MATEMÁTICAS I

IES Sofía Casanova
v251127

Alberto José Fuentes García

TEMA 0 - APUNTES

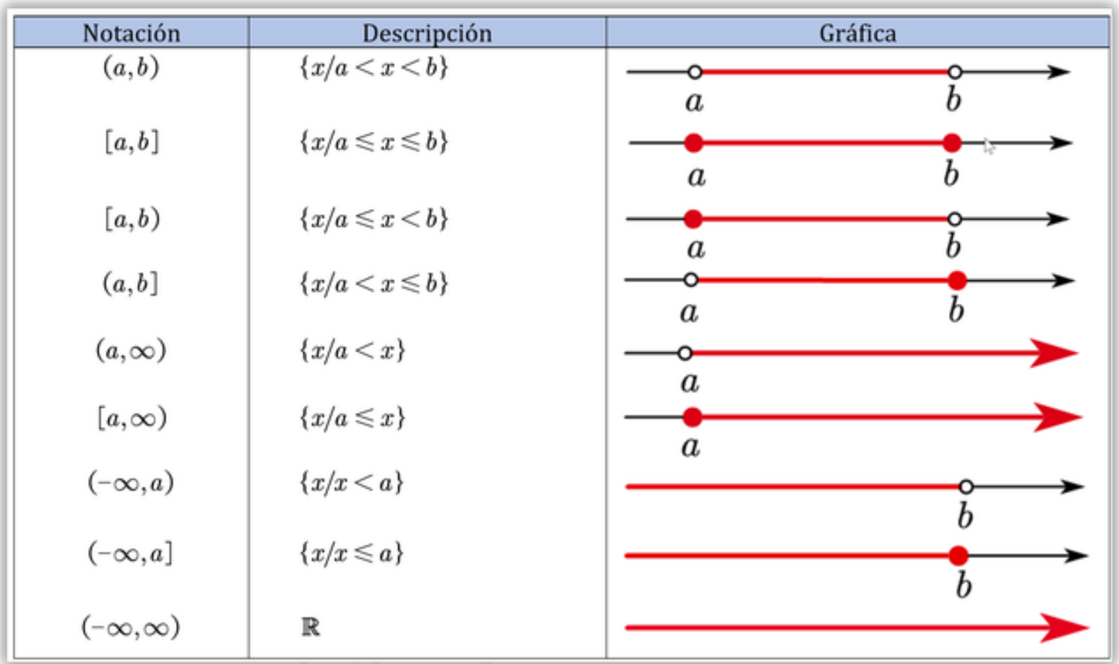
Número real, radicales, potencias, logaritmos, Binomio de Newton y factorización

Tema donde se repasan procedimientos básicos aprendidos en la ESO y que supondrán la base necesaria para poder avanzar en los contenidos del curso

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

1a. Intervalos

- **Intervalo Cerrado**$[a, b]$: Incluye los extremos, es decir,$a \leq x \leq b$.
- **Intervalo Abierto** (a, b): No incluye los extremos, es decir, $a < x < b$.
- **Intervalo Semiabierto** $[a, b)$ o $(a, b]$: Incluye solo uno de los extremos.
- **Intervalos Infinito**: $(a, +\infty)$ o $(-\infty, b]$, el infinito nunca se incluye porque no es un número.



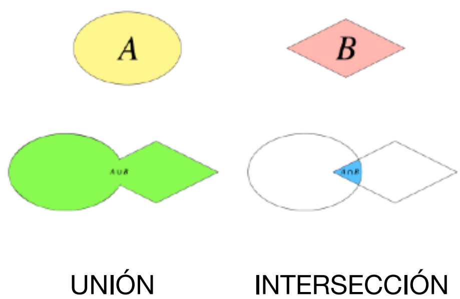
Notación	Descripción	Gráfica
(a,b)	$\{x/a<x<b\}$	a b
$[a,b]$	$\{x/a\leq x\leq b\}$	a b
$[a,b)$	$\{x/a\leq x<b\}$	a b
$(a,b]$	$\{x/a<x\leq b\}$	a b
(a,∞)	$\{x/a<x\}$	a
$[a,\infty)$	$\{x/a\leq x\}$	a
$(-\infty,a)$	$\{x/x<a\}$	b
$(-\infty,a]$	$\{x/x\leq a\}$	b
$(-\infty,\infty)$	$\mathbb{R}$	

https://jcastrom.jimdofree.com/matematica/matem%C3%A1tica-general/intervalos/

En calculadoras CASIO nuevas, la función MathBox/Recta real puede ser de ayuda

Operaciones con intervalos:

- **Unión de intervalos** (∪): Reúne todos los elementos de ambos intervalos.
- **Intersección de intervalos** (∩): Solo toma los elementos que pertenecen a ambos intervalos a la vez. (Parte en común de los intervalos)



Ejemplos:

· $[-3,2) \cup (0,+\infty) = [-3,+\infty)$ ———|================∞

-3 0 2

· $\mathbb{Z} \cap (-2,\ 4]=\{-1,0,1,2,3,4\}$. • • • • • •

-1 0 1 2 3 4

· $[-1,5) \cap (3,+\infty) = (3,5)$ ——-(=====)———

3 5

$\mathbb{N} \cap [(-2,\ 4] \cup [-3,\ 0)] = \{0,1,2,3,4\}$.

· $\mathbb{Z} \cap [(-2,\ 4] \cup [-3,\ 0)] = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$.

· $\mathbb{Z} \cap [[-2,\ 4) \cap (-3,\ 0]] = \{-2,-1,0\}$.

1b. Conjuntos numéricos del tipo $\left\{x \in \mathbb{R} / |x-c| \leq r\right\}$

(Uso del valor absoluto y las desigualdades)

La expresión $|x-c| \leq r$ indica:

la distancia de x a c (centro) es menor o igual que r (radio),

lo que se traduce en dos desigualdades y un intervalo como solución:

$$|x-c| \leq r \Rightarrow (casos) \Rightarrow \begin{cases} x-c \leq r \\ -x+c \leq r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq c+r \\ x \geq c-r \end{cases} \Rightarrow x \in [c-r, c+r].$$

Ejemplo: $A = \left\{x \in \mathbb{R} / |x-1| \leq 2\right\}$

$$|x-1| \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \leq 2 \\ -x+1 \leq 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -1 \end{cases} \Longrightarrow A = [-1,3]$$

Con mayor o igual: $|x-c| \geq r \Rightarrow \begin{cases} x-c \geq r \\ -x+c \geq r \end{cases}$

Ejemplo: $B = \left\{x \in \mathbb{R} / |x-1| \geq 2\right\}$

$$|x-1| \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 2 \\ -x+1 \geq 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{cases} \Longrightarrow B = (-\infty,-1] \cup [3,\infty)$$

IES Sofía Casanova
Alberto José Puentes García

2. Potencias (propiedades)

1. Producto de potencias con la misma base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (suma exponentes)
2. Cociente de potencias con la misma base: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (resta exponentes)
3. Potencia de una potencia: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (multiplica exp.)
4. Potencia de un producto: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (producto de potencia)
5. Potencia de un cociente: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ (cociente de potencia)
6. Potencias de exponente cero: $a^0 = 1$ (siempre que a $\neq 0$)
7. Exponente negativo: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (numerador <-> denominador || cambio de signo)

3. Radicales (propiedades)

1. Producto: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ 2. Cociente de radicales: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

3. Radical de una potencia: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (forma fraccionaria de los radicales)

Extracción de radicales: $\cdot\ 3\sqrt{24} = 3\sqrt{2^3 \cdot 3} = 6\sqrt{6}$ $\quad \cdot \sqrt{48} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = 2^2\sqrt{3}$

Suma/resta de radicales equivalentes: $6\sqrt{6} - \sqrt{6} + 5\sqrt{6} = (6 - 1 + 5)\sqrt{6} = 10\sqrt{6}$

4. Racionalizar radicales

Consiste en eliminar radicales del denominador multiplicando y dividiendo por la misma expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{25}}{5}$$

Cuando en el denominador hay suma o resta con radicales, se multiplica y divide por el conjugado (resta si era suma, suma si era resta):

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})}{(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})} = \frac{4 - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 4}{16 - 8} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

5. Logaritmos (inversa de la exponenciación)

Definición: $\log_b a = c \;\Leftrightarrow\; b^c = a$ *Ej:* $\log_2 8 = 3 \;\Leftrightarrow\; 2^3 = 8$

a es el resultado de la potencia; b es la base; c es el exponente.

Propiedades de los logaritmos: (utilidad de la herramienta)

1. Logaritmo de un producto: $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$ (producto en suma)

2. Logaritmo de un cociente: $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$ (cociente en resta)

3. Logaritmo de una potencia: $\log_b(x^n) = n \cdot \log_b x$ (baja exponentes)

4. Cambio de base: $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

6. Igualdades notables y Binomio de Newton

Fundamentales tanto para **desarrollar** expresiones como para **factorizar**.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ (1)}$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ (2)}$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \text{ (3)}$$

(ambas direcciones)

Ejemplos:

· **Desarrollar**: $\left(\dfrac{3}{2}x - 1\right)^2$, usando (2) $\left(\dfrac{3}{2}x - 1\right)^2 = \dfrac{9}{4}x^2 - \dfrac{6}{2}x + 1$

· **Factorizar** $9x^2 + 6x + 1$, usando (1), identificamos $a = \sqrt{9x^2} = 3x$

$b = \sqrt{1} = 1$, comprobamos el término central: $2ab = 2 \cdot 3x \cdot 1 = 6x$, correcto:

$$9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2$$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

BINOMIO DE NEWTON: Para exponentes superiores: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Ejemplo: $(2x-3y)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4(-3y)^0 + \binom{4}{1}(2x)^3(-3y)^1 +$

$$+\binom{4}{2}(2x)^2(-3y)^2 + \binom{4}{3}(2x)^1(-3y)^3 + \binom{4}{4}(2x)^0(-3y)^4 =$$

$$= 16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$$

Número combinatorio: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$,

En la práctica multiplicamos hacia atrás k veces: $\binom{7}{3} = \dfrac{\overbrace{7 \cdot 6 \cdot 5}^{3veces}}{\underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{3veces}} = 35$

Se asocia al **triángulo de Pascal o Tartaglia**, útil para casos bajos:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array} = \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Vemos que **es simétrico**, útil para, por ejemplo hacer cálculos menos costosos:

$$\binom{1000}{998} = (cuenta\ desproporcionada) = \binom{1000}{2} = \frac{1000 \cdot 999}{2 \cdot 1}$$

9. Factorización y regla de Ruffini

RECUERDA LOS PASOS:

1º - Sacar **factor común** si es posible: *Ejemplo:* $3x^3 + 6x^2 + 9x = 3x(x^2 + 2x + 3)$

2º - Mientras el **grado** del polinomio se **mayor o igual que 3** =>

=> regla de **Ruffini con los divisores** del término independiente, hasta que alguno de resto 0.

3º - **Si** el polinomio que queda es de **grado 2**, resolver ecuación de segundo grado:

(**soluciones** x_1 **y** x_2) => **Factorización:** $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Ejemplo:

Factoriza $P(x) = 2x^5 - 12x^4 + 22x^3 - 12x^2$

<u>1º Factor común</u>: $P(x) = 2x^5 - 12x^4 + 22x^3 - 12x^2 = 2x^2\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right)$

<u>2º Ruffini</u> con $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ probando con los <u>divisores de 6</u>: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
(Lo intentamos hasta encontrar uno que de resto cero:)

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & |\mathbf{0} \end{array}$$

Con 1 ya hemos llegado a resto 0, luego:

$$P(x) = 2x^2\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right) = 2x^2(x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

3º Resolver $x^2 - 5x + 6 = 0$, obtenemos como raíces 2 y 3, luego:

$$P(x) = 2x^2(x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right) = \mathbf{2x^2(x-1)(x-2)(x-3)}$$

NOTA: Para factorizar polinomios de grado 2 con el coeficiente a distinto de 1

Cuando resolvemos la ecuaciones de segundo grado asociada, al escribir la forma factorizada, debemos añadir ese coeficiente multiplicando. Ejemplo:

$$2x^2 + 9x + 9 = 0 \implies x_1 = \frac{-3}{2} \quad x_2 = -3 \implies P(x) = \mathbf{2} \cdot (x + \frac{3}{2})(x+3)$$

Podémoslos introducirlo dentro de uno de los factores si conviene, para quitar denominadores: $P(x) = \mathbf{2} \cdot (x + \frac{3}{2})(x+3) \implies P(x) = (2x+3)(x+3)$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

TEMA 0 - EJERCICIOS

Número real, radicales, potencias, logaritmos, Binomio de Newton y factorización

Tema donde se repasan procedimientos básicos aprendidos en la ESO y que supondrán la base necesaria para poder avanzar en los contenidos del curso

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Ejercicio 1. INTERVALOS Y CONJUNTOS NUMÉRICOS:

a) Representa en la recta real:

$A = [-3{,}2) \cup (0, +\infty)$

$B = \mathbb{Z} \cap (-2,\ 4]$

$C = [-1{,}5) \cap (3, +\infty)$

$D = \mathbb{Z} \cap (0,\ 2]$

$E = \mathbb{N} \cap [(-5,\ 4] \cup [-3,\ 3)]$

$F = [-3{,}2) \cup (0, +\infty)$

$G = \mathbb{N} \cap (-2,\ 4]$

$H = \mathbb{Z} \cap [(-2,\ 4] \cup [-3,\ 0)]$

$I = \mathbb{Z} \cap [[-2,\ 4) \cap (-3,\ 0]]$

b) Describe como intervalo o unión de intervalos los conjuntos numéricos:

$A = \left\{x \in \mathbb{R} / |x-1| \geq 2\right\}$

Ejemplo de solución:

$$|x-1| \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 2 \\ -x+1 \geq 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{cases} \Longrightarrow A = (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$$

$B = \left\{x \in \mathbb{R} / |2x-3| \leq 3\right\}$ sol: $B = [0{,}3]$

$C = \left\{x \in \mathbb{R} / |2x-1| > 5\right\}$ sol:

$C = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$

$D = \left\{x \in \mathbb{R} / |2x-1| < 5\right\}$ sol: $D = (-2{,}3)$

$E = \left\{x \in \mathbb{R} / |2x+1| \leq 11\right\}$ sol: $E = [-6{,}5]$

$F = \left\{x \in \mathbb{R} / |2x-5| \leq 3\right\}$ sol: $F = [1{,}4]$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Ejercicio 2. POTENCIAS.

Simplifica factorizando y con propiedades de las potencias:

a) $\dfrac{12 \cdot 6^2 \cdot \left(2^{-2}\right)^2}{9 \cdot 3^{-1} \cdot 4^2}$

Ejemplo de solución:

$$= \frac{(2^2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3)^2 \cdot (2^{-4})}{3^2 \cdot 3^{-1} \cdot 2^4} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot (2^2 \cdot 3^2) \cdot 2^{-4}}{3 \cdot 2^4} = \frac{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^{-4} \cdot 3^3}{3 \cdot 2^4} = \frac{2^0 \cdot 3^3}{3 \cdot 2^4} = \frac{3^2}{2^4} = \frac{9}{16}$$

b) $\dfrac{4^4 \cdot 8^{-1} \cdot 16^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 8^6}$ sol: $\dfrac{1}{4}$

c) $\dfrac{2^{-4} \cdot (-5)^2 \cdot 3^4 \cdot 32}{125 \cdot 27^2 \cdot 9^{-1}}$ sol: $\dfrac{2}{5}$

d) $\dfrac{2^5 \cdot 2^{-2} \cdot 9 \cdot 3^{-4}}{2^{-2} \cdot \left(2^2\right)^2 \cdot 3 \cdot 3^{-3}}$ sol: 2

e) $\left(\dfrac{8}{9}\right)^{-2} \cdot \left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2\right]^3 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1} \cdot 9$ sol: $\dfrac{2}{3}$

Ejercicio 3. RADICALES. Simplifica las siguientes expresiones radicales:

a) $3\sqrt{24} - \dfrac{1}{3}\sqrt{54} + \sqrt{150}$

Ejemplo de solución:

$$= 3\sqrt{2^3 \cdot 3} - \frac{1}{3}\sqrt{2 \cdot 3^3} + \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5^2} = 3(2\sqrt{6}) - \frac{1}{3}(3\sqrt{6}) + 5\sqrt{6} = 6\sqrt{6} - \sqrt{6} + 5\sqrt{6} = 10\sqrt{6}$$

b) $\left(\sqrt[4]{15} \cdot \sqrt[4]{3}\right) : \sqrt[4]{5}$

Ejemplo de solución:

$$= \left(\sqrt[4]{15 \cdot 3}\right) : \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{15 \cdot 3 : 5} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{2}$$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

c) $\frac{5}{2}\sqrt{45} - \frac{\sqrt{20}}{4} + 3\sqrt{125} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ sol: $\frac{43\sqrt{5}}{2}$

d) $\sqrt[5]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[5]{\frac{3}{2}}$ sol: 1

e) $27\sqrt{3} - 5\sqrt{27} - 9\sqrt{12}$ sol: $-6\sqrt{3}$

f) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{2}$ sol: 2

g) $8\sqrt{8} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{32} - 12\sqrt{18}$ sol: $-9\sqrt{2}$

h) $5\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{\frac{4}{81}}$ sol: $\frac{5}{3}\sqrt[3]{2}$

i) $2\sqrt{8} + 5\sqrt{72} - 7\sqrt{18} - \sqrt{50}$ sol: $8\sqrt{2}$

j) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 \sqrt[3]{2}$ sol: 2

Ejercicio 4. RACIONALIZA Y SIMPLIFICA: 1 punto

a) $\frac{1 + \sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}}$

Ejemplo de solución:

$$= \frac{1 + \sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} \cdot \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})}{(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})} = \frac{4 - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 4}{16 - 8} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

b) $\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2}$ sol: $\sqrt{2}$

c) $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 1}$ sol: $\frac{4\sqrt{2} + 5}{7}$

d) $\frac{6 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$ sol: $\frac{7 + 3\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{6 + 2\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}$ sol: $1 + \sqrt{5}$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Ejercicio 5.

Realiza simplificaciones utilizando las propiedades de las potencias y los radicales:

a) $\dfrac{\sqrt{72}+3\sqrt{32}-\sqrt{8}}{\sqrt{8}}$ b) $\sqrt{32\dfrac{\sqrt[3]{16\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt[3]{12}}}}$ c) $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

d) $\dfrac{\sqrt{20}+\sqrt{125}-\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$ e) $\sqrt{a^3\dfrac{\sqrt[3]{a^4\sqrt{b}}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}}}}$ f) $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$

g) $\dfrac{\sqrt[10]{3}}{\sqrt[5]{81\sqrt{27}}}+\sqrt{\left(\sqrt{3}+\dfrac{2}{1-\sqrt{3}}\right)^2}$ h) $\sqrt{3-\left(1+\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}\right)^2}-\dfrac{\sqrt[8]{8}}{\sqrt[4]{16\cdot\sqrt{8}}}$

i) $\sqrt{2\cdot\left(1+\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}\right)^2}-\dfrac{\sqrt{4\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[6]{2}}$ j) $\sqrt{3\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{3}}{\sqrt{243}}}}$ k) $\sqrt{9\dfrac{\sqrt{18\sqrt{45}}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}}$

Soluciones: a) 8, b) 8, c) $\sqrt{2}$, d) 4, e) a^2. f) $\dfrac{4\sqrt{2}+5}{7}$,

g) $\dfrac{4}{3}$, h) $\dfrac{1}{2}$, i) 0, j) 1, k) $3\sqrt{3}$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Ejercicio 6. Completa las siguientes expresiones logarítmicas:

a) $\log_2 8 = \_\_ \quad \Leftrightarrow 2^3 = 8$ *Ejemplo de solución*: $\log_2 8 = 3 \quad \Leftrightarrow 2^3 = 8$

b) $\log_{\_\_} 27 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3^3 = 27$ sol: 3.

c) $\log_{10}\_\_ = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 10^3 = 1000$ sol: 1000

d) $\log_4 1/16 = \_\_ \quad \Leftrightarrow \quad 4^{--} = \dfrac{1}{16}$ sol: -2.

e) $\log_{\_\_} 64 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \_\_^2 = 64$ sol: 8

f) $\log_{10}\_\_ = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 10^{-1} = \_\_$ sol: 0.1 = 1/10

Ejercicio 7.

Resuelve utilizando propiedades de los logaritmos:

a) Sabiendo que $\log_2 A = 3{,}5$ y $\log_2 B = -1{,}4$ calcular $\log_2 \left(\dfrac{4\sqrt{A}}{B^3} \right)$ (sol: 7.95)

b) Sabiendo que $\log_2 A = 3{,}5$ y $\log_2 B = -1{,}4$ calcular $\log_2 \left(\dfrac{4A^2}{\sqrt[3]{B^2}} \right)$ (sol: 9.93)

c) Sabiendo que $\log_5 A = 2{,}1$ y $\log_5 B = -0{,}4$ calcular $\log_5 \left(\dfrac{A^3}{125\sqrt{B}} \right)$ (sol: 3.5)

d) Calcula el valor de x en: $\log 2^{x-1} = 7$ (sol: $\dfrac{7}{\log 2} + 1$)

e) Calcula el valor de x en: $\log 3^{x+1} = 10$ (sol: $\dfrac{10}{\log 3} - 1$)

f) Calcula el valor de x en: $\ln x + \ln 4 - 2\ln 5 = \ln 2$ (sol: $\dfrac{25}{2}$)

g) Calcula el valor de x en: $\ln x + \ln(x+3) = 2\ln(x+1)$ (sol: 1)

h) Calcula el valor de x en: $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2\log(5 - x)$ (sols: $\dfrac{1}{3}$ y 3)

i) Desarrolla $\log \dfrac{x^2 \cdot y}{100\sqrt{z^3}}$

j) Desarrolla $\log \dfrac{x^2 \cdot \sqrt{y}}{1000z}$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Ejercicio 8. Igualdades notables y Binomio de Newton:

8a. Desarrolla

1) $(2x+5)^2 =$

2) $(3x-4)^2 =$

3) $(5x+2)(5x-2) =$

4) $\left(\dfrac{1}{2}x + 4 \right)^2 =$

8b. Factoriza

1) $4x^2 + 20x + 25$

2) $9x^2 - 24x + 16$

3) $25x^2 - 4$

4) $\dfrac{1}{4}x^2 + 4x + 16$

8c. Desarrolla

1) $(x+2)^4$ sol: $= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$

2) $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^5$ sol: $= 243x^5 - \frac{405}{2}x^4 + \frac{270}{4}x^3 - \frac{90}{8}x^2 + \frac{15}{16}x - \frac{1}{32}$

3) $\left(2x + \frac{3}{4}\right)^3$ sol: $= 8x^3 + 9x^2 + \frac{27}{8}x + \frac{27}{64}$

8d. Simplifica factorizando (factor común e identidades notables)

1) $\frac{4x^2 + 8x + 4}{2x + 2}$ sol: $2(x+1)$

2) $\frac{x^4 - 16}{x^3 - 4x}$ sol: $\frac{x^2 + 4}{x}$

3) $\frac{9x^2 - 12x + 4}{6x - 4}$ sol: $\frac{3x - 2}{2}$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Ejercicio 9. Factorización y Ruffini. Factoriza los siguientes polinomios:

1) $P(x) = x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 8x^2$ (Sol: $x^2(x+1)(x-2)(x-4)$)
2) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$ (Sol: $(x+3)^2(x-3)$)
3) $P(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$ (Sol: $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$)
4) $P(x) = x^3 - 15x^2 + 75x - 125$ (Sol: $(x-5)^3$)
5) $P(x) = x^3 + 4x^2 - 21x$ (Sol: $x(x-3)(x+7)$)
6) $P(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 45$ (Sol: $(x+3)(x-3)(x-5)$)
7) $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$ (Sol: $(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$)
8) $P(x) = 2x^4 - 128x^2$ (Sol: $2x^2(x+8)(x-8)$)
9) $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$ (Sol: $(x-1)^2(x+1)(x+2)$)
10) $P(x) = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$ (Sol: $(x+2)^4$)
11) $P(x) = 5x^4 - 10x^3$ (Sol: $5x^3(x-2)$)
12) $P(x) = x^5 - 39x^3 + 70x^2$ (Sol: $x^2(x-2)(x-5)(x+7)$)
13) $P(x) = 3x^6 - 6x^5 + 3x^4 - 6x^3$ (Sol: $3x^3(x-2)(x^2+1)$)
14) $P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 9$ (Sol: $(x-1)(x+3)(2x+3)$)

Ejercicio 10.

Fracciones algebraicas. Opera y simplifica.

a) $\dfrac{x^3+3x^2-13x-15}{x^3+x^2-9x-9}$ sol: $\dfrac{x+5}{x+3}$

b) $\dfrac{x^3-4x}{x^3+4x^2+4x}$ sol: $\dfrac{x-2}{x+2}$

c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{2x+1}{x^3-x}$ sol: $\dfrac{2x^2-2x-2}{x^3-x}$

d) $\dfrac{2}{x-5}+\dfrac{2x-20}{x^2-25}-\dfrac{3}{x+5}$ sol: $\dfrac{1}{x-5}$

e) $\dfrac{x^2-9}{x+1}\cdot\dfrac{x^2-1}{x+3}$ sol: x^2-4x+3

f) $\dfrac{3x-6}{x-1}:\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-1}$ sol: $\dfrac{3x+3}{x-2}$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

TEMA 1 - APUNTES

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

Tema donde se repasan también procedimientos algebraicos básicos aprendidos en la ESO y que supondrán la base necesaria para poder avanzar en los contenidos del curso

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

1. Bicuadradas $ax^4 + bx^2 + c = 0$

- ESTRATEGIA:
    - **CAMBIO DE VARIABLE**: $t = x^2 \xrightarrow{resolver} at^2 + bt + c = 0$, Y **RESOLVER**
    - **DESHACER EL CAMBIO**: $x = \pm\sqrt{soluciones}$

(0, 2 o 4 soluciones)

- EJEMPLO 1: $\mathbf{x^4 - 5x^2 + 4 = 0} \xrightarrow{cambio\ t=x^2} t^2 - 5t + 4 = 0 \implies t_1 = 1, t_2 = 4 \implies$

$\implies x = \pm\sqrt{1} = \pm 1, \;\; x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ (4 soluciones)

2. Polinómicas factorizables igualadas a cero.

- ESTRATEGIA: **Factorizar** hasta el final. Igualar cada factor a cero**. Obtener soluciones**:

- EJEMPLO 2.1: $0 = 2x^5 - 12x^4 + 22x^3 - 12x^2 = \mathbf{2x^2(x-1)(x-2)(x-3)}$

De cada factor obtenemos las soluciones: $\mathbf{x = 0} \quad \mathbf{x = 1} \quad \mathbf{x = 2} \quad \mathbf{x = 3}$

- EJEMPLO 2.2: $0 = \mathbf{(x-2)(x^2+1)} \implies \mathbf{x = 2}$ (del segundo factor no hay soluciones)

3. Radicales - *comprobar soluciones*

- ESTRATEGIA. **Aislar uno de los radicales** en un miembro de la ecuación y **elevar ambos miembros a la potencia adecuada.** Operar y repetir si quedan radicales.

- *OJO: Atención con las identidades notables cuando elevamos al cuadrado.*
- *OJO: Hay que **comprobar soluciones** (el proceso de elevar al cuadrado puede generar soluciones que no se cumplen en la ecuación original).*

- EJEMPLO 3.1: una sola raíz cuadrada

$\mathbf{x - \sqrt{2x-4} = 6} \xrightarrow{aislar\sqrt{}} \sqrt{2x-4} = x - 6 \xrightarrow{elevar\ al^2} (\sqrt{2x-4})^2 = (x-6)^2 \implies$

$\implies 2x - 4 = x^2 - 12x + 36 \implies 0 = x^2 - 14x + 40 \implies x_1 = \mathbf{10} \quad \cancel{x_2 = 4}$

Comprobamos soluciones y vemos que 4 no verifica la original. Luego $x = \mathbf{10}$

IES Sofía Casanova Alberto José Fuentes García

- EJEMPLO 3.2: dos raíces cuadradas

$$\sqrt{\mathbf{x+4}} + \sqrt{\mathbf{x-1}} = \mathbf{5} \xrightarrow{aislar\ y\ 2} \left(\sqrt{x+4}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{x-1}\right)^2 \implies$$

$$\implies x + 4 = 25 - 10\sqrt{x-1} + (x-1) \implies$$

$$\implies \sqrt{x-1} = 2 \implies x - 1 = 4 \implies \mathbf{x = 5} \text{ (comprobada, válida)}$$

- EJEMPLO 3.3: raíces de otro índice (cúbicas, p.ej.)

$$\sqrt[3]{\mathbf{x^2-1}} + \mathbf{1} = \mathbf{x} \xrightarrow{aislar\ y\ 3} (x^2-1) = (x-1)^3 \implies$$

$$\implies (x-1)(x+1) = (x-1)^3 \implies (x-1)(x+1) - (x-1)^3 = 0 \implies$$

$$\implies (x-1)(x+1-(x-1)^2) = 0 \implies (x-1)(x+1-x^2+2x-1) = 0 \implies$$

$$\implies (x-1)(3x-x^2) = 0 \implies x(x-1)(3-x) = 0 \implies \mathbf{x = 0};\ \mathbf{x = 1};\ \mathbf{x = 3}$$

4. Racionales - *comprobar soluciones*

- ESTRATEGIA: **Operar** fracciones algebraicas **y eliminar denominadores.**

- *OJO: Atención con los signos negativos delante de las fracciones*
- *OJO: Hay que* ***comprobar soluciones*** *(al quitar denominadores podemos generar soluciones que no se cumplen en la ecuación original por hacer cero el denominador)*

- EJEMPLO 4.1. $\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{x+1}} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}} = \dfrac{\mathbf{3x+2}}{\mathbf{x+1}} \implies \dfrac{x^2}{\cancel{x(x+1)}} - \dfrac{x+1}{\cancel{x(x+1)}} = \dfrac{x(3x+2)}{\cancel{x(x+1)}} \implies$

(¡signo!) $\implies x^2 - x - 1 = 3x^2 + 2x \implies 2x^2 + 3x + 1 = 0 \implies \begin{cases} \cancel{x = -1} \\ \mathbf{x = -1/2}\ ok \end{cases}$

- EJEMPLO 4.2. $\dfrac{\mathbf{-x}}{\mathbf{x+1}} + \dfrac{\mathbf{2x+1}}{\mathbf{2x}} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2-1}} = \mathbf{0} \Rightarrow$ MCM $= 2x(x-1)(x+1)$

$$\implies \frac{-2x^2(x-1)}{\cancel{2x(x^2-1)}} + \frac{(2x+1)(x^2-1)}{\cancel{2x(x^2-1)}} + \frac{2x}{\cancel{2x(x^2-1)}} = 0 \implies$$

$$\implies -2x^3 + 2x^2 + (x^2-1)(2x+1) + 2x = 0 \implies 3x^2 - 1 = 0 \implies \mathbf{x} = \pm\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$$

5. Ecuaciones exponenciales

- ESTRATEGIA: Intentar secuencialmente estas estrategias. Si una no vale, siguiente.
    - CASO 1: Poner **ambos miembros como potencias de la misma base** e **igualar exponente**s.
    - CASO 2: **Cambio de variable** para convertir la ecuaciones en una no exponencial.
    - CASO 3: **Aplicar logaritmos** para intentar bajar los exponentes

- OJO: Cuidado con las propiedades de las potencias y ld os logaritmos, evita manipulaciones y simplificaciones erróneas.

- RECUERDA: LOGARITMO = HERRAMIENTA PARA BAJAR EXPONENTES

- EJEMPLO 5.1. CASO 1:

$$\mathbf{2^{x+1} - 5 = 59} \implies 2^{x+1} = 64 \implies 2^{x+1} = 2^6 \implies x + 1 = 6 \implies \mathbf{x = 5}$$

- EJEMPLO 5.2. CASO 2:

$$\mathbf{2^{x+3} + 2^x = 72} \implies 2^3 \cdot 2^x + 2^x = 72 \xrightarrow{\text{cambio } 2^x = t} 8t + t = 72 \implies t = \frac{72}{9} = 8$$

- Deshacemos el cambio $2^x = 8 \implies \mathbf{x = 3}$

- EJEMPLO 5.3. CASO 3:

$$\mathbf{2^{2x} = 5^{1-2x}} \xrightarrow{\text{tomar log}} \log 2^{2x} = \log 5^{1-2x} \implies 2x \log 2 = (1 - 2x)\log 5 \implies$$

$$\implies 2x \log 2 = \log 5 - 2x \log 5 \implies x(2 \log 2 + 2 \log 5) = \log 5 \implies \mathbf{x} = \frac{\log \mathbf{5}}{\mathbf{2}(\log \mathbf{2} + \log \mathbf{5})}$$

6. Ecuaciones logarítmicas - *comprobar soluciones*

- ESTRATEGIA: **Propiedades de los logaritmos**, hasta dejar **cada miembro como un solo logaritmo. Quitar logaritmos** por inyectividad (tacharlo en ambos miembros) o Introducir exponencial si es necesario para eliminarlos.

- *OJO: Hay que **comprobar soluciones** (no existen logaritmos de argumento cero o negativos) (se llama argumento a lo de dentro de una función)*

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

- EJEMPLO 6.1.

  $\log \mathbf{x} + \log \mathbf{5} = \mathbf{2} \implies \cancel{\log} 5x = \cancel{\log} 10^2 \implies 5x = 100 \implies \mathbf{x} = \mathbf{20}$ comprobada

- EJEMPLO 6.2: $\dfrac{\log(\mathbf{4} - \mathbf{x})}{\log(\mathbf{x} + \mathbf{2})} = \mathbf{2} \implies \log(4 - x) = 2\log(x + 2) \implies$

  $\implies \cancel{\log}(4 - x) = \cancel{\log}((x + 2)^2) \implies 4 - x = (x + 2)^2 \implies 4 - x = x^2 + 4x + 4 \implies$

  $\implies 0 = x^2 + 5x \implies \mathbf{x} = \mathbf{0};\ \cancel{x = -5}$ (Falsa)

7. Ecuaciones con valor absoluto - *comprobar soluciones*

- ESTRATEGIA: Distinguir el caso en el que el contenido del valor absoluto queda igual y en el que el contenido cambia de signo. Resolver y comprobar.

- *OJO: Si hay varias expresiones con valor absoluto, hay que distinguir todos los posibles casos y combinaciones de signos.*
- *OJO: Hay que* ***comprobar soluciones*** *(al resolver cada caso, pueden aparecer soluciones que no pertenecen al caso concreto; siempre comprobar en el enunciado)*

- EJEMPLO 7.1. $|\mathbf{x}^2 - \mathbf{2}| = \mathbf{2}$

  Distinguimos $\begin{cases} x^2 - 2 = 2 \\ -x^2 + 2 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 = 4 & \Rightarrow \quad x = \pm 2 \\ x^2 = 0 & \Rightarrow \quad x = 0 \end{cases}$

  Soluciones: $\mathbf{x} = -\mathbf{2}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{2}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (todas válidas)

- EJEMPLO 7.2. $|\mathbf{3x} + \mathbf{1}| = |\mathbf{2x} + \mathbf{4}|$ (o signos iguales, o signos opuestos)

  Distinguimos $\begin{cases} 3x + 1 = 2x + 4 \quad \Rightarrow \quad 3x - 2x = 4 - 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{3} \\ 3x + 1 = -(2x + 4) \Rightarrow \quad 3x + 2x = -4 - 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = -\mathbf{1} \end{cases}$

  Ambas válidas

- EJEMPLO 7.3. $|\mathbf{x} + \mathbf{3}| = |\mathbf{2x}| + \mathbf{2}$

  Cuatro combinaciones: $\begin{cases} x + 3 = 2x + 2 & \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{1} \quad ok \\ x + 3 = -2x + 2 & \Rightarrow \mathbf{x} = -\mathbf{1/3} \quad ok \\ -(x + 3) = 2x + 2 & \Rightarrow \cancel{x = 5/3} \\ -(x + 3) = -2x + 2 & \Rightarrow \cancel{x = 5} \end{cases}$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

8. Sistemas de ecuaciones no lineales - *comprobar soluciones*

- ESTRATEGIA: Método de **sustitución o** de **reducción**, utilizando las estrategias adecuadas vistas anteriormente para cada tipo de ecuación (eliminar raíces, cambios de variable, propiedades de logaritmos, etc.).

- EJEMPLO 8. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \implies \log\left(\frac{x}{y}\right) = 1 \implies \frac{x}{y} = 10 \implies x = 10y \end{cases}$

Sustituyendo (2) en (1): $(10y)^2 - y^2 = 11 \implies 99y^2 = 11 \implies y = \pm\dfrac{1}{3}$

Soluciones: $\mathbf{x = \dfrac{10}{3},\ y = \dfrac{1}{3}}$ $\quad$ $\mathbf{x = -\dfrac{10}{3},\ y = -\dfrac{1}{3}}$ *(comprobadas)*

9. Inecuaciones (una incógnita)

- ESTRATEGIA:
  - CASO **LINEALES**: **Despejar x**, obtener **desigualdad con x** y **pasar a intervalo.**
  - CASO **POLINÓMICA** (grado 2 o mayor): Obtener las **raíces del polinomio** (las **soluciones** al igualar a 0), y **estudiar el signo en los intervalos** resultantes.
  - CASO **DENOMINADORES CON x**: despejar hasta tener **cero en un miembro**, y **obtener raíces de numerador y de denominador.** Estudiar el **signo en los intervalos resultantes**, excluir denominadores negativos en la solución.
- *OJO: Trabaja igual que en ecuaciones salvo **al multiplicar o dividir la inecuación por números negativos** (eso **cambia el sentido de la desigualdad**)*
- EJEMPLO 9.1. $\mathbf{-2x + 3 > 5} \implies -2x > 2 \xrightarrow{:(-2)\ >\leftrightarrow<} x < -1 \implies \mathbf{x \in (-\infty, -1)}$
- EJEMPLO 9.2. $\mathbf{x^2 - 3x - 4 \geq 0} \overset{sols.}{\longrightarrow} x = 4$ y $x = -1$

  INTERVALOS: $\begin{cases} (-\infty, -1) & + \\ (-1,4) & - \\ (4,\infty) & + \end{cases} \implies \mathbf{x \in (-\infty, -1] \cup [4, \infty)}$

- EJEMPLO 9.3. $\mathbf{\dfrac{x-2}{x+1} \leq 0} \implies$ numerador raíz 2 y denominador –1

  INTERVALOS:

  $\begin{cases} (-\infty, -1) & + \\ (-1,2) & - \\ (2,\infty) & + \end{cases} \implies \mathbf{x \in (-1,\ 2]}\begin{cases} \text{el -1 anula el denominador, queda fuera (-1,} \\ \text{el 2 está incluido por ser } \leq 0 \text{ queda dentro ,2]} \end{cases}$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

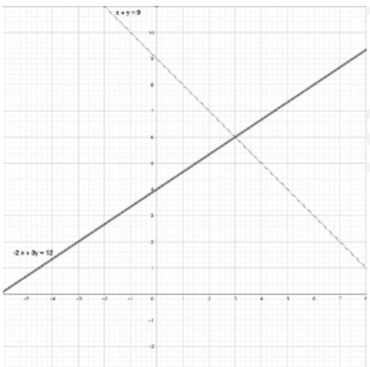
10. Sistemas de inecuaciones

- ESTRATEGIA:
    - **UNA INCÓGNITA: Intersección de las soluciones obtenidas por separado o comprobar intervalos en expresión original.**
    - **DOS INCÓGNITAS**: **Representar las regiones** del plano *(importante que calcules los puntos de corte con los ejes y también entre las distintas rectas resolviendo el sistema, serán vértices de la región)*, y **dar valores** en cada región hasta encontrar la **solución gráfica.**

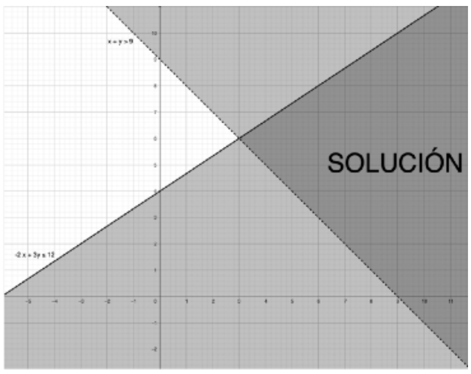
- EJEMPLO 10.1. UNA INCÓGNITA: $\begin{cases} -2x-3>-5 & \Longrightarrow\ x \in (-\infty,1) \\ \frac{x-2}{x+1} \leq 0 & \Longrightarrow\ x \in (-1,\ 2] \end{cases} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow\ x \in (\infty,\ 1) \cap (-1,2) = (\mathbf{-1},\ \mathbf{1})$$

- EJEMPLO 10.2. DOS INCÓGNITAS. $\begin{cases} x+y & >9 \\ -2x+3y & \leq 12 \end{cases} \Longrightarrow$ *Corte entre rectas (3,6)*



REPRESENTAR RECTAS



VALORES Y SOLUCIÓN

TEMA 1 - EJERCICIOS

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

Tema donde se repasan también procedimientos algebraicos básicos aprendidos en la ESO y que supondrán la base necesaria para poder avanzar en los contenidos del curso

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Ejercicio 0. RADICALES Y RACIONALES

a) $\sqrt{2x}+\sqrt{5x-6}=4$

b) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=3$

c) $\sqrt{\dfrac{7x+1}{4}}=\dfrac{5x-7}{6}$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x}{8}$

e) $\sqrt[3]{4x-1}=x-4$

f) $\sqrt{2x+2}-\sqrt[4]{6x+10}=0$

g) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{7}{8}$

h) $\dfrac{2x}{x-2}+\dfrac{3x}{x+2}=\dfrac{6x^2}{x^2-4}$

i) $\left(\dfrac{x^2-16}{x-1}:\dfrac{x+4}{x^2-1}\right)-(x^2-4x)=0$

j) $x-\dfrac{2x-6}{2x-x^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{7-3x}{x-2}$

k) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{2x^2-4x}=\dfrac{1}{2x-4}$

Sols: a) 2. b) 3. . c) 5. . d) 4. e) 7. f) 1. g) 2. h) 0. i) 4. j) 1. k) 8/5

Ejercicio 1. EXPONENCIALES

a) $3^{x+1}\cdot 9^{x+1}=1$

b) $3^{x^2+1}-9^{x}=0$

c) $2^{x+1}+2^{x}+2^{x-1}=28$

Sols. a) x=-1 *b) x=1* *c) x=3*

d) $9\cdot 2^{x}+4^{x+1}=2(2^{2x+2}+1)$ *sols: -2 y 1*

e) $3^{x+1}+9^{x-1}-162=0$ *sol: 3*

f) $1+9^{x}=3^{x+1}+3^{x-1}$ *sols: -1 y 1*

g) $\sqrt{e^{2x-1}}-3=0$ *sol: ln)(3)+1/2*

h) $\sqrt{2^{x-3}}-\dfrac{1}{2}=0$ *sol: 1*

i) $7^{1+2x}+7=\dfrac{50}{7^{-x}}$ *sols: -1 y 1*

j) $3^{x}+\dfrac{1}{3^{x-1}}=4$ *sols: 0 y 1*

k) $(5^{x-1}-10)\cdot\left(\sqrt{2^{3x+3}}-8\right)=0$

l) $3^{2x+1}-27=0$ *sol: 1*

m) $(9^{x}-3^{x}-6)\cdot\left(\sqrt{7^{x-3}}-2\right)=0$

n) $(5^{2x}-13)\cdot\left(\sqrt{2^{3x+1}}-2\right)=0$

sols:k) 1 y 2+$\log_5(2)$ m) :1 y 3+2$\log_7(2)$ n) 1/3 y $\dfrac{1}{2}\log_5 13$

Ejercicio 2. LOGARÍTMICAS

a) $\log(1+9x)=1+2\cdot\log x$

b) $\log(x-3)+\log(x+1)=\log 3+\log(x-1)$

c) $\log 2+\log\left(11-x^2\right)=2\cdot\log\left(5-x\right)$

d) $2\log x=\log(10-3x)$

Soluciones: a) x=1 b) x=5 c) x=3, 1/3 d) x=2

h) $\log\sqrt{2x-3}+\log\sqrt{x-5}+1=\log 30$ *sol: 6*

i) $\log\sqrt{3x+1}-\log\sqrt{2x-3}-1=-\log 5$ *sol: 13/5*

j) $\log(x^2+1)-[\log(x-1)+\log(x+1)]=1$ *sol: $\sqrt{11}/3$*

Ejercicio 3. Logarítmicas por cambio de base $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$ *(el c que queramos)*

a) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{x} + \log_3 x + \log_9 x^2 = \log_3 64$ *RESUELTO:*

Cambio de base $\dfrac{\log_3 \sqrt{x}}{\log_3 \sqrt{3}} + \log_3 x + \dfrac{\log_3 x^2}{\log_3 9} = \log_3 64 \implies \log_3 x + \log_3 x + \log_3 x = \log_3 64 \implies$

$\implies 3\log_3 x = \log_3 64 \implies x^3 = 64 \implies$ *sol: x=4*

b) $\log_{1/5} x + \log_5 x = 1 + \log_{25} x$ (cambio base: $\dfrac{\log_5 x}{\log_5 (1/5)} + \log_5 x = 1 + \dfrac{\log_5 x}{\log_5 25}$) *Sol: 1/25*

c) $\dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_9 x} + \dfrac{1}{\log_{27} x} = 2$ *sol: 27*

d) $2 \cdot \log_x 3 + \log_x 27 = -5$ *sol: 1/3*

Ejercicio 4. ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

a) $|x^2 - 8x| = 2x$ *sol: 0, 6, 10*

b) $|2x^2 - 4x| = 2x$ *sol: 0, 1, 3*

c) $|x - 5| = 3x - 1$ *sol: 3/2*

d) $|x + 2| = |x - 6|$ sol: 2

e) $|x^2 - 3x + 1| = 1$ *sol: 0, 1, 2, 3*

f) $|x^2 - x| = |1 - x^2|$ *sol: -1/2, 1*

f) $|x| + 1 = |3x - 5|$ *sol: 1,3*

g) $|x^2 - 1| = |x - 1|$ *sol: 0,1,-2*

Ejercicio 5. SISTEMAS EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICOS.

a) $\left.\begin{array}{r} 3^{2x+y} = 2187 \\ 3^{x-2y} = 3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x-1} + 5^{y+1} = 9 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{array}\right\}$

sols a) x=3 y=1 b) x=3 y=0 c) x=10/3 y=1/3 d) x=100 y=10

e) $\begin{cases} \log_2(3^y - 1) = x \\ 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 6 \end{cases}$ (3,2)

f) $\begin{cases} \log_4(3^y - 1) = x \\ 3 \cdot 4^x - 2 \cdot 3^y = 6 \end{cases}$ (3/2,2)

g) $\begin{cases} \log_6(3^x - 1) + \log_6(3^x + 1) = y \\ 6^y - 3^x = 1 \end{cases}$ $(\log_3 2, \log_6 3)$

h) $\begin{cases} \log_3(x + y) - \log_3(x - y) = 1 \\ 2^x + 3 \cdot 2^{2y} = 16 \end{cases}$ (2,1)

i) $\begin{cases} \log_y(9 - x) = \frac{1}{2} \\ \log_x(y + 9) = 2 \end{cases}$ (5,16)

j) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 12 \\ 2^{x-2y} = 1 \end{cases}$ (4,2)

k) $\begin{cases} 8^{x-2} - 2^{1-3y} = 0 \\ \log_2 2x + \log_2 3y = 2 \end{cases}$ (2,1/3) y (1/3,2)

l) $\begin{cases} 27^{x-1} - 3^{2-3y} = 0 \\ \log_2 2x + \frac{1}{2}\log_2 9y^2 = 2 \end{cases}$ (1,2/3) y (2/3,1) y (2,-1/3)

Nota: $\frac{1}{2}\log 9y^2 = \log\sqrt{9y^2} = \log(3|y|)$ (y vale para valores negativos)

m) $\begin{cases} \log(x + 1) - \log y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ (4,1/2)

n) $\begin{cases} \ln(x + y) + \ln(x - y) = \ln 33 \\ e^x \cdot e^y = e^{11} \end{cases}$ (7,4)

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Ejercicio 6. INECUACIONES.

a) $|2x-\dfrac{2}{5}|\geq 2$ b) $|x^3+4x|\leq 4x^2$ c) $\dfrac{x(x^2-9)}{15-3x}\leq 0$

d) $\dfrac{-2x-5}{x^2-1}\leq 0$ e) $\dfrac{x(2-x)}{x+3}\leq 0$

Sol:a) $(-\infty,-4/5]\cup[6/5,+\infty)$ b) 0,-2,2. c) $(-\infty,-3]\cup[0,3]\cup(5,+\infty)$ d) $[-5/2,-1)\cup(1,+\infty)$ e)$(-3,0]\cup[2,+\infty)$

Ejercicio 7. SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA.

a) $\left.\begin{array}{l} x^2-5x+4\leq 0 \\ 3x-9<0 \end{array}\right\}$ b) $\begin{cases} 2x^2-x>6 \\ x^2-9\leq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+x\geq 2 \\ 10x-5<0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{1-x}{x^2-5x}\geq 0 \\ 2x-3(2+x)<5x-18 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x^2+1}\geq 0 \\ 2x-3(2+x)<5x-18 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2+4x}>0 \\ 6x-6\geq x-16 \end{cases}$

g) $\begin{cases} (2-x)\leq 0 \\ \dfrac{12+4x}{x^2-9}>0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x^2+x\geq 2 \\ 10x(x+1)<0 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x^2+x<6 \\ 2x-1\geq 3x \end{cases}$ j) $\begin{cases} x^2+x>6 \\ 2x-1\leq 3x \end{cases}$

Sol: a) $[1,3)$ b)[-3,-3/2)U(2,3] c)$(-\infty,-2]$ d)(2,5) e)$[3,+\infty)$ f)$[-2,0)\cup(2,+\infty)$
g)$(3,+\infty)$ h) $\varnothing$ i)(-3,-1] j)$(2,+\infty)$

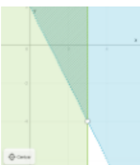
Ejercicio 8. SISTEMAS DE INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS.

a) $\left.\begin{array}{l} 2x+y>2 \\ x\leq 3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x+y>9 \\ -2x+3y\leq 12 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} 2x-y<4 \\ 3x\geq 3 \end{array}\right\}$

d) $\begin{cases} y\leq 2x+5 \\ y\geq -x+6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-2y\leq 0 \\ 3x+y>3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y\geq -2 \\ x-y\geq 2 \end{cases}$

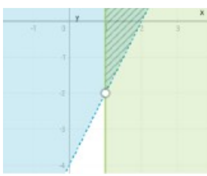
g) $\begin{cases} y\leq 2x+5 \\ y\geq -x+8 \\ y<0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x-2y\leq 0 \\ 3x+y<3 \\ x>-1 \end{cases}$

A)



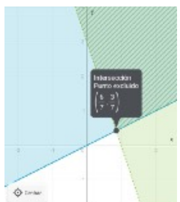
B)

C)

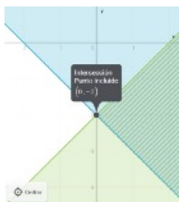


D)

E)

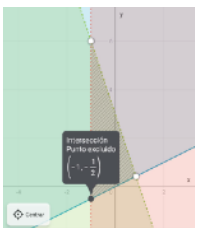


F)



I)

H)



IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

TEMA 2a - APUNTES

Trigonometría (resolución de triángulos)

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Tema donde se repasa y amplía lo aprendido en 4º de ESO sobre trigonometría, con el objetivo de aprender a resolver cualquier triángulo.

0. Introducción

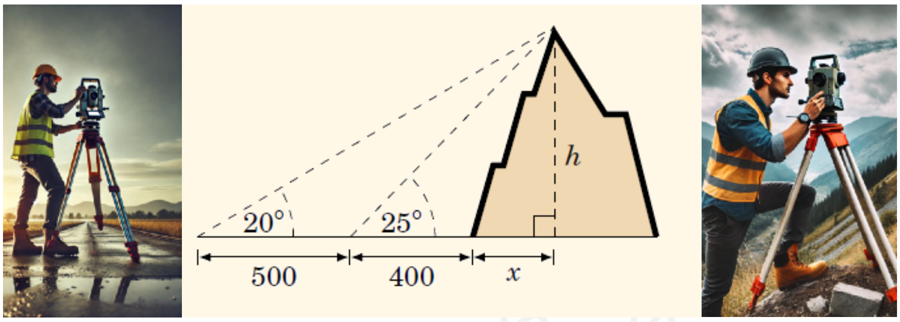
La **trigonometría** estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos.

Etimologia: tri (tres) - gono (ángulo) - metría (medida).

Utilidad: permite resolver muchos problemas geométricos con aplicaciones prácticas:

Ejemplo utilidad 1: *TOPOGRAFÍA: altura de una montaña (imposible desde su base)*

Sistema trigonométrico usando las tangentes:



$$\begin{cases} \tan(20^\circ) = \dfrac{h}{500+400+x} = \dfrac{h}{900+x} & \Longrightarrow h = (900+x)\cdot\tan(20^\circ) \\ \tan(25^\circ) = \dfrac{h}{400+x} & \Longrightarrow h = (400+x)\cdot\tan(25^\circ) \end{cases}$$

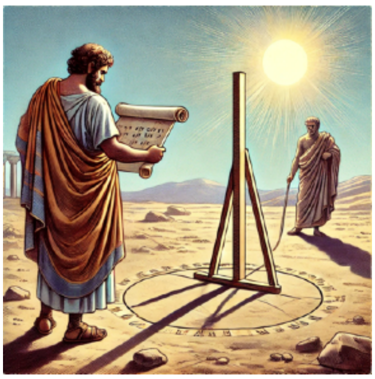
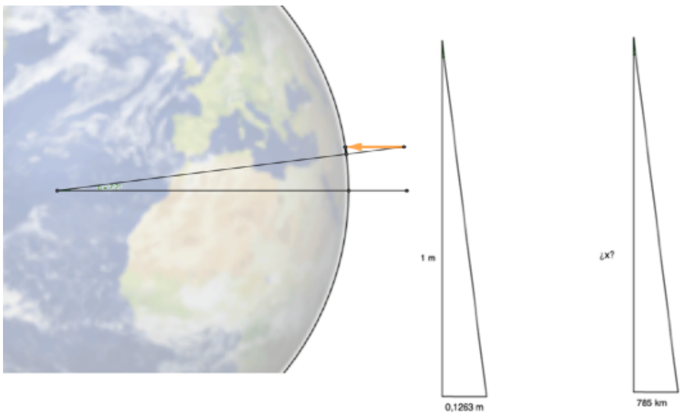
Igualando: $(900+x)\cdot\tan(20^\circ) = (400+x)\cdot\tan(25^\circ)$

$$x = \frac{900\cdot\tan(20^\circ) - 400\cdot\tan(25^\circ)}{\tan(25^\circ)-\tan(20^\circ)} = 829{,}23\ m$$

IES Sofía Casanova Alberto José Fuentes

Ejemplo utilidad 2: *Recreación adaptada de la medición histórica del Planeta Tierra*

Eratóstenes (255 a.C.) observó que en Siena (hoy Asuán), los rayos del sol caían directamente en el solsticio de verano (está justo en el Trópico de Cáncer), sin proyectar sombra. Pero en Alejandría, al mismo tiempo, una vara proyectaba una sombra, lo que indicaba que la Tierra tenía curvatura. Midió en ese momento la sombra de la una vara:

Los datos aproximados que manejaremos:

- *Distancia de Alejandría y Asuán*: 5000 estadios x 157 m por estadio = 785000 m.
- *Sombra de la vara*: 12,63 cm. Aproximamos la situación a triángulos rectángulos:

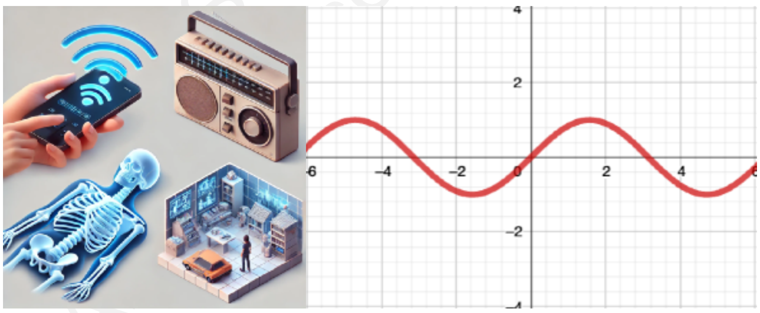
Por **semejanza**: $\frac{x}{1} = \frac{785000}{0{,}1263} \implies x = 6215{,}36\ km$

(¡medida del radio de la tierra, frente a la medida actual 6378 km!)

Usando **trigonometría**: $\tan\alpha = \frac{0{,}1263}{1} \implies \alpha \approx 7{,}2^\circ$

$\frac{7{,}2^\circ}{360^\circ} = \frac{785}{y} \implies y = 39250\ km$ (¡40074 km es la medida actual!)

Otros usos: cualquier problema geométrico en el que intervengan ángulos (números complejos, geometría analítica, diseño gráfico 2D y 3D…) necesita la trigonometría. **Como funciones, *sen* y *cos* son el modelo matemático de las ondas, y hay una infinidad de realidades cuya naturaleza son las ondas: señales inalámbricas, luz, energía, terremotos, sonido, radiación… Es una herramienta imprescindible.**



https://www.youtube.com/watch?v=OmKYMU3CyBU

Vídeo donde se explica el uso de triangulaciones, y distintos instrumentos de topografía, en el Imperio Romano. En él se muestra la importancia de las matemáticas, de los triángulos, y de la trigonometría para poder construir acueductos, hacer mapas o trazar carreteras rectas.

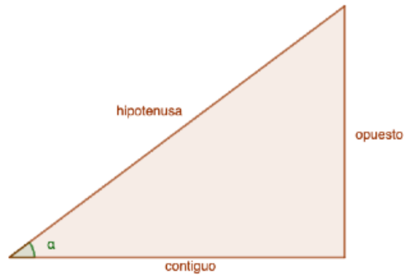
1. Unidades angulares y razones trigonométricas.

Grados y radianes: el círculo se divide en 360 grados = 2π radianes. Conversión:

$$\boxed{\frac{\pi}{180} \times \text{grados} = \text{radianes} \qquad \frac{180}{\pi} \times \text{radianes} = \text{grados}}$$

Razones trigonométricas principales: *seno*, *coseno* y *tangente*:

- $\sin\alpha = \dfrac{opuesto}{hipotenusa}$
- $\cos\alpha = \dfrac{contiguo}{hipotenusa}$
- $\tan\alpha = \dfrac{opuesto}{contiguo}$



TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Inversas: *secante*, *cosecante* y *cotangente*:

- $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ • $\csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$ • $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

Usos: resolución de triángulos rectángulos, dados unos datos, conocer los demás.

Identidades fundamentales: $\boxed{(1)\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (2)\ \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

DEMOSTRACIÓN (1): Pitágoras: $opuesto^2 + contiguo^2 = hipotenusa^2$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{opuesto^2}{hipotenusa^2} + \frac{contiguo^2}{hipotenusa^2} = \frac{opuesto^2 + contiguo^2}{hipotenusa^2} = \frac{hipotenusa^2}{hipotenusa^2} = 1$$

DEMOSTRACIÓN (2): $\tan\alpha = \dfrac{opuesto}{contiguo} = \dfrac{\frac{opuesto}{hipotenusa}}{\frac{contiguo}{hipotenusa}} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

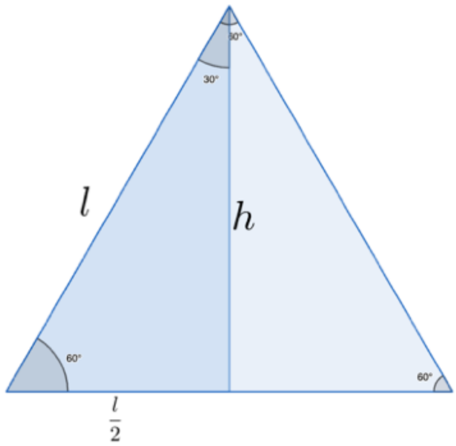
Primer uso: conocida una de las razones (seno, coseno o tangente), calcular las demás:

Ejemplo: Si $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$, calcula $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$. Usamos las identidades fundamentales.

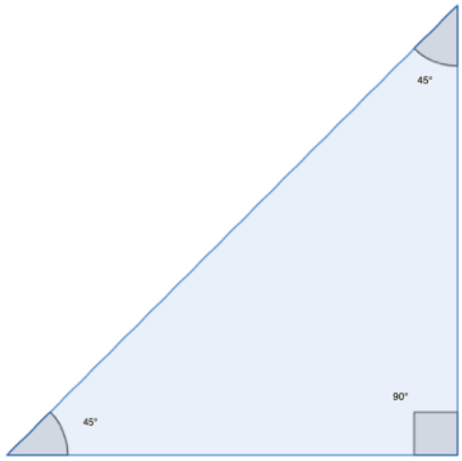
$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3} / \frac{1}{3} = 2\sqrt{2}$$

2. Razones trigonométricas de ángulos conocidos (1º cuad.)

- Si dividimos en dos partes un triángulo equilátero mediante su altura, obtenemos un triángulo rectángulo de ángulos 30º, 60º y 90º. Aplicando las razones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras a ese triángulo, obtenemos el valor de seno, coseno y tangente.



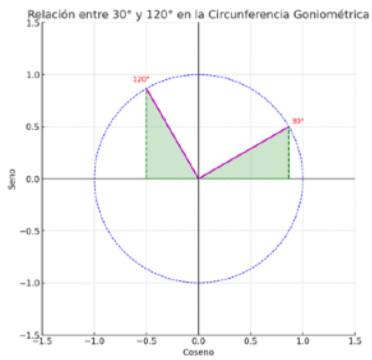
- En un triángulo isósceles resultante de dividir un cuadrado en dos mediante su diagonal, obtenemos un triángulo rectángulo con ángulos 45º, 45º y 90º. Razonando igual, obtenemos las razones de 45º.

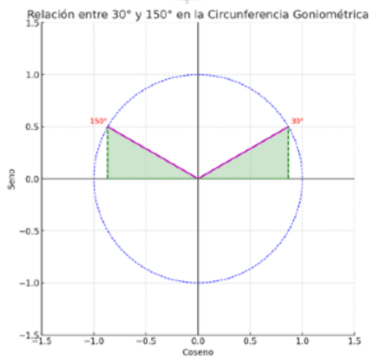


Ángulo/ razón	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

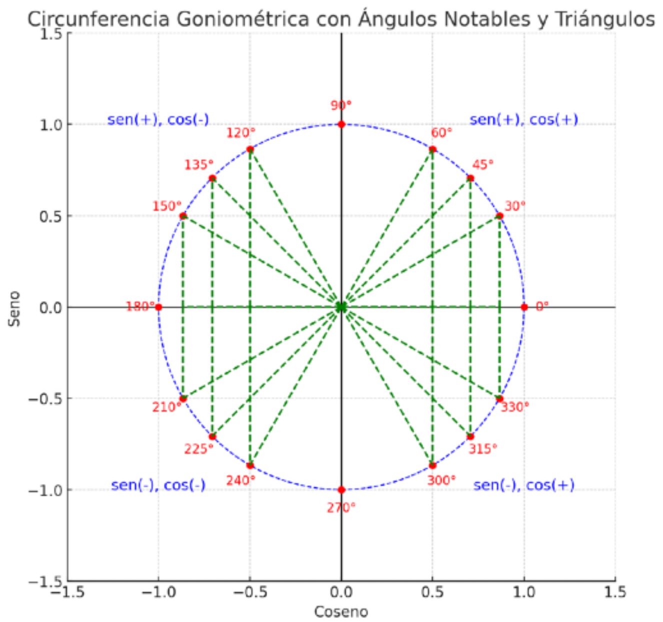
Circunferencia goniométrica: circunferencia de radio uno, útil para trigonometría, porque la medida del cateto vertical mide exactamente el valor del seno del ángulo que forma y la del cateto horizontal exactamente el valor del coseno.

Sobre la circunferencia goniométrica podemos comprobar que aparecen triángulos equivalentes en los distintos cuadrantes. Razonando de esa forma, podemos ampliar la tabla para ángulos conocidos entre 0º y 360º. Por ejemplo, comparando 30º, 120º y 150º, vemos que son semejantes y las medidas se relacionan:





3. Razones trigonométricas de ángulos conocidos (todos los cuadrantes)



Ángulo/ razón	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	Cuad.
$0^\circ = 0$	0	1	0	
$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1°cuad
$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	
$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	
$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$	
$120^\circ = \frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	2°cuad
$135^\circ = \frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	
$150^\circ = \frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	
$180^\circ = \pi$	0	-1	0	
$210^\circ = \frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	3°cuad
$225^\circ = \frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	
$240^\circ = \frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	
$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\nexists$	
$300^\circ = \frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	4°cuad
$315^\circ = \frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	
$330^\circ = \frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	
$360^\circ = 2\pi$	0	1	0	

No es necesario memorizar todos los valores, se trata de saber relacionar los ángulos que ya conocemos (30º, 45º y 60º) con los de los demás cuadrantes buscando las equivalencias comentadas y teniendo en cuenta los signos:

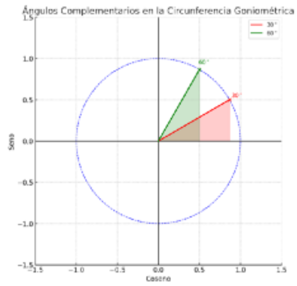
Cuadrante	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
1º	+	+	+
2º	+	-	-
3º	-	-	+
4º	-	+	-

Tratad de reproducir esta tabla y el dibujo, estableciendo las relaciones comentadas. Cuando seáis capaces de construirla sin errores, y lo comprendáis sin fisuras, tendréis adquirida gran parte de la base trigonométrica y la intuición necesaria para todo lo que queda de bachillerato.
En calculadoras CASIO nuevas, la función MathBox/ circunferencia puede ser de ayuda.

4. Relacionales entre razones trigonométricas

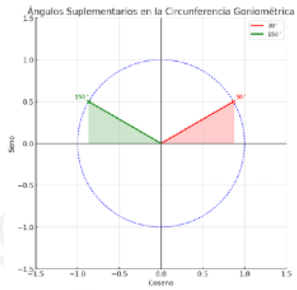
Complementarios α **y** $90^\circ - \alpha$

$$\begin{cases} \cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha) \\ \sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha) \\ \tan(90^\circ - \alpha) = \cot(\alpha) \end{cases}$$



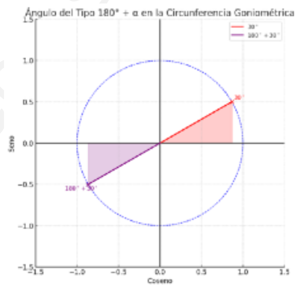
Suplementarios α **y** $180^\circ - \alpha$

$$\begin{cases} \sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha) \\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha) \\ \tan(180^\circ - \alpha) = -\tan(\alpha) \end{cases}$$



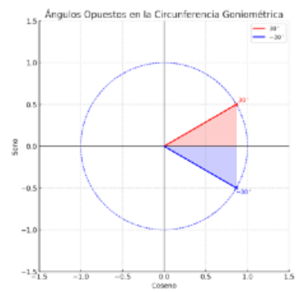
Ángulos α **y** $180^\circ + \alpha$

$$\begin{cases} \sin(180^\circ + \alpha) = -\sin(\alpha) \\ \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos(\alpha) \\ \tan(180^\circ + \alpha) = \tan(\alpha) \end{cases}$$



Opuestos α **y** $360^\circ - \alpha$

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \\ \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \\ \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \end{cases}$$



Se pueden obtener otras relaciones, basta dibujar la situación y encontrar las equivalencias entre las razones.

Para **ángulos mayores que** 360°, se repiten los valores ya que supone dar vueltas sobre la misma circunferencia. Basta dividir el ángulo entre 360° (división entera). El cociente será el número de vueltas completas dadas (irrelevante para el resultado), y el resto, el ángulo sobrante:

$$\sin 870^\circ \implies 870 \div 360 = 2 \to resto = 150 \implies \sin 870^\circ = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}$$

5. Teorema de los senos y teorema del coseno.

En cursos pasados vimos como resolver triángulos rectángulos, y cualquier otro triángulo mediante la estrategia de la altura. En la introducción se puede ver un ejemplo (medición de una montaña). Existen dos teoremas que permiten resolver triángulos de forma más directa: el de los senos y el del coseno:

Teorema de los senos

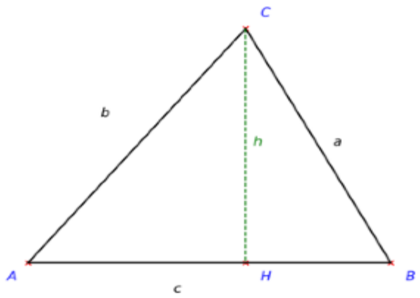
En un triángulo cualquiera con lados a, b, c y ángulos opuestos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Demostración. Estrategia de la altura: $\begin{cases} h = b \sin \hat{A} \\ h = a \sin \hat{B} \end{cases}$

Igualando y despejando: $\dfrac{a}{\sin \hat{A}} = \dfrac{b}{\sin \hat{B}}$ **CQD**

Para completar con c y C, basta tomar otras alturas.



Teorema del coseno

En un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

Los ángulos y los lados son intercambiables, obteniendo: $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\hat{B}) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C}) \end{cases}$

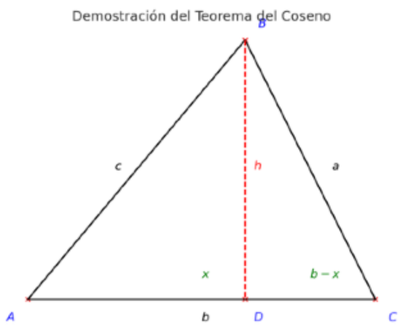
Demostración. Pitágoras en ambos lados:

$\begin{cases} a^2 = h^2 + (b-x)^2 \\ c^2 = h^2 + x^2 \end{cases}$ y en la derecha: $x = c \cos \hat{A}$.

Sustituyendo: $\begin{cases} a^2 = h^2 + (b - c \cos \hat{A})^2 \\ c^2 = h^2 + c^2 \cos^2 \hat{A} \end{cases} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \begin{cases} a^2 = h^2 + b^2 - 2bc \cos \hat{A} & +c^2 \cos^2 \hat{A} \\ c^2 = h^2 & +c^2 \cos^2 \hat{A} \end{cases}$ restándolas:

$\Longrightarrow \begin{cases} a^2 = \cancel{h^2} + b^2 - 2bc \cos \hat{A} & \cancel{+c^2 \cos^2 \hat{A}} \\ c^2 = \cancel{h^2} & \cancel{+c^2 \cos^2 \hat{A}} \end{cases}$ despejando $a^2 \Longrightarrow \mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})}$ **CQD**



IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes

Casos. *(no hay por qué aprendérselos de memoria, pero conviene conocer las situaciones posibles)*

Teorema de los senos:

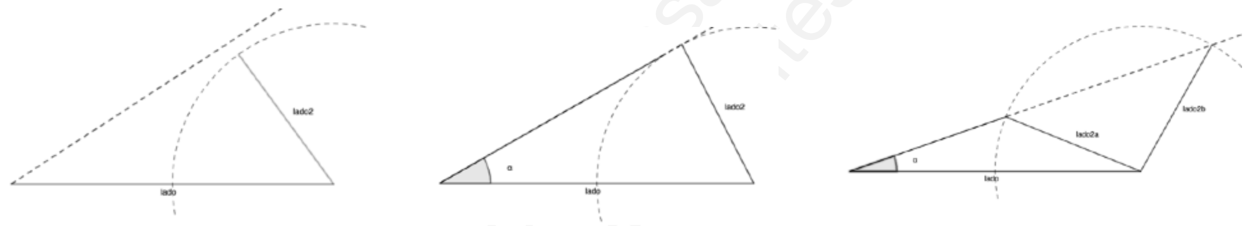
Lo usamos conocidos dos o tres ángulos:
- Angulo - Lado - Angulo (ALA) - Angulo - Angulo - Lado (AAL) - Lado - Lado - Angulo (LLA) - OJO 2, 1 o 0 soluciones

Teorema del coseno:

Lo usamos conocidos tres lados, o dos lados y el ángulo comprendido.
- Lado - Ángulo - Lado (LAL) - Lado - Lado - Lado (LLL)

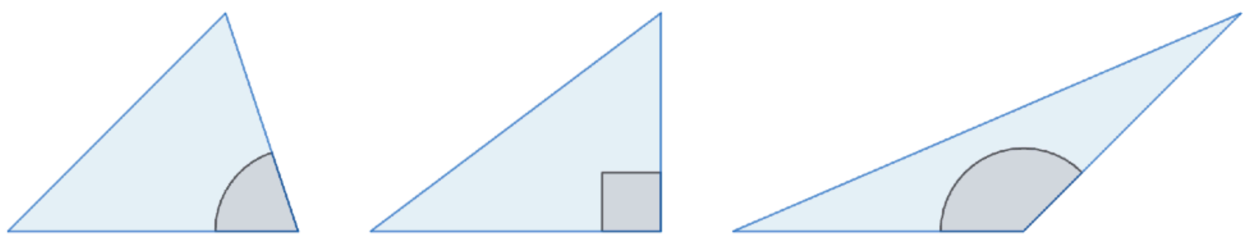
Para calcular ángulos en estos casos LAL y LLL, usad el Th. del Coseno *para evitar ambigüedades (con el seno, hay dos soluciones posibles (1° y 2° cuadrante, A y 180-A), si usamos el del coseno aseguramos en qué cuadrante estamos gracias al signo positivo (1º) o negativo (2º) del cálculo de $\cos \alpha$)*

Caso ambiguo LLA: sin solución, una solución, dos soluciones (hay que evaluar las posibles soluciones del seno en el 1° y 2° cuadrante (α y $180^\circ - \alpha$)



Recuerda: la suma de los ángulos de un triángulo es 180º. Si alguna solución obtenida, (α o $180^\circ - \alpha$) hace que la suma sea mayor, debe descartarse.

Teorema del coseno como ampliación del Teorema de Pitágoras:



El teorema del coseno amplía al Teorema de Pitágoras para cualquier triángulo.

- Triángulos rectángulos (medio): $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos(\hat{90}) = b^2 + c^2$ (Pitágoras)
- Acutángulo (1° cuad), cos>0, el lado "hipotenusa"más pequeño, (resta $-2bc\,\cos(\hat{A})$)
- Obtusángulo (2° cuad), cos<0, lado "hipotenusa" más grande (suma $2bc\,\cos(\hat{A})$)

Resumen de fórmulas

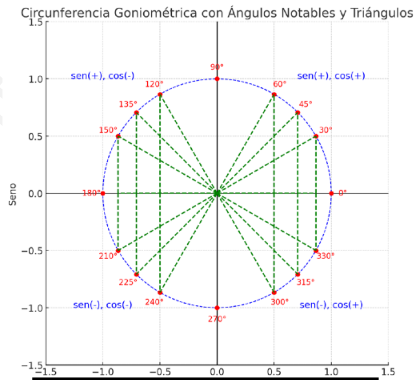
Razones: $\sin\alpha = \dfrac{opuesto}{hipotenusa}$ • $\cos\alpha = \dfrac{contiguo}{hipotenusa}$ • $\tan\alpha = \dfrac{opuesto}{contiguo}$

Inversas: $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ • $\csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$ • $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

Identidades fundamentales: 1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (2) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Ángulos conocidos / signos / relaciones

Ángulo/ razón	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	Cuad.
$0^\circ = 0$	0	1	0	
$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1ºcuad
$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1ºcuad
$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	1ºcuad
$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$	



Cuadrante	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
1º	+	+	+
2º	+	-	-
3º	-	-	+
4º	-	+	-

Teorema de los senos

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

Teorema del coseno

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A}) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\hat{B}) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C}) \end{cases}$$

Memoria de calculadora para conseguir precisión sin errores de redondeo

Ans - Último resultado. **PreAns** - Penúltimo resultado.
Modelo clásico: **STO** y **tecla con letra rosa encima**: guarda resultado actual en esa letra
Modelo nuevo: Tecla (⇆⊠ **VARIABLE**) para guardar valores en letras.

Letras accesibles con shift+tecla en la que se encuentra la letra (normalmente en rosa o dorado)

TEMA 2a - EJERCICIOS

Trigonometría

Tema donde se repasa y amplía lo aprendido en 4º de ESO sobre trigonometría, con el objetivo de aprender a resolver cualquier triángulo

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Ejercicio 1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

1.1. Hallar las razones trigonométricas de los ángulos x y $(\pi + x)$ sabiendo que

$$\cos x = -\frac{3}{5}; \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

Sol: $\sin x = \frac{4}{5}$, $\tan x = -\frac{4}{3}$, $\cos(\pi + x) = -\cos x = \frac{3}{5}$, $\sin(\pi + x) = -\sin x = -\frac{4}{5}$, $\tan(\pi + x) = \tan x = -\frac{4}{3}$

1.2. Si $\sec A = 3$ y el ángulo es menor de 90°, calcula las restantes razones trigonométricas de A.

Sol: $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos A = \frac{1}{3}$, $\tan A = 2\sqrt{2}$.

1.3. Si $\sin 27^\circ = 0{,}45$, calcula: $\sin(-27^\circ)$, $\cos 63^\circ$, $\sin 207^\circ$, $\tan 333^\circ$, $\cot 1953^\circ$

Sol: $\sin(-27^\circ) = -0{,}45$, $\cos 63^\circ = 0{,}45$, $\sin 207^\circ = -0{,}45$, $\tan 333^\circ = -\tan 27^\circ$, $\cot 1953^\circ = -\cot 27^\circ$.

1.4. Si $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ y $\tan \alpha > 0$, calcula $\cos \alpha$ y $\tan \alpha$.

Sol: $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

1.5. Si $\sin 47^\circ = 0{,}73$ y $\cos 47^\circ = 0{,}68$, calcula razonadamente (sin usar la calculadora):

$\sin(-47^\circ)$, $\cos 43^\circ$, $\cos 133^\circ$, $\sin 227^\circ$, $\tan 313^\circ$, $\tan 3647^\circ$

Sol: $\sin(-47^\circ) = -0{,}73$, $\cos 43^\circ = 0{,}73$, $\cos 133^\circ = -0{,}68$, $\sin 227^\circ = -0{,}73$, $\tan 313^\circ = -\tan 47^\circ$, $\tan 3647^\circ = \tan 47^\circ$.

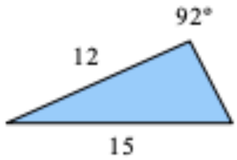
IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Ejercicio 2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS. TEOREMAS DEL SENO Y DEL COSENO

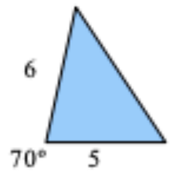
2.1. Resuelve los triángulos siguientes:

a)

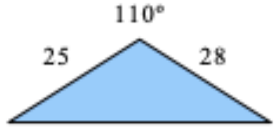
b)



c)



d)



e) $a = 70\ m,\ b = 55\ m,\ C = 73°$

f) $b = 17\ m,\ A = 70°,\ C = 35°$

g) $a = 12\ m,\ c = 7\ m,\ B = 108°$

h) En un triángulo ABC conocemos BC = 1200 m, BA = 700 m y B = 108°. Obtén AC.

i) a = 7 m, b = 12 m y Â = 22°

j) $A = 48°30' \quad b = 15m \quad c = 21m$

sol: resolver en https://matematicasinteractivas.com/calculadora-resolver-triangulos/

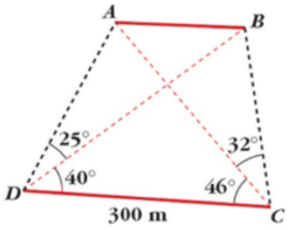
Ejercicio 3. PROBLEMAS DE RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

3.1. Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50°, y otro B, situado al otro lado y en línea recta, con uno de 60°. Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 kilómetros del pueblo A y a 4 del pueblo B, calcula la distancia entre los pueblos A y B. *Sol: 8,27 km*

3.2. Dos barcos salen de un puerto a la misma hora con rumbos distintos, formando un ángulo de 110°. Al cabo de 2 horas, el primer barco está a 34 km del punto inicial y el segundo barco, a 52 km de dicho punto. En ese mismo instante, ¿a qué distancia se encuentra un barco del otro? *Sol: 71,20km*

3.3. Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Alberto y Berto hay 25 metros, y entre Berto y Camilo, 12 metros. El ángulo formado en la esquina de Camilo es de 20°. Calcula la distancia entre Alberto y Camilo. *Sol: 35,94 m*

3.4. Una valla cuyo perímetro tiene forma triangular mide 20 metros en su lado mayor, 6 metros en otro y 60° en el ángulo que forman entre ambos. Calcula cuánto mide el perímetro de la valla. *Sol: 20+6+17,78=43,78 m*



3.5. Queremos calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles, A y B. Desde C y D se toman los datos: $CD = 300m$, $ADB = 25^\circ$, $ACB = 32^\circ$, $ACD = 46^\circ$, $BDC = 40^\circ$. Calcula AB.

Sol: diagonal AC=291,24 m *lado BC=218,40m* *lado **AB=156,96m***

3.6. El punto más alto de un repetidor de televisión, situado en la cima de una montaña, se ve desde un punto del suelo P bajo un ángulo de 67°. Si nos acercamos a la montaña 30 m lo vemos bajo un ángulo de 70° y desde ese mismo punto vemos la cima de la montaña bajo un ángulo de 66°. Calcular la altura del repetidor.

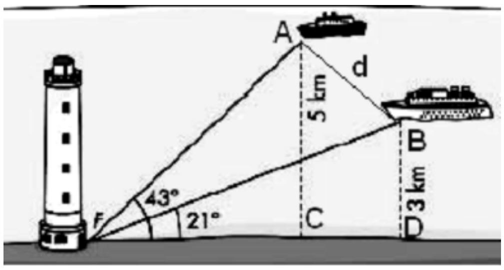
*Sol: calcular ángulos 4º-110º-3º con th senos- lado x=527,65 m - **altura = 90,49 m***

3.7. Las diagonales de un paralelogramo miden 10 cm y 14 cm y forman un ángulo de 75°. Calcula los lados del paralelogramo. Calcula su área.

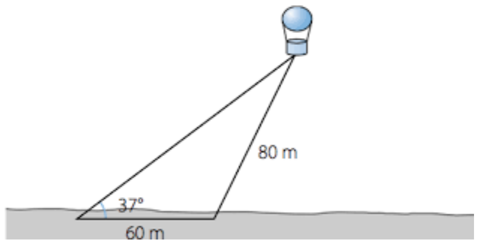
*Lados 9,5978 cm, 7,475 cm Ángulos: 44,78+64,75=109,54º -> 70,45º -> altura 7,0444cm ->9,5978*7,044=**67,61cm2***

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

3.8. Desde un faro F se observa un barco A bajo un ángulo de 43° con respecto a la línea de costa; y un barco B, bajo un ángulo de 21°. El barco A está a 5 km de la costa, y el B, a 3 km. Calcula la distancia entre los barcos. *Sol:AF=7,33km, BF=8,37km **d=3,16 km***



3.9. Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 metros. El cable más corto mide 80 metros y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37°. Calcula:



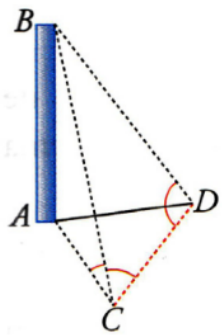
a. La medida del otro cable. (*119,31 m*)

b. La distancia del globo al suelo. (*71,80 m*)

c. Todos los ángulos del triángulo que se forma. (*26º50', 116º10'*)

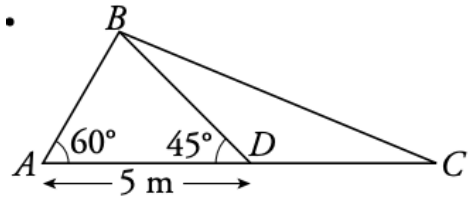
3.10. Para medir la altura de la torre AB, nos situamos en los puntos C y D y tomamos estas medidas: $\overline{CD} = 15m$; $\angle ACB = 40^\circ$; $\angle BCD = 58^\circ$; $\overline{BDC} = 70^\circ$

¿Qué altura tiene la torre? (*Sol: BC=17,89m **AB = 11,5m***)



3.11. De un triángulo ABC conocemos los tres lados $a = 14\,cm, b = 16\,cm\ y\ c = 9,$ cm. Halla la longitud de la bisectriz del ángulo en el vértice A (utiliza el teorema de los senos y el teorema de coseno). *Sol: B=80º13'11"31.* ***A/2=30º20'36'', bisectriz 9,94 m***

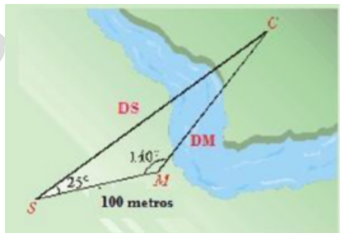
3.12. De esta figura sabemos que $\overline{BD} = \overline{DC}, \hat{A} = 60^{\circ},$ $A\hat{D}B = 45^{\circ}$, y $\overline{AD} = 5\ m$. Calcula $\overline{BC}$ (utiliza el teorema de los senos y el teorema de coseno). *Sol:BD=CD=4,4829;* ***BC=8,28 m***



3.13. Sara y Manolo quieren saber a qué distancia se encuentra un castillo que está en la orilla opuesta de un río. Se colocan a 100 metros de distancia el uno del otro y consideran el triángulo en cuyos vértices están cada uno de los dos, y el castillo. El ángulo correspondiente al vértice en el que está Sara es de 25°y el ángulo del vértice en el que está Manolo es de 140°.

¿A qué distancia se encuentra Sara del castillo? ¿Y Manolo?

Sol: 248,35 m. 163,29 m

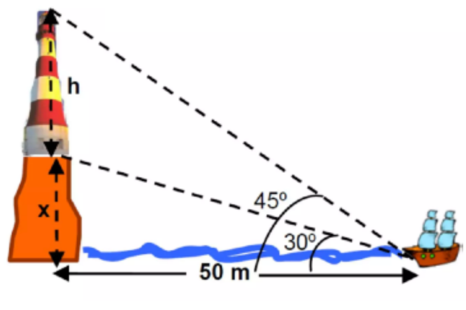


IES Sofía Casanova
Alberto José Fuertes García

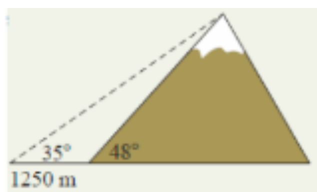
3.14. Una parcela triangular está delimitada por tres árboles como se muestra en la figura. Sus dueños han decidido vallarla. Si la alambrada se vende en rollos de 50 metros, ¿cuántos rollos necesitan comprar? ¿Cuántos metros les sobrarán? (Utiliza más de un teorema) *x=98,47m y=116,64, P=365,11,* ***8 rollos, sobran 34,88 m***

3.15. Hallar la altura del acantilado, h, y la distancia del barco al pie del promontorio, d.

Sol: d=57,74m, x=28,87 y 21,13m



3.16. Acercándose desde el oeste, unos alpinistas observan que el ángulo de elevación de una montaña es 35° a una distancia de 1250 m. Llegando al pie de la montaña, estiman que la ladera tiene una pendiente de 48° . Calcula la longitud de la pendiente de la montaña y la altura de la montaña *(x=3187,22 h=2368,57m)*



TEMA 2b - APUNTES

Trigonometría (identidades y ecuaciones)

Tema donde se estudian distintas identidades trigonométricas y su aplicación para la obtención de otras y para la resolución de ecuaciones

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

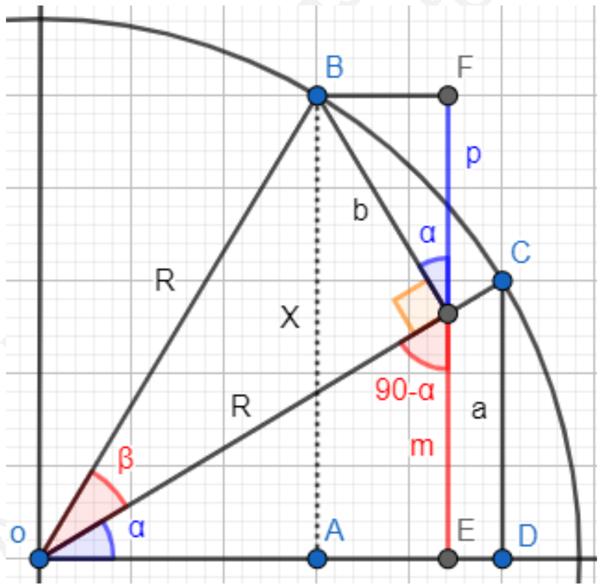
1. Suma y diferencia de ángulos

Las identidades trigonométricas de suma de ángulos son:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Se demuestran a través de la siguiente construcción geométrica. No lo detallaremos por falta de tiempo. La tangente se calcula con $\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$.

Detalle en https://www.geogebra.org/m/k8uszyzh



Para la resta, cambiamos b por (-b) y utilizar la suma y las relaciones del ángulo opuesto:

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Por ejemplo, usando $\sin(-b) = -\sin b \quad \cos(-b) = \cos b$:

$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b) = \sin a \cos(b) - \cos a \sin(b)$

Las demás fórmulas se derivan de estas:

2. Ángulo doble

El ángulo doble es igual que la suma de un ángulo consigo mismo: $2a = (a + a)$.

Usando las fórmulas de la suma, es fácil deducir que:

$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$$
$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

3. Ángulo mitad

$$\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$
$$\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$
$$\tan\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

Las usando la igualdad fundamental y el coseno del ángulo doble, tenemos:

$$\begin{cases} \cos^2 a + \sin^2 a = 1 \\ \cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{sumandolas: } 2\cos^2 a = 1 + \cos 2a \\ \text{restandolas: } 2\sin^2 a = 1 - \cos 2a \end{cases}$$

Despejando: $\begin{cases} \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \\ \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}} \\ \sin a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2a}{2}} \end{cases}$. Cambiamos $a = \dfrac{a}{2}$

C.Q.D.

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

4. Sumas de razones trigonométricas en productos

Factorizar (convertir en producto) es muy útil en diferentes contextos, como la resolución de ecuaciones o simplificaciones. Estas fórmulas permiten convertir sumas en productos:

$$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

DEMOSTRACIÓN:

Usando las fórmulas de la suma y de la resta: $\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \\ \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b \end{cases}$

Sumando: $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$

Restando: $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a\sin b$

Usamos el cambio de variable $\begin{cases} a+b=A \\ a-b=B \end{cases}$ y despejando a y b $\begin{cases} a = \frac{A+B}{2} \\ b = \frac{A-B}{2} \end{cases}$, queda:

$$\begin{cases} \sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \end{cases}$$

C.Q.D

5. Identidades trigonométricas (aplicación de fórmulas)

Las identidades trigonométricas son igualdades verdaderas (se verifican para cualquier valor de las variables involucradas). Por ejemplo, todas las fórmulas de este tema, son identidades trigonométricas. A partir de unas, se pueden obtener otras, y es lo que haremos en los ejercicios:

Ejemplo 5.1.: Demostrar $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

Usamos las fórmulas del ángulo doble y ángulo mitad:

$$\sin(2a) = 2\sin a\cos a$$

$$\tan\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} \implies \tan^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Sustituyendo, y sacando factor común, queda:

$$\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cancel{2\sin\alpha}(1-\cos\alpha)}{\cancel{2\sin\alpha}(1+\cos\alpha)} = \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$ **C.Q.D.**

(Demostramos que la expresión de la izquierda es equivalente a la de la derecha a través de transformaciones usando identidades ya conocidas).

6. Ecuaciones trigonométricas (aplicación de fórmulas)

Las ecuaciones trigonométricas, al contrario que las identidades, no se cumplen siempre. Debemos calcular qué valores de las variables las verifican.

Ejemplo 6.1: resuelve la ecuación $\sin 2a = \tan a$. *Utilizamos las identidades para avanzar:*

$$2\sin a\cos a = \frac{\sin a}{\cos a} \implies 2\sin a\cos^2 a = \sin a \implies \sin a(2\cos^2 a - 1) = 0$$

Si un producto es cero, algún factor debe ser cero:

$$\begin{cases} \sin a = 0 & \implies a = 0^\circ, 180^\circ + 360^\circ k \\ 2\cos^2 a - 1 = 0 \implies \cos a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} & \implies a = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ + 360^\circ k \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}$$

Debemos siempre estudiar las soluciones en la circunferencia entre 0 y 360º, y luego contar como posibles soluciones todas las vueltas adicionales que demos, de ahí que siempre se incluya $+360^\circ k$ o $+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Si vemos que se pueden escribir de forma más reducida mediante medias vueltas, o cuartos de vuelta, podemos hacerlo:

Soluciones:

$$\begin{cases} a = 0^\circ, 180^\circ + 360^\circ k & \implies a = 0^\circ + 180^\circ k \quad (0 + \pi k)\ rad \\ a = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ + 360^\circ k & \implies a = 45^\circ + 90^\circ k \quad (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k)\ rad \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}$$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Ejemplo 6.2.: resuelve $\cos 3x + \cos x = 0$

Usamos $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ y transformamos:

$$\cos 3x + \cos x = 2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = 2\cos 2x\cos x = 0$$

Si un producto es cero, algún factor debe ser cero:

$$\left\{\begin{array}{lll}\cos x = 0 & \Longrightarrow & x = 90^\circ, 270^\circ \quad\quad\quad + 360^\circ k \\ \cos 2x = 0 & \Longrightarrow & 2x = 90^\circ, 270^\circ, 450^\circ, 630^\circ + 360^\circ k\end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}$$

Para 2x, debemos contar soluciones entre 0º y 720º (dos vueltas), porque dividiremos entre 2. En caso contrario perderíamos soluciones. Si trabajamos con la forma reducida, ya no hace falta.

Soluciones:

$$\left\{\begin{array}{l}x = 90^\circ,\ 270^\circ \quad\quad\quad + 360^\circ k \\ 2x = 90^\circ, 270^\circ, 450^\circ, 630^\circ + 360^\circ k \ \Longrightarrow\ x = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ + 360^\circ k\end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}$$

La forma reducida sería:

En grados: $\left\{\begin{array}{l}x = 90^\circ + 180^\circ k \\ 2x = 90^\circ + 180^\circ k \ \Longrightarrow\ x = \frac{90^\circ + 180^\circ k}{2} = 45^\circ + 90^\circ k\end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}$

En radianes: $\left\{\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k\end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

TEMA 2b - EJERCICIOS

Trigonometría (identidades y ecuaciones)

Tema donde se estudian distintas identidades trigonométricas y su aplicación para la obtención de otras y para la resolución de ecuaciones

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Ejercicio 1. SIMPLIFICACIÓN, ECUACIONES E IDENTIDADES

a) Simplifica: $\dfrac{\sin(30+\alpha)-\sin(30-\alpha)}{\tan 60 \cdot \sin\alpha}$

b) Simplifica: $2\tan\alpha \cdot \sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin\alpha$

c) Resuelve la siguiente ecuación: $\cos 2\alpha - 4\sin\alpha = 3$

d) Resuelve: $\cos 3x - \cos x = 0$

e) Simplifica: $\sin(\dfrac{\pi}{4}+\alpha) - cos(\alpha - \dfrac{\pi}{4})$

f) Demuestra: $2\ tg\ \alpha\ cos^2\dfrac{\alpha}{2} - sen\ \alpha = tg\ \alpha$

g) Resuelve: $2\ cos^2 x + sen\ x = 1$

h) Resuelve transformando suma en producto: $\cos 3\alpha + \cos\alpha = 0$

i) Simplifica: $2\ tg\ \alpha\ cos^2\dfrac{\alpha}{2} - sen\ \alpha$

j) Demuestra: $sen\ 2\alpha\ - tg\ \alpha\ cos\ 2\alpha = tg\ \alpha$

k) Resuelve: $sen\ (45° - \alpha) + \sqrt{2}\ sen\ \alpha = 0$

l) Resuelve transformando en producto: $\text{sen} 3\alpha + \text{sen}\alpha = 0$

m) Demuestra: $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{cos^2\alpha}$

n) Resuelve la ecuación: $sen\ 2\alpha = tg\ \alpha$

ñ) Simplifica: $(1-\tan\alpha)\cdot\tan(45+\alpha) - 1$

o) Demuestra: $2\tan\alpha \cdot \sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin\alpha = \tan\alpha$

p) Resuelve: $\sin^2 2\alpha - \sin^2\alpha = 0$

q) Resuelve: $\sin 3x - \sin x = 0$

r) Simplifica: $\dfrac{\cos(30+\alpha)+\cos(30-\alpha)}{\cos\alpha}$

s) Resuelve: $2\sin^2 x + \cos x = -1$

t) Resuelve: $\sin 5x - \sin x = 0$

u) Demuestra: $\sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(a-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}(\sin 2a + 1)$

v) Demuestra: $2\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) = \cos 2\alpha$

sol: a) 1 b) $\tan\alpha$ c) $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ d) $\frac{\pi}{2}+k\pi$ e) 0 f)≈b) g) $\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}$,

h) $\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ i)≈f) j) poner cos en denominador y cambiar $\cos^2 x$ por $1-\sin^2 x$ k) $\frac{3\pi}{4}+k\pi$

l) $0+\frac{k\pi}{2}$ m) cambiar tg n) $0+k\pi,\ \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ ñ) $\tan\alpha$ o)≈b) p) $0+k\pi,\ \frac{\pi}{3}+k\pi,\ \frac{5\pi}{3}+k\pi$

q) $0+k\pi,\ \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},$ r) $\sqrt{3}$ s) $\pi+2k\pi$ t) $0+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{6}+k\pi,\ \frac{5\pi}{6}+k\pi$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Ejercicio 2. MÁS ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

2.1) $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos x = \frac{1}{2}$

2.2) $\cos 2x - \cos 6x = \sin 5x + \sin 3x$

2.3) $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = \cos x$

2.4) $\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$

2.5) $2\sin^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x$

2.6) $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos x = \frac{5}{4}$

2.7) $\cos 5x - \cos 3x = \sqrt{2}\,\sin 4x$

2.8) $\cos 2x - \cos 6x = \sin 5x + \sin 3x$

2.9) $3\sin x - \cos 2x = 1$

2.10) $\sin x \cdot \sin 2x + 2\sin^2 x = 0$

2.11) $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos x = \frac{1}{4}$

2.12) $\cos 2x + \sin^2 x - \frac{1}{2} = 0$

2.13) $\cos(6x) + \cos(8x) = -\sqrt{3}\,\cos x$

2.14) $\sin x \cdot \sin 2x + 2\sin^2 x = 0$

2.15) $\begin{cases} \sin^2 x - \cos^2 y = \frac{1}{2} \\ \cos^2 x - \cos^2 y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

2.16) $\begin{cases} \cos(x-\pi) \cdot \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \cos y \cdot \sin x = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

2.17) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \sin x + \sin y = \sqrt{3} \end{cases}$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Ejercicio 3. MÁS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

3.1) $\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}(\sin 2a+1)$

3.2) $\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\cos\beta$

3.3) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1+\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$ 3.4) $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin 2\alpha-1}{\cos 2\alpha}$

Sols: 2.1) $x=90°+180°n=\frac{\pi}{2}+n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$ 2.2) $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$ or $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ $x=\frac{\pi n}{4}$ 2.3) $x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

2.4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ or $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ $x=90°+180°n$ or $x=45°+180°n$

2.5) $x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\quad x=\frac{2\pi}{3}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ $x=60°+180°n,\quad x=120°+180°n$

2.6) $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$ and $x=\frac{5\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ $x=60°+360°n$ and $x=300°+360°n$

2.7) $x=\frac{5\pi}{4}+\pi n$ and $x=\frac{7\pi}{4}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ $x=\frac{\pi}{4}n,\quad n\in\mathbb{Z}$

$x=225°+180°n$ and $x=315°+180°n$ $x=45°n$

2.9) $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$ and $x=\frac{5\pi}{6}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ $x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}n,\quad n\in\mathbb{Z}$

$x=30°+180°n$ and $x=150°+180°n$ $x=90°+90°n$

2.11) $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$ and $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ $x=30°+360°n$ and $x=150°+360°n$

2.12) $x=n\pi$ and $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ $x=0°+180°n$ and $x=90°+180°n$

2.13) $x=\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi n$ and $x=-\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

$x\approx 68°+360°n$ and $x\approx 292°+360°n$

2.14) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$ and $x=\frac{3\pi}{4}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ $x=45°+180°n$ and $x=135°+180°n$

2.15) $\begin{cases} x=\frac{5\pi}{42}+\frac{2\pi n}{7} \\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{7} \\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n \end{cases}\quad n\in\mathbb{Z}\begin{cases} x=21.43°+102.86°n \\ x=30°+102.86°n \\ x=90°+180°n \end{cases}$

2.16) $x=n\pi$ and $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ $x=0°+180°n$ and $x=90°+180°n$

2.21) $x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\quad y=0+\pi m,\quad n,m\in\mathbb{Z}$ $x=60°+180°n,\quad y=0°+180°m$

2.22) $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\quad y=\frac{\pi}{3}+2\pi m,\quad n,m\in\mathbb{Z}$ $x=150°+360°n,\quad y=60°+360°m$

2.23) $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\quad y=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ $x=150°+360°n,\quad y=90°+360°n$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Ejercicio 4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS E IDENTIDADES

4.1) Sabiendo $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ y que $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$, calcula, sin calculadora, $\tan(2\alpha)$.

4.2) Si $\sin\alpha = 0{,}2$ con $90° < \alpha < 180°$, calcula: $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan(\pi - \alpha)$

4.3) Sabiendo que: $\sin\alpha = 0{,}5$ con $90° < \alpha < 180°$, y utilizando las razones trigonométricas necesarias, calcula $\tan\left(\frac{\alpha}{2} + \pi\right)$

4.4) Sabiendo que: $\sin x = \frac{1}{2}$ donde $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, calcula:

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right), \quad \tan(\pi + x), \qquad \sin(2\pi - x)$$

4.5) **OJO; ES MÁS LABORIOSO QUE LOS ANTERIORES**

Sabiendo que: $\sin\alpha = 0{,}2$ con $90° < \alpha < 180°$, y $\tan\beta = 2$ con $180° < \beta < 270°$;

calcula: $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$, $\tan\left(2\beta - \frac{\pi}{3}\right)$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Sols: 4.1) $\tan(2\alpha) = 3\sqrt{7}$ 4.2) $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}{\sqrt{10}} = 0{,}1005$; $\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sqrt{6}}{12} = 0{,}2041$

4.3) $\tan\left(\frac{\alpha}{2} + \pi\right) = 2 + \sqrt{3} = 3{,}7321$

4.4) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = 0{,}2588$; $\tan(\pi + x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sin(2\pi - x) = -\frac{1}{2}$

4.5) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ (sencillo)

$\cos\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ (fórmula tangente e identidad fundamental $\sin^2 + \cos^2 = 1$) y luego $\sin\beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\tan 2\beta = -\frac{4}{3}$ Luego, con fórmulas y calculadora: $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) = -0{,}5349$; $\tan\left(2\beta - \frac{\pi}{3}\right) = 2{,}3411$

TEMA 3 - APUNTES

Números complejos

Tema donde se estudian los números complejos, aquellos que aparecen al considerar que existen raíces cuadradas de números negativos.

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuertes García

0. Introducción.

0.1. Los números complejos y su origen histórico.

Hasta ahora, se estudiaron los números reales como “todos” los números existentes, pero, en realidad, estos se pueden extender a conjuntos numéricos más amplios.

El origen de los números complejos se basa en considerar que las raíces cuadradas de números negativos sean válidas. Partiendo del ejemplo más sencillo:

$x^2 + 1 = 0 \implies x = \pm\sqrt{-1}$. Hasta ahora decíamos, “no existe solución”.

A partir de ahora, diremos, “no existe solución real” (en los números reales), porque en los números complejos, llamamos a $\sqrt{-1} = i$ la unidad imaginaria. Así, ese polinomio de grado 2, tiene dos soluciones, i y $-i$.

Aunque estos números desconcertaron a los matemáticos, **Cardano** (s. XVI) descubrió que trabajar con raíces de negativos de forma intermedia, le permitía obtener resultados posteriores coherentes con los números reales, así que se demostró la utilidad de manejarlas. **Bombelli** (s. XVI), **Descartes** (s. XVII), **de Moivre** y **Euler** (s. XVIII), **Gauss** y **Hamilton** (s. XIX) fueron avanzando en su estudio hasta la forma en la que los manejamos actualmente (como se puede comprobar, los complejos captaron la atención de algunos de los nombres más relevantes de la historia de las matemáticas).

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

0.2. Utilidades de los números complejos.

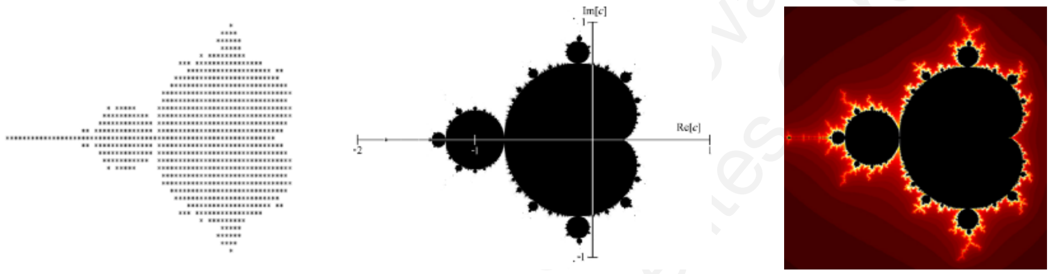
Los números complejos tienen aplicaciones, además de dentro de las matemáticas, en numerosos campos de la ciencia y la ingeniería, lo que demuestra su enorme utilidad.

Dentro de las matemáticas

1. **Ecuaciones polinómicas**. Según el *Teorema Fundamental del Álgebra*, *cualquier polinomio de grado n tiene n soluciones complejas*. Un ejemplo sencillo es la ecuación cuadrática: $x^2 + 1 = 0 \implies x = \pm\, i$. Esto permite resolver otros problemas.

2. **Geometría**. Los números complejos, gracias a las propiedades de su forma polar, se utilizan para representar y manejar *rotaciones en el plano* de forma sencilla. Si queremos rotar un punto z por un ángulo θ, podemos multiplicarlo por $e^{i\theta}$: $z' = ze^{i\theta}$

3. **Geometría fractal y teoría del caos.** Se llaman fractales a las figuras con autosimilitud a diferentes escalas (al ampliar una imagen continuamente, sigue apareciendo la estructura original). El Conjunto de Mandelbrot, se genera iterando la función cuadrática con complejos: $z_{n+1} = z_n^2 + c$ y estudiando sus límites para los distintos puntos del plano complejo. Además de llamativos visualmente, los fractales tienen muchas aplicaciones.



EVOLUCIÓN DE LAS REPRESENTACIONES DEL CONJUNTO DE MANDELBROT

Complejos aplicados a otras ciencias

3**. Electricidad, ingeniería y análisis de señales**. Los números complejos se utilizan para describir y calcular ondas y señales eléctricas de corriente alterna, con forma de onda (seno). *Ejemplo de fórmula aplicada para cálculo de fase y amplitud:* $V(t) = V_0 e^{i\omega t}$

4. **Física y mecánica cuántica.** El estado de las partículas se describe con funciones de onda que incluyen complejos. Ejemplo, ecuación de Schrödinger: $i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$

5. **Gráficos por computadora y animación 3D**. En gráficos por computadora, los cuaterniones (extensión de los números complejos) se usan para representar rotaciones en 3D, evitando problemas con las matrices de rotación, como el "gimbal lock". Un cuaternión tiene la forma: $q = a + bi + cj + dk$. Los cuaterniones se utilizan para interpolar rotaciones de manera eficiente en animaciones tridimensionales.
Además, los **fractales** se utilizan para compresión de imágenes y generación y simulación eficiente de paisajes complejos. (Ver enlace final)

6. **Estudio de estabilidad (drones, aviones, automoción, ingeniería civil, robótica, climatización, sonido…).** La idea es poder saber si un sistema tiende a estabilizarse o a oscilar, (el vuelo de un dron, la temperatura de climatización…). Esto se estudia a través de los complejos: dan información sobre las oscilaciones y la tendencia a estabilizarse.

Ejemplo: $H(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$, ($\omega_n$: frecuencia natural; ζ: coeficiente de amortiguamiento). Los polos del sistema se encuentran resolviendo $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$, lo que lleva a raíces complejas que indican el comportamiento oscilatorio y la estabilidad del sistema.

7. **Medicina.** Los fractales se usan como modelo de estudio de todo lo que se ramifica (neuronas, vías respiratorias, sistema circulatorio, tumores). La dimensión fractal permite cuantificar la complejidad de los tumores para decidir el mejor tratamiento. Permiten también diseñar prótesis porosas, dosificación de ciertos fármacos, relación de conceptos fractales con patologías neurológicas como el Alzheimer, cicatrización…

8. **Biología.** Se ha encontrado relación entre los ecosistemas marinos y rutas migratorias de animales con la dimensión fractal de las costas.

Más información y curiosidades sobre geometría fractal en:

https://matematicassofiacasanova1617.blogspot.com/2017/01/numeros-complejos-y-fractales.html

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

1. Los números complejos y su forma binómica.

Los números complejos ($\mathbb{C}$) son una extensión de los números reales ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

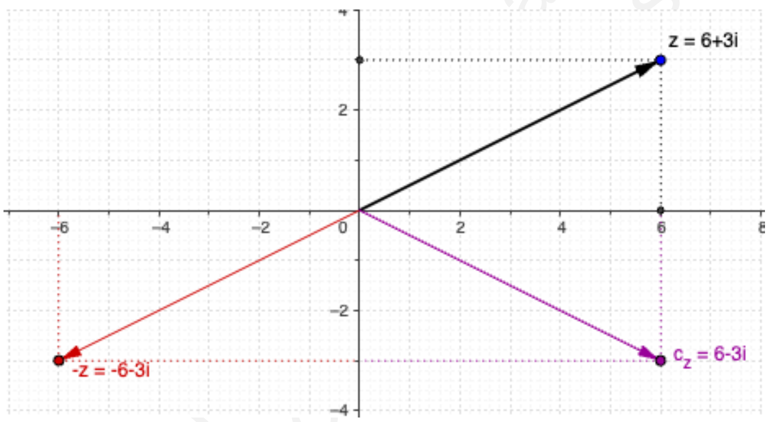
Forma binómica: todo número complejo z se puede representar como la suma de una parte real a y una parte imaginaria b de la forma $\quad z = a + bi$

($i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria)

Opuesto: el opuesto del número complejo z es $\boxed{-z = -a - bi}$

Conjugado: el conjugado de un complejo z es $\boxed{\bar{z} = a - bi}$

Representación gráfica. La recta real se representa en el eje horizontal, y el vertical representa la parte imaginaria. Así se forma el **plano complejo**. Se representan los números complejos como vectores:



COMPLEJO $z = 6 + 3i$, SU OPUESTO $-z$ Y SU CONJUGADO $\bar{z}$

Potencias de i: Si estudiamos las potencias de $i = \sqrt{-1}$ vemos:

$$\begin{cases} i^1 = i, \\ i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1 \\ i^3 = i^2 \cdot i = -i \\ i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1 \end{cases}$$

y la secuencia $i, -1, -i, 1$ se repetirá indefinidamente:

$$i^5 = i,\ i^6 = -1,\ i^7 = -i,\ i^8 = 1,\ i^9 = i\ldots$$

Así, en general: $i^n = i^{n \mod 4}$, (división entera $n : 4$ y quedarse con el resto)

Ejemplo: $i^{23} = i^{5\cdot4+3} = i^3 = -i$ (el resto de 23:4 es 3)

2. Operaciones en forma binómica

La forma binómica es útil para sumas y restas, basta operar algebraicamente con los números (parte real) y los términos con i (parte imaginaria).

NOTA: Aunque también se pueden efectuar multiplicaciones, divisiones y potencias, salvo casos muy simples, es mejor hacerlas en la forma polar que veremos más adelante. Las raíces, las haremos exclusivamente en forma polar.

SUMA: $(3+2i)+(5+4i)=8+6i$

RESTA: $(6-5i)-(4-8i)=6-5i-4+8i=2+3i$

MULTIPLICACIÓN: $(3+4i)(2-5i)=6-15i+8i-20i^2=6-7i+20=26-7i$

DIVISIÓN (multiplicar y dividir por el conjugado del denominador, como racionalizar):

$$\frac{5-3i}{4+2i}\cdot\frac{4-2i}{4-2i}=\frac{20-10i-12i+6i^2}{4^2-(2i)^2}=\frac{20-22i-6}{16-(-4)}=\frac{14-22i}{20}=\frac{7}{10}-\frac{11i}{10}$$

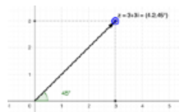
IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

3. Forma polar. Trigonometría y complejos.

Pensando en su representación gráfica, un número complejo queda determinado por el ángulo que forma con el eje α y la longitud del vector r. Usando trigonometría:

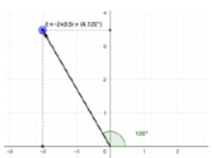
$z=a+bi$ se convierte en:

$$\boxed{z=r_\alpha=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}$$



Módulo: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=r$ **Argumento** o fase: $\arg z=\tan^{-1}\frac{b}{a}=\alpha$

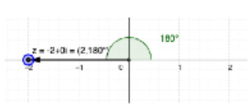
Ejemplo 1: Paso de $z=-2+2\sqrt{3}i \implies \begin{cases} |z|=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}=4 \\ \arctan\frac{2\sqrt{3}}{-2}=\arctan-\sqrt{3}=120^\circ \\ (2^\circ\ cuadrante) \end{cases}$



Entonces $z=-2+2\sqrt{3}i=4_{120^\circ}$

Nota: Los reales puros e imaginarios puros, sobre los ejes, se pasan "a ojo":

$-2=2_{180^\circ}$



$3i=3_{90^\circ}$

Para pasar de forma polar a binómica, basta usar la expresión trigonométrica:

$$5_{225^\circ} = 5(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) = 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i$$

(225° está en el 3º cuadrante, equivalente a las razones de 45º, ambas negativas)

$4_{0^\circ} = 4$ (número real puro) $\qquad$ $3_{270^\circ} = -3i$ (imaginario puro)

4. Operaciones en forma polar. Más usos de la trigonometría.

Dados dos números complejos, $\quad z_1 = r_\alpha, \quad z_2 = r'_\beta$:

Producto: $r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$ (multiplicar módulos, sumar argumentos)

Cociente: $\dfrac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\dfrac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$ (dividir módulos, restar argumentos)

Potencia: $(r_\alpha)^n = (r^n)_{\alpha n}$ (elevar módulo, multiplicar argumento)

DEMOSTRACIÓN PRODUCTO: $r_\alpha \cdot r'_\beta = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot r'(\cos\beta + i\sin\beta) =$

$$= r \cdot r'\left(\cos\alpha \cdot \cos\beta + i\sin\alpha \cdot \cos\beta + i\sin\beta \cdot \cos\alpha + i^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta\right) =$$

$$= r \cdot r'\left(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta + i(\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta)\right) =$$

$$= r \cdot r'\left(\cos(\alpha+\beta) + i \cdot \sin(\alpha+\beta)\right) = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$$

*Interpretación gráfica: vemos como el producto suma ángulos, el cociente los resta, la potencia los multiplica. Por eso, los números complejos se convierten en una herramienta útil para representar **giros**.*

Ejemplo: $(4_{60^\circ}) \cdot (3_{210^\circ}) = 12_{270^\circ} = -12i$

*NOTA: **Euler** llegó a la fórmula que vincula la exponencial con los números complejos, y que se conoce como "la fórmula más bonita de las matemáticas" por conectar, con gran sencillez, los números más famosos ($0,\ 1,\ \pi, e,\ i$). No detallaremos los usos, que son muchos, de esta forma de trabajar con complejos.*

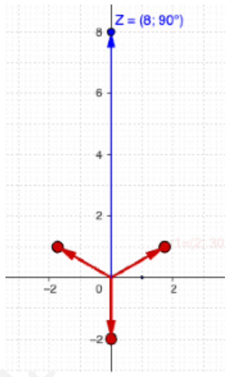
$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad \xrightarrow{si\ x=\pi} \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$ (Fórmula de Euler)

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

6. Raíces con números complejos

Dado un número complejo $z_\alpha \in \mathbb{C}$, tiene tantas n raíces enésimas. Se calculan como:

$$\sqrt[n]{r^\alpha} = \sqrt[n]{r}_{\frac{\alpha + 360^\circ k}{n}}, \; k = 0,1,2,\ldots n-1$$



Ejemplo:

$$\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90^\circ}} = 2_{\frac{90^\circ + 360^\circ k}{3}} = 2_{30^\circ + 120^\circ k} \quad \text{con} \quad k = 0,1,2$$

Las raíces son $z_1 = 2_{30^\circ}$, $z_2 = 2_{150^\circ}$, $z_3 = 2_{270^\circ} = -2i$

Interpretación gráfica: Las n raíces de un complejo determinan los vértices de un polígono regular de n lados. En el ejemplo, vemos un triángulo equilátero.

7. Ejemplos. Operaciones y ecuaciones complejas.

a) **Operación**: $\sqrt[4]{\dfrac{(1-\sqrt{3}i)\cdot i^{2017} - (\sqrt{3} - 31i)}{i^{31}\cdot 2_{330^\circ}}}$.

Operamos en binómica o polar a conveniencia.

Primero potencias de i: $\begin{cases} i^{2017} = i^{4\cdot 504+1} = i^1 = i \\ i^{31} = i^{4\cdot 7+3} = i^3 = -i \end{cases} \Longrightarrow \sqrt[4]{\dfrac{(1-\sqrt{3}i)\cdot i - (\sqrt{3} - 31i)}{-i\cdot 2_{330^\circ}}} =$

$$= \sqrt[4]{\frac{i + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{3}} + 31i}{1_{270^\circ}\cdot 2_{330^\circ}}} = \sqrt[4]{\frac{32i}{2_{600^\circ}}} = \sqrt[4]{\frac{32_{90^\circ}}{2_{600^\circ}}} = \sqrt[4]{\frac{32_{90^\circ}}{2_{240^\circ}}} = \sqrt[4]{16_{-150^\circ}} = \sqrt[4]{16_{210^\circ}} =$$

$$= 2_{\frac{210^\circ + 360^\circ k}{4}} = 2_{52^\circ 30' + 90^\circ k} \quad \text{con} \quad k = 0,1,2,3$$

Las raíces son: $z_1 = 2_{52^\circ 30'}$, $z_2 = 2_{142^\circ 30'}$, $z_3 = 2_{232^\circ 30'}$, $z_1 = 2_{322^\circ 30'}$

b) **Ecuación**: $z^4 - 27z = 0 \implies z(z^3 - 27) = 0 \implies \begin{cases} z = 0 \\ z = \sqrt[3]{27} \end{cases}$

$\sqrt[3]{27_{0^\circ}} = 3_{\frac{0^\circ + 360^\circ k}{3}} = 2_{0^\circ + 120^\circ k}$ con $k = 0,1,2$ (ojo, $\sqrt[3]{27}$ es compleja, 3 soluciones)

Soluciones: $z_1 = 0$, $z_2 = 3_{0^\circ} = 2$, $z_3 = 3_{120^\circ}$, $z_4 = 3_{240^\circ}$

IES Sofía Casanova Alberto José Fuentes García

TEMA 3 - EJERCICIOS

Números complejos

Tema donde se estudian los números complejos, aquellos que aparecen al considerar que existen raíces cuadradas de números negativos.

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García

Ejercicio 1. FORMA BINÓMICA, POLAR, POTENCIAS.

1.1. Pasa a forma binómica 2_{330° y 2_{150° Sol: • $2_{330^\circ} = \sqrt{3} - i$ • $2_{150^\circ} = -\sqrt{3} + i$

1.2. Calcula el módulo y el conjugado de 2_{330° y de 2_{150° Sol: mod 2, $\overline{2_{330^\circ}} = \sqrt{3} + i$

1.3. Calcula el conjugado de 4_{210° y de 4_{30°
(pasa primero a forma binómica y expresa el resultado de nuevo en polar)
Sol: $\overline{4_{210^\circ}} = -2\sqrt{3} + 2i$ $\overline{4_{210^\circ}} = 4_{150^\circ}$ $\overline{4_{30^\circ}} = 2\sqrt{3} - 2i$ $\overline{4_{30^\circ}} = 4_{330^\circ}$

1.4. Calcula: $(\sqrt{3} - i)^6$, $(-\sqrt{3} + i)^4$
Sol: $(2_{330^\circ})^6 = 2^6_{330^\circ \times 6} = 64_{1980^\circ}$; $(2_{330^\circ})^6 = 64_{180^\circ}$; $(2_{150^\circ})^4 = 2^4_{150^\circ \times 4} = 16_{600^\circ}$; $(2_{150^\circ})^4 = 16_{240^\circ}$

Ejercicio 2. OPERACIONES CON COMPLEJOS. Resuelve operaciones complejas:

2.1. $\sqrt[4]{\dfrac{(1-\sqrt{3}i)\cdot i^{2017} - (\sqrt{3} - 31i)}{i^{31}\cdot 2_{330^\circ}}}$ Sol: $z_1 = 2_{52.5^\circ}$ $z_2 = 2_{142.5^\circ}$ $z_3 = 2_{232.5^\circ}$ $z_4 = 2_{322.5^\circ}$

2.2. $\sqrt[3]{\dfrac{(1-\sqrt{3}i)\cdot i^{9} - (\sqrt{3} - 15i)}{i^{29}\cdot 2_{150^\circ}}}$ Sol: $z_1 = 2_{70^\circ}$ $z_2 = 2_{190^\circ}$ $z_3 = 2_{310^\circ}$

2.3. $\sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{i^4\cdot(-1+i)}\right)^2}$ Sol: $z_1 = \sqrt[3]{2}_{50^\circ}$ $z_2 = \sqrt[3]{2}_{170^\circ}$ $z_3 = \sqrt[3]{2}_{290^\circ}$

2.4. $\sqrt[4]{\left(\dfrac{-4+4\sqrt{3}i}{i^5\cdot 2_{270^\circ}}\right)^3}$ Sol: $z_1 = 2\sqrt{2}_{0^\circ}$ $z_2 = 2\sqrt{2}_{90^\circ}$ $z_3 = 2\sqrt{2}_{180^\circ}$ $z_4 = 2\sqrt{2}_{270^\circ}$

2.5. $\sqrt[3]{\left(\dfrac{(\sqrt{3}i - 1)\cdot i^{2020} + (5+3\sqrt{3}i)}{i^{147}\cdot 1_{210^\circ}}\right)^2}$ Sol: $z_1 = 4_{80^\circ}$ $z_2 = 4_{200^\circ}$ $z_3 = 4_{320^\circ}$

2.6. $\sqrt[4]{\left(\dfrac{2\cdot i^{146}\cdot 4_{30^\circ}}{(1+\sqrt{3}i)\cdot i^{2020} + (3+3\sqrt{3}i)}\right)^3}$ Sol: $z_1 = 1_{22.5^\circ}$ $z_2 = 1_{112.5^\circ}$ $z_3 = 1_{202.5^\circ}$ $z_4 = 1_{292.5^\circ}$

2.7. $\sqrt[4]{\left(\dfrac{(\sqrt{3} - i)\cdot i^{2019} + (3+3\sqrt{3}i)}{i^{145}\cdot 1_{210^\circ}}\right)^3}$ Sol: $z_1 = 2\sqrt{2}_{0^\circ}$ $z_2 = 2\sqrt{2}_{90^\circ}$ $z_3 = 2\sqrt{2}_{180^\circ}$ $z_4 = 2\sqrt{2}_{270^\circ}$

IES Sofía Casanova Alberto José Fuentes García

2.8. $\sqrt[3]{\left(\dfrac{(1-\sqrt{2}i)\cdot i^{2019}+(\sqrt{2}-i)}{i^{147}\cdot 2_{45^\circ}}\right)^2}$ Sol: $z_1 = 1_{90^\circ}$, $z_2 = 1_{210^\circ}$, $z_3 = 1_{330^\circ}$

2.9. $\sqrt[4]{\left(\dfrac{i^{146}\cdot 4_{30^\circ}}{(\sqrt{3}-i)\cdot i^{2019}+(3+3\sqrt{3}i)}\right)^3}$ Sol: $z_1 = 1_{22.5^\circ}$, $z_2 = 1_{112.5^\circ}$, $z_3 = 1_{202.5^\circ}$, $z_4 = 1_{292.5^\circ}$

2.10. $\sqrt[3]{\left(\dfrac{(1-\sqrt{2}i)\cdot i^{2019}+(\sqrt{2}-i)}{i^{147}\cdot 2_{45^\circ}}\right)^2}$ Sol: $z_1 = 1_{90^\circ}$, $z_2 = 1_{210^\circ}$, $z_3 = 1_{330^\circ}$

2.11. $\sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{i^8\cdot(-1+i)}\right)^2}$ Sol: $z_1 = \sqrt[3]{2}_{50^\circ}$, $z_2 = \sqrt[3]{2}_{170^\circ}$, $z_3 = \sqrt[3]{2}_{290^\circ}$

2.12. $\sqrt[4]{\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{i^5\cdot 2_{270^\circ}}\right)^3}$ Sol: $z_1 = 1_{0^\circ}$, $z_2 = 1_{90^\circ}$, $z_3 = 1_{180^\circ}$, $z_4 = 1_{270^\circ}$

Ejercicio 3. ECUACIONES COMPLEJAS.

Resuelve las siguientes ecuaciones sabiendo que z es un número complejo:

3.1) $z^3 - 8 = 0$ 3.2) $\dfrac{2+3i}{2} - zi = 3 - z$ 3.3) $z^5 + 32 = 0$

3.4) $z^2 + z + 4 = 0$ 3.5) $z^2 + 3z + 7 = 0$ 3.6) $z^2 - z + 1 = 0$

3.7) $z^4 - 1 = 0$ 3.8) $z^4 + 16 = 0$ 3.9) $z^4 - 8z = 0$

3.10) $z^3 + 8i = 0$ 3.11) $\dfrac{1-2i}{2} + z\cdot i = 5 - 2z$ 3.12) $iz^4 - 8z = 0$

Soluciones: 3.1) $z_1 = 2_{0^\circ}$, $z_2 = 2_{120^\circ}$, $z_3 = 2_{240^\circ}$

3.2). $z = \dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{4}i$

3.3. $z_1 = 2_{36^\circ}$, $z_2 = 2_{108^\circ}$, $z_3 = 2_{180^\circ}$, $z_4 = 2_{252^\circ}$, $z_5 = 2_{324^\circ}$

3.4) $z = \dfrac{-1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{15}}{2}i$

3.5) $z = \dfrac{-3}{2} \pm \dfrac{\sqrt{19}}{2}i$

3.6) $z = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

3.7) $z_1 = 1_{0^\circ}$, $z_2 = 1_{90^\circ}$, $z_3 = 1_{180^\circ}$, $z_4 = 1_{270^\circ}$

3.8) $z_1 = 2_{45^\circ}$, $z_2 = 2_{135^\circ}$, $z_3 = 2_{225^\circ}$, $z_4 = 2_{315^\circ}$

3.9) $z_1 = 0$, $z_2 = 2_{0^\circ}$, $z_3 = 2_{120^\circ}$, $z_4 = 2_{240^\circ}$

3.10) $z_1 = 2_{90^\circ}$, $z_2 = 2_{210^\circ}$, $z_3 = 2_{330^\circ}$

3.11) $z = 2 - \dfrac{1}{2}i$

3.12) $z_1 = 0$, $z_2 = 2_{90^\circ}$, $z_3 = 2_{210^\circ}$, $z_4 = 2_{330^\circ}$

IES Sofía Casanova
Alberto José Fuentes García