe que se $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = 0$ entón $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

B. Calcule os vectores unitarios que sexan perpendiculares ós vectores $\vec{u} = (-3, 4, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 1, 0)$.

2. A. Definición de distancia mínima entre dúas rectas no espazo. Casos posibles.

B. Calcule a distancia entre as rectas r e s , donde r ten por ecuacións ($r : x = 3y = 5z$) e a recta s pasa polos puntos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (1, 2, -3)$.

Análise matemática (responda a unha das dúas preguntas)

1. A. ¿Pode haber dúas funcións distintas que teñan igual función derivada? Se a resposta é afirmativa, poña un exemplo. Se, polo contrario, a resposta é negativa, razónlea.

B. Calcule a derivada da función $f(x) = |x - 2|$ en $x = 2$, se é posible. Represente a gráfica da función e, sobre ela, razoe a súa resposta.

2. A. Enunciado do Teorema do Valor Medio do Cálculo Integral.

B. Sexan f e g , dúas funcións continuas, definidas no intervalo $[a, b]$, que verifican que $\int_a^b f = \int_a^b g$. Demostre que existen $\alpha, \beta \in [a, b]$ tales que $f(\alpha) = g(\beta)$.

Estatística (responda a unha das dúas preguntas)

1. O tempo, en horas, que tarda un autobús en facer o percorrido entre dúas cidades é unha variable aleatoria con función de densidade: $f(x) = 0,3(3x - x^2)$ se $x \in [1, 3]$ (e cero noutro caso).

(a) Calcule o tempo medio que tarda en facer o traxecto.

(b) Calcule a probabilidade de que a duración dun traxecto sexa inferior a dúas horas se se sabe que é superior a unha hora e media.

2. Un saltador de lonxitude salta unha media de 8 metros con desviación típica de 20 cm. Para poder ir á próxima olimpiada é necesario ter unha marca de 8'30 metros, ¿Que probabilidade ten de conseguir esta marca nun salto? E, ¿cal é esta probabilidade se realiza dez saltos?

NOTA: Pode ser útil saber que se Z é unha variable con distribución $N(0,1)$, entón $P(Z < 1,5) = 0,93$.

CONVOCATORIA DE XUÑO

A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.

Somente se puntuará a a primeira pregunta respondida de cada un dos catro bloques temáticos.

Non se puntuarán respostas (Si ou Non) que non veñan acompañadas dunha xustificación.

Álgebra

1. A: 1 punto.

B: Cálculo de N^2 : 0.5 puntos. Cálculo de M^3 : 0.5 puntos. Resposta razoada á pregunta: 0.5 puntos.

2. A: 1 punto.

B: 1.5 puntos (0.5 por cada un dos determinantes pedidos).

Xeometría

1. A: 1 punto.

B: 1.5 puntos.

2. A: 1 punto.

B: 1.5 puntos.

Análise Matemática

1. Determinación dos coeficientes do polinomio: 1.5 puntos (plantexamento: 1 punto, resolución: 0.5 puntos).

Cálculo da integral definida: 1 punto (0.5 polo cálculo da primitiva e 0.5 pola aplicación correcta da regra de Barrow).

2. Cálculo da función g o f : 1.5 puntos. Cálculo da integral definida: 1 punto (0.5 puntos polo cálculo da primitiva e 0.5 puntos pola aplicación correcta da regra de Barrow).

Estatística

1. Determinación do número de coches que venderá nunha semana: 1 punto.

Cálculo da probabilidade pedida: 1.5 puntos.

2. Cálculo de $P(X < 1050)$: 0.5 puntos. Cálculo de $P(X < 1350)$: 0.5 puntos.

Explicación da igualdade nos resultados: 0.5 puntos.

Cálculo de $P(1050 < X < 1350)$: 1 punto.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.

Somente se puntuará a a primeira pregunta respondida de cada un dos catro bloques temáticos.

Non se puntuarán respostas (Si ou Non) que non veñan acompañadas dunha xustificación.

Álgebra

1. Cálculo de a : 1 punto. Resolución del sistema: 1 punto. Interpretación geométrica del sistema y de la solución: 0.5 puntos.

2. Cálculo de $a=1, 3$: 1 punto. Cálculo de la inversa de M cuando $a=2$: 1.5 puntos.

Xeometría

1. A: 1 punto.

B: Planteamento: 1 punto. Resolución: 0.5 puntos.

2. A: 1 punto.

B: Planteamento: 0.5 puntos. Resolución: 1 punto.

Análise Matemática

1. A: 1 punto.

B: 1.5 puntos (destes, polo cálculo de cada unha das derivadas laterais: 0.5 puntos).

2. A: 1.5 puntos.

B: 1 punto.

Estatística

1. A: 1 punto.

B: Planteamento: 0.5 puntos. Resolución: 1 punto (0.5 puntos polo cálculo de $P(1.5 < X < 2)$ e 0.5 puntos polo cálculo de $P(X > 1.5)$).

3. Resposta á primeira pregunta: 1 punto.

Resposta á segunda pregunta: 1.5 puntos.