

Guía para Afrontar Problemas Competenciales

1. Primera Lectura (Contexto General):

- Lee para entender la situación global. ¿De qué trata el problema? No necesitas comprender todo al 100 % ni identificar el tipo o tipos de ejercicios que contiene, solo es una puesta en situación.

2. Segunda Lectura (Análisis y Desglose):

- **a) Identifica las preguntas y trata de clasificarlas en tipo/s de ejercicio/s:** Para cada apartado, ¿qué se pide exactamente? Intenta identificar el **tipo de problema básico** (o combinación) que resolvería cada pregunta (Tabla, Árbol, Binomial, Normal, Aprox., Sucesos). Valora si necesita algún razonamiento adicional a esos tipos de problema.
- **b) Extrae Datos Relevantes y Elimina Innecesarios:**
 - Apunta los datos numéricos esenciales para *cada pregunta*, con su significado.
 - **Tacha (con lápiz) la información claramente contextual o distractora.** Si dudas, déjala marcada con interrogación.

3. Resolución (Estrategia y Ejecución):

- **a) Planifica:** Para cada pregunta confirma el modelo/ejercicio básico a usar y sigue los consejos generales de todo el curso para su resolución.
- **b) Ejecuta:** Resuelve aplicando los procedimientos que ya dominas (tabla, árbol, condicionadas, distribuciones...)
- **c) Flexibilidad:** Si un apartado se atasca y no es prerequisite de otro, avanza.

4. Revisión (Validación y Respuesta):

- **a) Verifica y ordena:** Repasa los cálculos. Asegúrate de que el ejercicio está ordenado, claro, bien presentado, con resultados parciales y globales.
- **b) Sentido Lógico:** ¿Los resultados son coherentes? ¿Todo parece en orden?
- **c) Respuesta Precisa:** Contesta exactamente lo que se pedía, usando el contexto del problema, con lenguaje natural.

Características Competenciales:

Los problemas competenciales suelen tener las siguientes características:

1. Contextualización Realista y Elaborada.

- **Textos Largos y Narrativos:** Muchos problemas comienzan con introducciones extensas que describen un escenario real o verosímil.
- **Relevancia del Contexto:** Los contextos suelen ser de actualidad o de interés general (salud, tecnología, economía, medio ambiente, sociedad), lo que puede aumentar la carga cognitiva y la exigencia de la comprensión lectora.

2. Filtrado de Información (Datos Relevantes vs. Irrelevantes):

- **Información innecesaria ("ruido y distractores"):** Muchos enunciados contienen datos numéricos o descriptivos que son puramente contextuales y no se utilizan en los cálculos (muchos datos no usados, detalles no cuantificables para el problema, fórmulas no necesarias...). **Debe ser filtrada.**

3. Interpretación del Lenguaje y Traducción a Modelo Matemático:

Esto ya era necesario los en problemas no competenciales trabajados durante el curso, pero aquí tiene aún más relevancia: traducir correctamente a lenguaje matemático las preguntas y los datos, interpretar correctamente conceptos contextuales, identificar correctamente las preguntas bajo cualquier formulación sea más o menos directa...

4. Combinación de Estrategias y Conceptos: Múltiples Tipos de Problemas en Uno:

Un mismo problema puede requerir aplicar la Normal para hallar una p , luego usar esa p en una Binomial, y quizás luego aproximar esa Binomial por la Normal. O combinar álgebra de sucesos con probabilidad total y Bayes. **Resultados Intermedios:** La solución de un apartado a menudo es un dato de entrada para otro.

5. Complejidad Algebraica o de Cálculo:

Por ejemplo, usar sistemas de Ecuaciones para hallar μ y σ con distintos datos dados, u organizar la información en diagramas o tablas más complejos y extensos de lo habitual. Este tipo de propuestas no existían en los problemas básicos habituales.

6. Dominar los conceptos y demostrarlo respondiendo preguntas de comprensión:

Argumentar sobre la veracidad de una afirmación o la plausibilidad de un resultado basándose en propiedades o definiciones teóricas o en la comprensión del contexto o los cálculos.

7. Problemas Atípicos o No Estándar y cultura científica general:

Situaciones que no se ajustan directamente a los modelos estudiados y requieren un razonamiento adicional, soluciones creativas, referencias a problemas conocidos como el del Monty Hall...

Resolveremos a continuación los problemas propuestos por la CIUG siguiendo esta guía:

1. Exemplo 11: Seguros e mascotas

Os fogares con animais domésticos aumentaron considerablemente nos últimos 5 anos, sendo aproximadamente o 49% do total no ano 2024. Unha compañía de seguros líder no mercado quere poñerse ao día na normativa para que os cidadáns que teñan unha mascota contraten un seguro, para cubrir posibles incidencias, sobre todo en caso de cans potencialmente perigosos. Para iso fai unha campaña de publicidade onde se contrasta a posibilidade de que o cliente teña contratado tamén o seguro de fogar. Despois dun tempo, a compañía de seguros afirma que o 60% da poboación do estudo ten contratado un seguro de fogar, o 30% ten contratado un seguro de mascota e un seguro de fogar. Ademais, 3 de cada 5 persoas con seguro de mascota, ten contratado un seguro de fogar.

Responda estes cinco apartados: 11.1., 11.2., 11.3, 11.4 e 11.5.

11.1. Calcule a probabilidade de que a poboación teña un seguro de mascota. Este es el problema

11.2. Calcule a porcentaxe da poboación que teña algún destes dous seguros.

11.3. Elixida unha persoa ao azar, calcule a probabilidade de ter seguro de mascota e non ter seguro de fogar.

11.4. Son independentes os sucesos “ter seguro de mascota” e “ter seguro de fogar”?

11.5. Considérense os sucesos “ter seguro de mascota” e “ter mascota”, sen facer operacións, razoe se estes sucesos poden considerarse independentes”.

Análisis del problema competencial

Tipos de problemas básicos incluidos:

- **Sucesos (álgebra de sucesos):** Para interpretar las preguntas y usar las propiedades y valorar independencia
- **Tabla de contingencia:** Es la herramienta más eficiente para organizar la información y resolver la mayoría de los apartados.

Dificultades competenciales:

- **Contexto largo/elaborado:** Se proporciona información sobre el aumento de mascotas, la normativa de seguros y la campaña de publicidad, que sitúa el problema.
- **Datos innecesarios:** El dato del "49% do total no ano 2024" (hogares con animales domésticos) es un distractor, ya que el estudio se centra en la población que *podría* contratar seguros y se dan porcentajes sobre *esa población del estudio*. La información sobre "cans potencialmente perigosos" también es contextual.
- **Presentación indirecta de datos:** Esta es la clave competencial principal del problema. El alumno debe utilizar estas piezas para, idealmente, construir una tabla de contingencia o, como mínimo, deducir $P(\text{Mascota})$ para el apartado 11.1. Una vez que se tiene $P(\text{Mascota})$, $P(\text{Fogar})$ y $P(\text{Mascota} \cap \text{Fogar})$, se puede rellenar fácilmente una tabla de contingencia 2x2 (Mascota/No Mascota vs. Fogar/No Fogar).
- **Interpretación de preguntas:** 11.1: Requiere el despeje mencionado arriba. 11.2: $P(\text{Mascota} \cup \text{Fogar}) = P(M) + P(F) - P(M \cap F)$. Directo una vez se tiene $P(M)$. 11.3: $P(\text{Mascota} \cap \text{Fogar}^c)$. Se obtiene fácil de la tabla o $P(M) - P(M \cap F)$. 11.4: Independencia. Comprobar si $P(M \cap F) = P(M) * P(F)$.
- **Apartado conceptual / Interpretación sutil (11.5): independencia “lógica” no calculada.**

SOLUCIÓN Problema 1

1. Primera Lectura (Contexto General): * Compañía de seguros estudia contratación de seguros de hogar y mascota.

2. Segunda Lectura (Análisis y Desglose):

- **a) Identifica las preguntas y trata de clasificarlas en tipo/s de ejercicio/s:**
 - 11.1: $P(\text{Mascota}) \rightarrow$ Sucesos (despejar de $P(\text{Condicionada})$).
 - 11.2: $P(\text{Mascota} \cup \text{Fogar}) \rightarrow$ Álgebra de Sucesos.
 - 11.3: $P(\text{Mascota} \cap \text{No Fogar}) \rightarrow$ Álgebra de Sucesos / **Tabla de contingencia**.
 - 11.4: ¿Independientes M y F? $\rightarrow$ Sucesos.
 - 11.5: ¿Independientes "seguro mascota" y "ter mascota"? $\rightarrow$ Sucesos (conceptual).
 - **Global:** Ideal para **Tabla de Contingencia** una vez se obtiene $P(\text{Mascota})$.
- **b) Extrae Datos Relevantes y Elimina Innecesarios:**
 - $P(F) = 0.60$; $P(M \cap F) = 0.30$; $P(F | M) = 0.60$.
 - **Tachar:** ~"49% do total no ano 2024..."~ (dato general, no del estudio);
~"descripción de la campaña, normativa, cans perigosos..."~ (contexto).

3. Resolución (Estrategia y Ejecución): * **a) Planifica:**

- 11.1: $P(M) = P(M \cap F) / P(F | M)$. Luego, construir Tabla de Contingencia.
- 11.2: $P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F)$.
- 11.3: Leer $P(M \cap F^c)$ de la tabla.
- 11.4: Comprobar $P(M \cap F)$ vs $P(M)P(F)$.
- 11.5: Razonamiento lógico.

b) Ejecuta:

- **11.1. Calcular $P(\text{Mascota})$ (denominemos M al suceso "tener seguro de mascota" y F al suceso "tener seguro de fogar"):**
 - Sabemos $P(F|M) = 0.60$ y $P(M \cap F) = 0.30 \Rightarrow$ probabilidad condicionada: $P(F|M) = P(M \cap F) / P(M)$.
 - Sustituyendo: $0.60 = 0.30 / P(M) \Rightarrow P(M): P(M) = 0.30 / 0.60 = 0.50$.
 - *La probabilidad de que la población tenga un seguro de mascota es 0.50.*
- **Construir Tabla de Contingencia:**
 - Conocemos: $P(M) = 0.50$, $P(F) = 0.60$, $P(M \cap F) = 0.30$.

	F (Fogar)	F ^c (No Fogar)	Total
M (Mascota)	0.30	0.20	0.50
M ^c (No Mascota)	0.30	0.20	0.50
Total	0.60	0.40	1.00

- **11.2. Calcular $P(M \cup F)$:** $P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F) = 0.50 + 0.60 - 0.30 = 0.80$.
 - *La porcentaje de la población que tiene alguno de estos dos seguros es del 80%.*
- **11.3. Calcular $P(M \cap F^c)$:** De la tabla, $P(M \cap F^c) = 0.20$.
 - *La probabilidad de tener seguro de mascota y no tener seguro de fogar es 0.20.*
- **11.4. Independencia de M y F:** ¿ $P(M \cap F) = P(M) * P(F)$?
 - $P(M \cap F) = 0.30$ (dado).
 - $P(M) * P(F) = 0.50 * 0.60 = 0.30$. ($0.30 = 0.30$), *los sucesos son independientes.*

- **11.5. Independencia de "seguro mascota" (SM) y "ter mascota" (TM):**
 - El hecho de "ter mascota" influye directamente en la probabilidad de "ter seguro de mascota". Si una persona tiene una mascota, la probabilidad de que contrate un seguro para ella $P(\text{SM}|\text{TM})$ será, en general, diferente (probablemente mucho mayor) que la probabilidad general de tener un seguro de mascota $P(\text{SM})=0.50$. Además, $P(\text{SM}|\text{No TM})$ sería 0 o muy cercana a 0.
 - Como $P(\text{SM}|\text{TM}) \neq P(\text{SM})$, los sucesos no son independientes.
 - *Los sucesos "ter seguro de mascota" y "ter mascota" no pueden considerarse independientes. El hecho de tener una mascota condiciona fuertemente la probabilidad de contratar un seguro para ella.*

4. Revisión (Validación y Respuesta):

- **a) Verifica:** Cálculos y tabla correctos.
- **b) Sentido Lógico:** Probabilidades válidas.
- **c) Respuesta Precisa:**
 - 11.1: $P(\text{seguro mascota}) = 0,50$.
 - 11.2: $P(\text{algún seguro}) = 80\%$.
 - 11.3: $P(\text{seguro mascota y no fogar}) = 0,20$.
 - 11.4: Son independientes.
 - 11.5: Non son independientes.

2. Exemplo 10: Préstamos bancarios

As últimas rebaixas dos tipos de interese no segundo semestre de 2024 están a provocar que as familias se estean aforrando uns 200 euros ao mes do que viñan pagando ata o de agora nas facturas das súas hipotecas e préstamos. Un aforro que pode supoñer deixar de pagar máis de 2.000 euros ao ano. Con esta situación, as entidades bancarias están a ofrecer condicións moito máis atractivas aos clientes para captalos, xerando unha batalla entre entidades. Nunha delas vanse a presentar novos produtos para ofertar aos seus clientes: Préstamo 24 horas, Préstamo Auto e Préstamo Estuda.

Por política de empresa preténdese conceder un 45% de Préstamos 24 horas, 40% de Préstamos Auto e un 15% de Préstamos Estuda. Ademais, realízase un estudo sobre a falta de pagamentos nestes tres tipos de préstamos resultando sen pagar o 20% dos Préstamos 24 horas, o 30% dos Préstamos Auto e o 25% dos Préstamos Estuda:

Responda estes catro apartados: 10.1., 10.2., 10.3. e 10.4

10.1. Seleccionado un préstamo ao azar calcule a probabilidade de que non se pague.

10.2. Sabendo que non se pagou un préstamo, calcular a probabilidade de que sexa un Préstamo Auto.

10.3. Se se pagou o préstamo, calcular a probabilidade de que sexa un Préstamo Estuda.

10.4. Segundo os datos proporcionados polo enunciado, indica dous sucesos relacionados co enunciado que son incompatibles. Xustifica a resposta.

Análisis del problema

- **Tipos de problemas básicos incluidos:** Diagrama de árbol, Probabilidad Total (10.1), Bayes (10.2, 10.3), Sucesos (incompatibilidad conceptual 10.4).
- **Dificultades competenciales:**
 - **Contexto:** Claro y aplicado al mundo financiero.
 - **Estructura de datos:** Los datos se presentan de forma clara para construir un árbol de probabilidad (Tipo de Préstamo -> Paga/No Paga).
 - **Interpretación de preguntas:** Las preguntas de Bayes son estándar. El apartado 10.4 requiere una comprensión conceptual de la incompatibilidad aplicada al contexto (ej. "Ser un Préstamo 24 horas" y "Ser un Préstamo Auto" son incompatibles para un mismo préstamo seleccionado).
 - **Dificultad general:** Problema competencial bien estructurado, sirve como un buen ejemplo de aplicación de Bayes. Lo consideraría de nivel **Intermedio-Alto**.

Solución problema 2: Exemplo 10: Préstamos bancarios

1. Primera Lectura (Contexto General): * Banco ofrece tres tipos de préstamos con diferentes % de concesión y tasas de impago.

2. Segunda Lectura (Análisis y Desglose):

- **a) Identifica las preguntas y trata de clasificarlas en tipo/s de ejercicio/s:**
 - 10.1: $P(\text{No Pague}) \rightarrow$ **Diagrama de Árbol** y Probabilidad Total.
 - 10.2: $P(\text{Auto} \mid \text{No Pague}) \rightarrow$ Teorema de Bayes (usa resultado de 10.1).
 - 10.3: $P(\text{Estuda} \mid \text{Pague}) \rightarrow$ Teorema de Bayes (necesita $P(\text{Pague})$).
 - 10.4: Sucesos incompatibles $\rightarrow$ Sucesos (conceptual).
- **b) Extrae Datos Relevantes y Elimina Innecesarios:**
 - $P(P24)=0.45$, $P(PA)=0.40$, $P(PE)=0.15$.
 - $P(NPIP24)=0.20$, $P(NPIPA)=0.30$, $P(NPIPE)=0.25$. (NP=No Paga, P=Paga)
 - $P(PIP24)=0.80$, $P(PIPA)=0.70$, $P(PIPE)=0.75$.
 - **Tachar:** ~~Historia sobre rebajas de tipos de interés y ahorro de familias...~~ (contexto).

3. Resolución (Estrategia y Ejecución):

- **a) Planifica:**
 - Construir Diagrama de Árbol (Tipo Préstamo $\rightarrow$ Paga/No Paga).
 - 10.1: $P(NP) = P(P24)P(NPIP24) + P(PA)P(NPIPA) + P(PE)P(NPIPE)$.
 - 10.2: $P(PAINP) = [P(PA)P(NPIPA)] / P(NP)$.
 - 10.3: $P(P) = 1 - P(NP)$; $P(PEIP) = [P(PE)P(PIPE)] / P(P)$.
 - 10.4: Identificar sucesos mutuamente excluyentes.
- **b) Ejecuta:**
 - **Diagrama de Árbol (y probabilidades de intersección):**
 - Préstamo 24h ($P(P24) = 0.45$)
 - No Paga ($P(NPIP24) = 0.20$) $\Rightarrow P(P24 \cap NP) = 0.45 * 0.20 = 0.09$
 - Paga ($P(PIP24) = 0.80$) $\Rightarrow P(P24 \cap P) = 0.45 * 0.80 = 0.36$
 - Préstamo Auto ($P(PA) = 0.40$)
 - No Paga ($P(NPIPA) = 0.30$) $\Rightarrow P(PA \cap NP) = 0.40 * 0.30 = 0.12$
 - Paga ($P(PIPA) = 0.70$) $\Rightarrow P(PA \cap P) = 0.40 * 0.70 = 0.28$
 - Préstamo Estuda ($P(PE) = 0.15$)
 - No Paga ($P(NPIPE) = 0.25$) $\Rightarrow P(PE \cap NP) = 0.15 * 0.25 = 0.0375$
 - Paga ($P(PIPE) = 0.75$) $\Rightarrow P(PE \cap P) = 0.15 * 0.75 = 0.1125$
 - **10.1. Calcular $P(NP)$:**
 - $P(NP) = P(P24 \cap NP) + P(PA \cap NP) + P(PE \cap NP) = 0.09 + 0.12 + 0.0375 = 0.2475$.
 - La probabilidad de que un préstamo seleccionado al azar no se pague es 0.2475.

- **10.2. Calcular $P(PA \mid NP)$:**

- $P(PA \mid NP) = P(PA \cap NP) / P(NP) = 0.12 / 0.2475 \approx 0.4848$.
- *Sabendo que non se pagou un préstamo, a probabilidade de que sexa un Préstamo Auto é aproximadamente 0,4848.*

- **10.3. Calcular $P(PE \mid P)$:**

- $P(P) = 1 - P(NP) = 1 - 0.2475 = 0.7525$.
- $P(PE \mid P) = P(PE \cap P) / P(P) = 0.1125 / 0.7525 \approx 0.1495$.
- *Se se pagou o préstamo, a probabilidade de que sexa un Préstamo Estuda é aproximadamente 0,1495.*

- **10.4. Sucesos incompatibles:**

- Los sucesos "el préstamo es un Préstamo 24 horas" y "el préstamo es un Préstamo Auto" son incompatibles. Un préstamo solo puede ser de un tipo.
- *Dous sucesos incompatibles son, por exemplo, "que o préstamo concedido sexa un Préstamo 24 horas" e "que o préstamo concedido sexa un Préstamo Auto".*

4. Revisión (Validación y Respuesta):

- **a) Verifica:** Cálculos correctos.
- **b) Sentido Lógico:** Probabilidades válidas.
- **c) Respuesta Precisa:**
 - 10.1: $P(\text{non se pague}) = 0,2475$.
 - 10.2: $P(\text{Préstamo Auto} \mid \text{non se pagou}) \approx 0,4848$.
 - 10.3: $P(\text{Préstamo Estuda} \mid \text{se pagou}) \approx 0,1495$.
 - 10.4: Sucesos "ser Préstamo 24 horas" e "ser Préstamo Auto" son incompatibles.

3. Exemplo 1: Desprazamento ao traballo (sin 1.3) (hay que deducir la media de un IC)

A partir de datos obtidos con máis de 100.000 traballadores, estableceuse que o tempo medio en España da duración do traxecto dende o domicilio ata o posto de traballo é de 36 minutos. Aínda que algunhas persoas aproveitan ditos desprazamentos para escoitar música ou ler, a maioría da poboación considera ditos desprazamentos como unha perda de tempo. Aqueles que empregan medios de transporte privados teñen maior probabilidade de sufrir un accidente, ademais de contribuír ao aumento da contaminación. Os responsables dunha gran empresa fixeron un estudo sobre os modos de desprazamento dos seus traballadores, chegando á conclusión de que o 60% empregaban medios propios e o 40% restante fan os seus desprazamentos ao traballo en medios de transporte públicos. Para analizar se hai diferencias entre os tempos de desprazamento ata o traballo entre os dous grupos, se elixiron 100 persoas ao azar de cada un deles, medindo os seus tempos de desprazamento. Pódese supoñer que ditos tempos teñen distribución normal coa mesma varianza para os dous grupos. O intervalo de confianza, cun nivel de confianza do 95%, para o tempo medio de desprazamento dos que empregaron transporte privado foi (24,06;29,94). Para os que empregaron medios de transporte público, o tempo medio obtido coa mostra de 100 persoas foi de 24 minutos. Responda estes tres apartados: 1.1., 1.2. e 1.3.

1.1. Supoñendo que o tempo medio de desprazamento para os traballadores da empresa que empregan medios propios é de 27 minutos, calcule a probabilidade de que un deses empregados tarde máis de 25 minutos en chegar dende o domicilio ata o lugar de traballo.

1.2. Supoñendo que o tempo medio de desprazamento do persoal que emprega medios públicos é de 25 minutos, se se elixe ao azar un dos traballadores da empresa, cal é a probabilidade de que empregue máis de 25 minutos en chegar dende o domicilio ata o posto de traballo? (*Apartado 1.3 sobre inferencia omitido*)

Análisis del problema

- **Tipos de problemas básicos incluídos:** Normal (cálculo de $P(X > k)$).
- **Dificultades competenciales:**
 - **Contexto largo/elaborado.**
 - **Datos innecesarios:** El dato de los 36 minutos de media en España, que el 60% usa medios propios, etc., para los apartados 1.1 y 1.2.
 - **Presentación indirecta de datos / Dependencia de conceptos "frontera":** Para resolver 1.1 y 1.2 se necesita la desviación típica (σ), que se dice "misma varianza para os dous grupos". Esta σ **debe deducirse del intervalo de confianza (24,06; 29,94) con NC 95% y n=100** para el grupo de transporte privado (medios propios). Media muestral del IC = $(24.06+29.94)/2 = 27$. Error $E = 2.94$. Fórmula del error: $E = z_{\alpha/2} * (\sigma/\sqrt{n})$. Con NC 95%, $z_{\alpha/2}=1.96$. Entonces $2.94 = 1.96 * \sigma/\sqrt{100} \Rightarrow \sigma = (2.94*10)/1.96 = 15$.
 - **Asunción clave:** Una vez calculada $\sigma=15$ para el grupo de medios propios (usando la media muestral de 27 minutos del IC), se usa la media dada de 27 minutos para ese grupo en 1.1. Para 1.2, se usa la misma $\sigma=15$ (por "misma varianza") y la media dada de 25 minutos para el grupo de medios públicos.
 - **Nivel de dificultad:** La deducción de σ a partir de un IC es un paso que, si bien es algebraico, se basa en la fórmula de un IC. Si este paso se considera una "extracción de datos" y no "hacer inferencia", el problema es viable y **Avanzado** por esta complejidad.

Solución Problema 3: Ejemplo 1: Desplazamiento al trabajo

1. Primera Lectura (Contexto General): * Tiempos de desplazamiento al trabajo (privado vs. público), distribuciones normales, intervalo de confianza.

2. Segunda Lectura (Análisis y Desglose):

- **a) Identifica las preguntas y trata de clasificarlas en tipo/s de ejercicio/s:**
 - 1.1: $P(\text{Privado} > 25 \text{ min}) \rightarrow$ **Normal**. Matiz: σ debe deducirse del IC.
 - 1.2: $P(\text{Trabajador al azar} > 25 \text{ min}) \rightarrow$ **Normal** (para cada grupo) y **Probabilidad Total** (usando diagrama de árbol implícito). Matiz: Usa la misma σ deducida.
- **b) Extrae Datos Relevantes y Elimina Innecesarios:**
 - Normal, misma σ .
 - Privado: IC(95%)=[24.06, 29.94], $n=100$. Para 1.1: $\mu_{\text{priv}}=27$.
 - Público: Para 1.2: $\mu_{\text{pub}}=25$.
 - Para 1.2: $P(\text{Trabajador usa Privado})=0.60$, $P(\text{Trabajador usa Público})=0.40$.
 - **Tachar:** ~~Media nacional 36 min~~; ~~descripciones cualitativas de los viajes~~; ~~media muestral público 24 min (se da μ poblacional para el cálculo)~~.

3. Resolución (Estrategia y Ejecución):

- **a) Planifica:**
 - Deducir σ del IC privado: $E = z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$.
 - 1.1: $X_{\text{priv}} \sim N(27, \sigma)$. Calcular $P(X_{\text{priv}} > 25)$.
 - 1.2: $P(T > 25) = P(T > 25 | \text{Priv})P(\text{Priv}) + P(T > 25 | \text{Pub})P(\text{Pub})$.
 - $P(T > 25 | \text{Priv})$ ya calculado.
 - $X_{\text{pub}} \sim N(25, \sigma)$. Calcular $P(X_{\text{pub}} > 25)$.
- **b) Ejecuta:**
 - **Deducir σ del Intervalo de Confianza:**
 - Centro del IC (media muestral) $\bar{x} = (24.06 + 29.94) / 2 = 27 \text{ min}$.
 - Error máximo $E = 29.94 - 27 = 2.94 \text{ min}$.
 - Para NC 95%, $z_{\alpha/2} = 1.96$.
 - $E = z_{\alpha/2} * (\sigma/\sqrt{n}) \Rightarrow 2.94 = 1.96 * (\sigma/\sqrt{100}) \Rightarrow 2.94 = 1.96 * (\sigma/10)$.
 - $\sigma = (2.94 * 10) / 1.96 = 15 \text{ min}$.
 - La desviación típica σ es 15 minutos.
 - **1.1. Calcular $P(X_{\text{priv}} > 25)$:**
 - $X_{\text{priv}} \sim N(\mu=27, \sigma=15)$.
 - $Z = (25 - 27) / 15 = -2 / 15 \approx -0.1333$.
 - $P(X_{\text{priv}} > 25) = P(Z > -0.1333) = P(Z < 0.1333) \approx 0.5517$ (usando tablas para $Z=0.13$).
 - La probabilidad de que un empleado con transporte privado tarde más de 25 minutos es aproximadamente 0.5517.

- **1.2. Calcular $P(\text{Trabajador al azar tarde} > 25 \text{ minutos})$:**
 - Sea $T > 25 = \text{"tardar} > 25 \text{ min"}$; Priv = "usa privado"; Pub = "usa público".
 - $P(T > 25 \mid \text{Priv}) \approx 0.5517$ (de 1.1).
 - $X_{\text{pub}} \sim N(\mu=25, \sigma=15)$. $Z = (25 - 25) / 15 = 0$. $P(X_{\text{pub}} > 25) = P(Z > 0) = 0.5$.
 - $P(T > 25) = P(T > 25 \mid \text{Priv})P(\text{Priv}) + P(T > 25 \mid \text{Pub})P(\text{Pub})$
 - $P(T > 25) = (0.5517 * 0.60) + (0.5 * 0.40) = 0.33102 + 0.20 = 0.53102$.
 - *La probabilidad de que un trabajador elegido al azar tarde más de 25 minutos es aproximadamente 0.5310.*

4. Revisión (Validación y Respuesta):

- **a) Verifica:** Cálculo de σ y probabilidades Normales.
- **b) Sentido Lógico:** $\sigma=15$ es razonable. Probabilidades ok.
- **c) Respuesta Precisa:**
 - 1.1: $P(\text{empleado privado tarde} > 25 \text{ min}) \approx 0,5517$.
 - 1.2: $P(\text{trabajador ao azar tarde} > 25 \text{ min}) \approx 0,5310$.

4. Exemplo 3: Contedores de lixo

Os responsables municipais da poboación na que reside levaron a cabo o ano pasado un plan de renovación dos contedores de lixo, instalando novos contedores de recollida selectiva. A súa capacidade variará entre os 1.800 litros para os contedores de materia orgánica e os 2.900 litros para os contedores destinados á recollida de envases lixeiros, papel e cartón, vidro e fracción restante. Os contedores, ademais de contar con sensores intelixentes que medirán o seu volume para optimizar o tráfico de camións, integraranse no mobiliario urbano para reducir o impacto estético. Cando se iniciou o citado plan, tívose en conta que en ocasións son necesarias reparacións ou substitucións por diferentes motivos: desgaste polo uso, rotura por fenómenos meteorolóxicos adversos, actos vandálicos, etc. Estableceuse que nun mes determinado a probabilidade de reparar ou substituír polo menos dous contedores de papel e cartón é 0,1; ademais, que a probabilidade de reparar ou substituír polo menos dous contedores de envases lixeiros, tendo reparados ou substituídos polo menos dous contedores de papel e cartón, é de 0,4. Sábese que a probabilidade de que nun mes determinado sexa necesario reparar como máximo un contedor de papel e cartón e como máximo un de envases lixeiros é de 0,72.

Responda estes tres apartados: 3.1., 3.2. e 3.3.

3.1. Calcule a probabilidade de que nun mes determinado sexa necesario reparar ou substituír máis dun contedor dos dous tipos considerados no parágrafo anterior.

3.2. Se se sabe que nun mes foi necesario reparar ou substituír menos de dous contedores de papel e cartón, cal é a probabilidade de que nese mesmo mes sexa necesario reparar ou substituír dous ou máis contedores de envases lixeiros?

3.3. Sen realizar operacións adicionais, indique se os acontecementos “reparar ou substituír polo menos dous contedores de papel e cartón” e “reparar ou substituír polo menos dous contedores de envases lixeiros” son ou non independentes. Parécelle razoable? Xustifique a resposta.

Análisis del problema

- **Tipos de problemas básicos incluídos:** Tabla dd contingencia. Sucesos (álgebra de sucesos avanzada, De Morgan), Probabilidad Condicionada, Independencia de sucesos.
- **Dificultades competenciales:**
 - **Contexto largo/elaborado.**
 - **Datos innecesarios:** El primer párrafo sobre capacidades y sensores de los contenedores.
 - **Interpretación muy cuidadosa del lenguaje y traducción a sucesos:** Sea $A =$ "reparar/substituír ≥ 2 papel/cartón" y $B =$ "reparar/substituír ≥ 2 envases". Se da $P(A)=0.1$; $P(B|A)=0.4$; $P(A^c \cap B^c)=0.72$.
 - 3.1 pide $P(A \cap B)$.
 - 3.2 pide $P(B | A^c)$.
 - 3.3 pide analizar la independencia de A y B .
 - **Lógica de sucesos compleja:** Requiere aplicar correctamente las fórmulas de probabilidad condicionada, unión, intersección y las leyes de De Morgan para resolver. Por ejemplo, de $P(A^c \cap B^c)$ se obtiene $P(A \cup B)$.

Solución Problema 4: Exemplo 3: Contadores de lixo

1. Primera Lectura (Contexto General): * Reparación/sustitución de contenedores de papel y envases, con probabilidades dadas.

2. Segunda Lectura (Análisis y Desglose):

- **a) Identifica las preguntas y trata de clasificarlas en tipo/s de ejercicio/s:**
 - 3.1: $P(\geq 2 \text{ Papel} \cap \geq 2 \text{ Envases}) \rightarrow$ **Álgebra de Sucesos.**
 - 3.2: $P(\geq 2 \text{ Envases} \mid < 2 \text{ Papel}) \rightarrow$ **Probabilidad Condicionada.** requiere deducir $P(< 2 \text{ Papel} \cap \geq 2 \text{ Envases})$ y $P(< 2 \text{ Papel})$, idealmente **tabla de contingencia.**
 - 3.3: ¿Independientes " $\geq 2 \text{ Papel}$ " y " $\geq 2 \text{ Envases}$ "? $\rightarrow$ **Sucesos** (conceptual y con cálculo).
- **b) Extrae Datos Relevantes y Elimina Innecesarios:**
 - $A = "\geq 2 \text{ Papel}"$, $B = "\geq 2 \text{ Envases}"$.
 - $P(A) = 0.1$; $P(B \mid A) = 0.4$; $P(A^c \cap B^c) = 0.72$.
 - **Tachar:** ~ ~ Descripciones de capacidades, sensores, motivos de reparación... ~ ~ (contexto).

3. Resolución (Estrategia y Ejecución):

- **a) Planifica:**
 - 3.1: $P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A)$.
 - Construir **tabla de contingencia** para 3.2. Necesitará $P(A)$, $P(A \cap B)$, $P(A^c \cap B^c)$.
 - 3.2: $P(B \mid A^c) = P(B \cap A^c) / P(A^c)$ (leer de la tabla).
 - 3.3: Comprobar $P(A \cap B)$ vs $P(A)P(B)$ (necesitará $P(B)$ de la tabla).
- **b) Ejecuta:**
 - **3.1. Calcular $P(A \cap B)$:**
 - $P(A \cap B) = P(B \mid A) * P(A) = 0.4 * 0.1 = 0.04$.
 - *A probabilidade de que nun mes determinado sexa necesario reparar ou substituír máis dun contedor dos dous tipos é 0,04.*
 - **Construir Tabla de Contingencia:**

	B (≥ 2 Env)	B^c (<2 Env)	Tot al
$A(\geq 2 \text{ Papel})$	0.04	0.06	0.1
$A^c(< 2 \text{ Papel})$	0.18	0.72	0.9
Total	0.22	0.78	1.0

○ **3.2. Calcular $P(B | A^c)$:**

- $P(B | A^c) = P(B \cap A^c) / P(A^c) = 0.18 / 0.9 = 0.2$.
- *Se se sabe que nun mes foi necesario reparar ou substituír menos de dous contedores de papel e cartón, a probabilidade de que nese mesmo mes sexa necesario reparar ou substituír dous ou máis contedores de envases lixeiros é 0,2.*

○ **3.3. Independencia de A y B:**

- ¿ $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$?
- $P(A \cap B) = 0.04$.
- $P(A) * P(B) = 0.1 * 0.22 = 0.022$.
- Como $0.04 \neq 0.022$, os sucesos A y B non son independentes.
- *Razoable?* Podería ser razoable. Se $P(B|A)=0.4 > P(B)=0.22$, saber que se repararon contedores de papel aumenta a probabilidade de reparar envases, indicando dependencia.

4. Revisión (Validación y Respuesta):

- **a) Verifica:** Cálculos y tabla correctos.
- **b) Sentido Lógico:** Probabilidades válidas.
- **c) Respuesta Precisa:**
 - 3.1: $P(>1 \text{ contedor de ambos tipos}) = 0,04$.
 - 3.2: $P(\geq 2 \text{ envases } | < 2 \text{ papel}) = 0,2$.
 - 3.3: Non son independentes.

5. Exemplo 5: Incendios e avións anfibios

A crise climática non vai parar, e a comunidade internacional rexeita o compromiso necesario para revertela. O período comprendido entre 2010 e 2019 foi a década máis cálida que se ten rexistrada, provocando incendios forestais, furacáns, secas, inundacións e outros grandes desastres naturais a todos os continentes. A nosa Comunidade Autónoma sofre numerosos incendios ao longo do ano. Queremos analizar diferentes propostas que nos axuden a combatelas e tentar minimizar o seu impacto no medio ambiente. Para extinguir ou mitigar o lume emprégase auga transportada en avións anfibios, de distintos modelos. O avión anfíbio tipo 2 (ALFA) ten unha capacidade de 2.000 litros de auga, e o modelo máis empregado é o Air Tractor AT-802FB. Tamén empregan avións anfíbio tipo 1 (FOCA), tanto os Canadair CL-215T como os Bombardier 415, con capacidades de 5.000 e 6.000 litros, respectivamente. Por datos recollidos de varios anos, pódese afirmar que os bombeiros/as conseguen apagar en menos de dous días o 80% dos lumes que afectan a máis dunha hectárea. Nun mes no que se produciron 150 lumes de máis dunha hectárea en Galicia.

Responda estes catro apartados: 5.1., 5.2., 5.3. e 5.4

5.1. Calcule o valor esperado e a desviación típica do número de lumes de máis dunha hectárea que nese mes os/as bombeiros/as consigan apagar en menos de dous días.

5.2. Calcule a probabilidade de que nese mes os/as bombeiros/as consigan apagar entre 115 e 125 (ambos os dous incluídos) lumes de máis dunha hectárea en menos de dous días.

5.3. Considere os sucesos A ="Empregar avións tipo 2", B ="Empregar avións tipo 1" e C ="Empregar avións tipo 1 e tipo 2". Escriba a relación entre os sucesos A , B e C . Escriba o valor da probabilidade do suceso C en función da probabilidade dos sucesos A e B no caso de que A e B sexan independentes. Escriba o valor da probabilidade do suceso C en función da probabilidade dos sucesos A e B no caso de que A e B sexan incompatibles.

5.4. Proporcione unha interpretación do que quere dicir que os sucesos A e B do apartado anterior sexan incompatibles. Proporcione unha interpretación do que quere dicir que os sucesos A e B do apartado anterior sexan independentes.

Análisis del problema

- **Tipos de problemas básicos incluídos:** Binomial (valor esperado, desviación típica, cálculo de probabilidade con aproximación Normal para 5.2), Sucesos (relación entre ellos, independencia, incompatibilidad).
- **Dificultades competenciales:**
 - **Contexto largo/elaborado.**
 - **Datos innecesarios:** La información sobre los modelos de aviones y sus capacidades es irrelevante para los cálculos.
 - **Combinar estrategias:** Se usa la Binomial para 5.1 y 5.2 (con aproximación Normal para 5.2 debido a $n=150$ y cálculo de $P(115 \leq X \leq 125)$).
 - **Conceptual / Definiciones (5.3, 5.4):** Estos apartados son puramente conceptuales sobre álgebra de sucesos, la relación $C=A \cap B$, y las fórmulas de $P(A \cap B)$ bajo independencia e incompatibilidad, además de la interpretación de estos conceptos.

Solución Problema 5: Exemplo 5: Incendios e avións anfibios

1. Primera Lectura (Contexto General): * Extinción de incendios, probabilidade de apagarlos, número de incendios en un mes, y conceptos de sucesos.

2. Segunda Lectura (Análisis y Desglose):

- **a) Identifica las preguntas y trata de clasificarlas en tipo/s de ejercicio/s:**
 - 5.1: $E[X]$ y $\sigma[X]$ de lumes apagados -> **Binomial**.
 - 5.2: $P(115 \leq X \leq 125)$ lumes apagados -> **Binomial**, probable **Aproximación Normal**.
 - 5.3: Relación A,B,C; $P(C)$ si indep/incomp -> **Álgebra de Sucesos**.
 - 5.4: Interpretar indep/incomp -> **Sucesos** (conceptual).
- **b) Extrae Datos Relevantes y Elimina Innecesarios:**
 - $p=P(\text{apagar} < 2 \text{ días})=0.80$; $n=150$ lumes.
 - Sucesos: A="Tipo 2", B="Tipo 1", C="Tipo 1 y Tipo 2".
 - **Tachar:** ~~Crisis climática, décadas cálidas...~~; ~~detalles modelos aviones y capacidades...~~ (contexto).

3. Resolución (Estrategia y Ejecución):

- **a) Planifica:**
 - 5.1: $X \sim B(150, 0.8)$. $E[X]=np$, $\sigma[X]=\sqrt{npq}$.
 - 5.2: Aproximar a $Y \sim N(np, \sqrt{npq})$. $P(114.5 \leq Y \leq 125.5)$ con corrección por continuidad.
 - 5.3: $C=A \cap B$. Fórmulas de $P(A \cap B)$.
 - 5.4: Definiciones.
- **b) Ejecuta:**
 - Sea X = "número de lumes de máis dunha hectárea apagados en menos de dous días".
 - $X \sim B(n=150, p=0.80)$. Entonces $q = 1 - p = 0.20$.
 - **5.1. Valor esperado y desviación típica:**
 - $E[X] = np = 150 * 0.80 = 120$ lumes.
 - $\text{Var}(X) = npq = 150 * 0.80 * 0.20 = 120 * 0.20 = 24$.
 - $\sigma[X] = \sqrt{24} \approx 4.899$ lumes.
 - *O valor esperado de lumes apagados en menos de dous días é 120, e a desviación típica é aproximadamente 4,899 lumes.*

- **5.2. $P(115 \leq X \leq 125)$:**
 - Verificamos condiciones para aproximación Normal: $np = 120 \geq 5$; $nq = 150 \cdot 0.20 = 30 \geq 5$. Se puede aproximar.
 - Aproximamos X por $Y \sim N(\mu=120, \sigma=\sqrt{24} \approx 4.899)$.
 - Aplicamos corrección por continuidad: $P(115 \leq X \leq 125) \approx P(114.5 \leq Y \leq 125.5)$.
 - Tipificamos los límites:
 - $Z_1 = (114.5 - 120) / 4.899 = -5.5 / 4.899 \approx -1.1227$
 - $Z_2 = (125.5 - 120) / 4.899 = 5.5 / 4.899 \approx 1.1227$
 - $P(-1.12 \leq Z \leq 1.12) = P(Z \leq 1.12) - P(Z < -1.12) = P(Z \leq 1.12) - (1 - P(Z \leq 1.12)) = 2 \cdot P(Z \leq 1.12) - 1$.
 - De la tabla Z, $P(Z \leq 1.12) \approx 0.8686$.
 - $2 \cdot 0.8686 - 1 = 1.7372 - 1 = 0.7372$.
 - *A probabilidade de que nese mes os bombeiros consigan apagar entre 115 e 125 lumes (incluídos) en menos de dous días é aproximadamente 0,7372.*
- **5.3. Sucesos A, B, C:**
 - **Relación:** O suceso C ("Empregar avións tipo 1 e tipo 2") é a intersección dos sucesos A ("Empregar avións tipo 2") e B ("Empregar avións tipo 1"). É dicir, $C = A \cap B$.
 - **Se A e B son independentes:** $P(C) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
 - **Se A e B son incompatibles:** $P(C) = P(A \cap B) = 0$.
- **5.4. Interpretación de incompatibilidad e independencia:**
 - **Incompatibles:** Se A e B fosen incompatibles, significaría que nun mesmo incendio (ou operación de extinción) non se poderían empregar simultaneamente avións tipo 1 e avións tipo 2.
 - **Independentes:** Se A e B fosen independentes, significaría que a decisión (ou necesidade) de empregar avións tipo 2 non afecta á probabilidade de que se empreguen avións tipo 1, e viceversa.

4. Revisión (Validación y Respuesta):

- **a) Verifica:** Cálculos Binomial y Normal.
- **b) Sentido Lógico:** Valores esperados y probabilidades razonables.
- **c) Respuesta Precisa:**
 - 5.1: $E[X]=120$ lumes, $\sigma[X]\approx 4,899$ lumes.
 - 5.2: $P(\text{entre 115 e 125 lumes apagados}) \approx 0,7372$.
 - 5.3: $C=A \cap B$. Se indep: $P(C)=P(A)P(B)$. Se incomp: $P(C)=0$.
 - 5.4: Incompatible=non usar ambos tipos á vez. Independente=uso dun tipo non inflúe no outro.

6. Exemplo 8: Viaxes a Madrid, cadea de Markov

Unha persoa viaxa regularmente a Madrid utilizando tres tipos de medios de transporte distintos: tren, avión e coche particular. A probabilidade de que utilice cada un dos medios de transporte nunha viaxe depende unicamente do medio de transporte que utilizou na viaxe anterior. En matemáticas isto coñécese como cadea de Markov, que leva asociada unha matriz (denominada matriz de transición), cuxos elementos son probabilidades, de maneira que a suma de cada fila vale 1. A probabilidade de que o viaxeiro use cada medio de transporte vén dada pola seguinte matriz de transición onde o subíndice 0 indica o transporte da viaxe anterior e o subíndice 1 en transporte da viaxe actual.

Desde (i) \ A (j)	T_1	A_1	C_1
T_0	0	3/4	1/4
A_0	1/4	1/2	1/4
C_0	1/4	1/2	1/4

O 75% das veces que fai a viaxe en tren chega con atraso, se viaxa en avión atrasase unha de cada dez veces e se utiliza o seu coche particular chega con atraso na metade das ocasións. Esta persoa vai viaxar de novo e sabemos que a última vez desprazouse en avión. A compañía ferroviaria propónse reformar a súa política de indemnizacións por atraso, xa que nalgúns ocasións provocan o colapso da súa páxina web. Decidiu devolver o importe do billete aos viaxeiros que sufrisen o 5% de maiores atrasos. A compañía, mediante técnicas estatísticas, concluíu que o seu tempo de atraso é unha variable aleatoria normal de media 20 minutos e desviación típica 8 minutos e así o publicou na súa páxina web.

8.1. Cal é a probabilidade de que chegue a Madrid con atraso?

8.2. Se sabemos que chegou con atraso, Cal é a probabilidade de que utilizase o tren?

8.3. Tería o viaxeiro dereito á devolución do importe do seu billete se chegou a Madrid con 30 minutos de atraso? Xustifique a súa resposta. (*Apartado 8.4 sobre muestreo de medias omitido*)

Análisis del problema

- **Tipos de problemas básicos incluídos:** Diagrama de árbol (usando la matriz de transición para la primera etapa de elección de transporte), Probabilidad Total (8.1), Bayes (8.2), Normal (8.3).
- **Dificultades competenciales:**
 - **Contexto novedoso / Terminología:** Introducción del concepto de "cadea de Markov" y matriz de transición, aunque se explica su uso (las filas suman 1 y representan $P(\text{EstadoSiguiente} | \text{EstadoActual})$).
 - **Interpretación de la matriz:** El alumno debe usar correctamente la fila correspondiente al estado anterior (viajó en avión, A_0) para obtener las probabilidades del transporte en el viaje actual.
 - **Combinar estrategias:** Se debe primero determinar la probabilidad de usar cada medio en el viaje actual (dado que el anterior fue en avión), y luego aplicar Probabilidad Total usando las probabilidades de retraso condicionadas al medio. Luego Bayes. El apartado 8.3 introduce una variable Normal independiente de lo anterior pero contextualizada.
 - **Filtrado de información:** La información sobre la política de indemnización y el tiempo de retraso Normal solo es relevante para 8.3.

Solución Problema 6: Exemplo 8: Viajes a Madrid, cadea de Markov

1. Primera Lectura (Contexto General): * Viajes a Madrid, elección de transporte depende del anterior (Markov). P(retraso|medio). Política de indemnización tren (Normal).

2. Segunda Lectura (Análisis y Desglose):

- **a) Identifica las preguntas y trata de clasificarlas en tipo/s de ejercicio/s:**
 - 8.1: $P(\text{Retraso} \mid \text{últ. viaje Avión}) \rightarrow$ **Diagrama de Árbol** (usando matriz transición) y Probabilidad Total.
 - 8.2: $P(\text{Tren} \mid \text{Retraso}) \rightarrow$ Teorema de Bayes.
 - 8.3: ¿Derecho a devolución (tren, 30min retraso)? $\rightarrow$ **Normal** (percentil).
- **b) Extrae Datos Relevantes y Elimina Innecesarios:**
 - Último Avión (A_0). Fila de A_0 de la matriz: $P(T_1 \mid A_0) = 1/4$, $P(A_1 \mid A_0) = 1/2$, $P(C_1 \mid A_0) = 1/4$.
 - $P(\text{Retraso} \mid T) = 0.75$, $P(\text{Retraso} \mid A) = 0.10$, $P(\text{Retraso} \mid C) = 0.50$.
 - Tren retraso $\sim N(\mu=20, \sigma=8)$. Devolución si en 5% mayores retrasos.
 - **Tachar:** ~~Explicación de Markov, colapso web compañía...~~ (contexto).

3. Resolución (Estrategia y Ejecución):

- **a) Planifica:**
 - Árbol: 1ª rama $P(\text{Medio actual} \mid A_0)$, 2ª rama $P(\text{Retraso} \mid \text{Medio actual})$.
 - 8.1: $P(R) = P(T_1)P(R \mid T_1) + P(A_1)P(R \mid A_1) + P(C_1)P(R \mid C_1)$. (Aquí T_1, A_1, C_1 son los del viaje actual).
 - 8.2: $P(T_1 \mid R) = [P(T_1)P(R \mid T_1)] / P(R)$.
 - 8.3: Hallar k en $N(20,8)$ tal que $P(X > k) = 0.05$. Comparar 30 min con k .
- **b) Ejecuta:**
 - Sea $T = \text{"usa Tren viaje actual"}$, $A = \text{"usa Avión viaje actual"}$, $C = \text{"usa Coche viaje actual"}$.
 - Dado que el viaje anterior fue Avión (A_0):
 - $P(T) = P(T_1 \mid A_0) = 1/4 = 0.25$
 - $P(A) = P(A_1 \mid A_0) = 1/2 = 0.50$
 - $P(C) = P(C_1 \mid A_0) = 1/4 = 0.25$
 - **Diagrama de Árbol (y probabilidades de intersección):**
 - Tren ($P(T) = 0.25$)
 - Retraso ($P(R \mid T) = 0.75$) $\Rightarrow P(T \cap R) = 0.25 * 0.75 = 0.1875$
 - No Retraso ($P(NR \mid T) = 0.25$)
 - Avión ($P(A) = 0.50$)
 - Retraso ($P(R \mid A) = 0.10$) $\Rightarrow P(A \cap R) = 0.50 * 0.10 = 0.0500$
 - No Retraso ($P(NR \mid A) = 0.90$)
 - Coche ($P(C) = 0.25$)
 - Retraso ($P(R \mid C) = 0.50$) $\Rightarrow P(C \cap R) = 0.25 * 0.50 = 0.1250$
 - No Retraso ($P(NR \mid C) = 0.50$)

- **8.1. Calcular $P(\text{Retraso}) = P(R)$:**
 - $P(R) = P(T \cap R) + P(A \cap R) + P(C \cap R)$
 - $P(R) = 0.1875 + 0.0500 + 0.1250 = 0.3625$.
 - *A probabilidade de que chegue a Madrid con atraso é 0,3625.*
- **8.2. Calcular $P(\text{Tren} \mid \text{Retraso}) = P(T \mid R)$:**
 - $P(T \mid R) = P(T \cap R) / P(R) = 0.1875 / 0.3625 \approx 0.5172$.
 - *Se sabemos que chegou con atraso, a probabilidade de que utilizase o tren é aproximadamente 0,5172.*
- **8.3. ¿Derecho a devolución si retraso de 30 min (tren)?**
 - $X \sim N(\mu=20, \sigma=8)$. Se devuelve si el retraso está en el 5% superior, es decir, $P(X > k) = 0.05$, o $P(X \leq k) = 0.95$.
 - Tipificamos: $P(Z \leq (k-20)/8) = 0.95$.
 - De la tabla Z, el valor z que acumula 0.95 es aproximadamente 1.645.
 - $(k-20)/8 = 1.645 \Rightarrow k - 20 = 1.645 * 8 = 13.16 \Rightarrow k = 20 + 13.16 = 33.16$ minutos.
 - El viajero tuvo un retraso de 30 minutos. Como 30 minutos < 33.16 minutos, *non tería dereito á devolución do importe do seu billete.*

4. Revisión (Validación y Respuesta):

- **a) Verifica:** Cálculos árbol, Bayes, Normal.
- **b) Sentido Lógico:** Probabilidades válidas, umbral $k > \mu$.
- **c) Respuesta Precisa:**
 - 8.1: $P(\text{atraso}) = 0,3625$.
 - 8.2: $P(\text{Tren} \mid \text{atraso}) \approx 0,5172$.
 - 8.3: Non tería dereito (30 min < 33,16 min).

7. Exemplo 9: Consultaría técnica, paridade

Unha consultaría técnica, líder en promover a paridade entre os seus enxeñeiros, afronta os seus plans de expansión tendo en conta o seu principio fundacional de que a porcentaxe de mulleres en todos os seus departamentos debe ser de polo menos o 40%. Na actualidade o seu departamento de proxectos está integrado por 10 mulleres e 14 homes. Desexa contratar a un enxeñeiro ou enxeñeira dunha lista de candidatos na que hai 2 mulleres e 3 homes, que en diante denominaremos M1, M2, H1, H2 e H3. Todos eles foron baremados con respecto aos méritos que presentan de forma que as probabilidades de que sexan contratados son as da seguinte táboa:

M1	H1	M2	H2	H3
1/5	1/10	3/10	1/5	1/5

Definimos os seguintes sucesos: C_1 = "A nova contratación é unha muller". C_2 = "A nova contratación é un home".

Responda estes tres apartados: 9.1., 9.2. e 9.3.

9.1. Mantería a empresa o seu principio fundacional coa nova contratación?

9.2. Calcule a porcentaxe esperada de mulleres no departamento de proxectos unha vez feita a nova contratación.

9.3. O Goberno incentiva a contratación de mulleres enxeñeiras con rebaixas fiscais á empresa contratante se a porcentaxe de mulleres nos distintos departamentos da empresa é de polo menos o 45%. Sería posible acceder ás rebaixas fiscais se as probabilidades de contratación de cada un dos candidatos son as seguintes?: Xustifique a súa resposta.

M1	H1	M2	H2	H3
x	y	x	y	y

Análisis del problema

- **Tipos de problemas básicos incluidos:** Probabilidad elemental (suma de probabilidades para $P(C_1)$), Cálculo de porcentajes, Lógica de valor esperado (para "porcentaxe esperada"), Análisis de escenarios.
- **Dificultades competenciales:**
 - **Modelización / Definición de variables:**
 - 9.1: Calcular $P(C_1) = P(M_1) + P(M_2)$.
 - 9.2: "Porcentaxe esperada" requiere calcular $E[\text{Nº Mujeres Final}] / (\text{Total Final})$. $E[\text{Nº Mujeres Final}] = (10+1)P(C_1) + (10)P(C_2)$. $P(C_2) = 1 - P(C_1)$. Total Final = 25.
 - 9.3: Es un análisis de escenarios. Nuevas probabilidades, $P(C_1) = P(M_1) + P(M_2) = x+x = 2x$. $P(C_2) = P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = y+y+y = 3y$... Interpretación de "mantería", "porcentaxe esperada", "sería posible acceder".
 - **Razonamiento con variables (x, y) en 9.3.**

Solución Problema 7: Exemplo 9: Consultaría técnica, paridad

1. Primera Lectura (Contexto General): * Consultoría con política de paridad ($\geq 40\%$ mujeres). Impacto de nueva contratación. Otra política ($\geq 45\%$).

2. Segunda Lectura (Análisis y Desglose):

- **a) Identifica las preguntas y trata de clasificarlas en tipo/s de ejercicio/s:**
 - 9.1: ¿Mantiene $\geq 40\%$ mujeres? -> Cálculo de Porcentajes (dos escenarios).
 - 9.2: % esperado mujeres -> **Valor Esperado**.
 - 9.3: ¿Posible $\geq 45\%$ con $P(x,y)$? -> Análisis de Escenarios, Porcentajes.
- **b) Extrae Datos Relevantes y Elimina Innecesarios:**
 - Actual: 10 Mujeres (M), 14 Hombres (H) (Total 24).
 - $P(M1)=1/5$, $P(H1)=1/10$, $P(M2)=3/10$, $P(H2)=1/5$, $P(H3)=1/5$.
 - C_1 ="A nova contratación é unha muller". C_2 ="A nova contratación é un home".
 - Para 9.3: Nuevas probabilidades $P(M1)=x$, $P(M2)=x$; $P(H1)=P(H2)=P(H3)=y$.
 - **Tachar:** ~~Descripciones generales de la consultoría...~~ (contexto).

3. Resolución (Estrategia y Ejecución):

- **a) Planifica:**
 - Calcular $P(C_1) = P(M1)+P(M2)$; $P(C_2) = P(H1)+P(H2)+P(H3)$.
 - 9.1: Calcular % mujeres si se contrata C_1 . Calcular % mujeres si se contrata C_2 . Comparar con 40%.
 - 9.2: N° esperado de mujeres final = $(11)P(C_1) + (10)P(C_2)$. % esperado = $(N^\circ \text{ esperado} / 25) * 100$.
 - 9.3: Con nuevas $P(C_1)=2x$ y $P(C_2)=3y$. Analizar % mujeres si se contrata mujer $(11/25)$ y si se contrata hombre $(10/25)$. Comparar con 45%.
- **b) Ejecuta:**
 - **Probabilidades de contratación C_1 y C_2 (para 9.1 y 9.2):**
 - $P(C_1) = P(M1) + P(M2) = 1/5 + 3/10 = 2/10 + 3/10 = 5/10 = 0.5$.
 - $P(C_2) = P(H1) + P(H2) + P(H3) = 1/10 + 1/5 + 1/5 = 1/10 + 2/10 + 2/10 = 5/10 = 0.5$.
 - (Comprobación: $P(C_1) + P(C_2) = 0.5 + 0.5 = 1$).
 - **9.1. ¿Mantendría el principio fundacional ($\geq 40\%$)?**
 - Si se contrata una mujer (C_1):
 - N° mujeres = $10 + 1 = 11$. Total empleados = $24 + 1 = 25$.
 - % Mujeres = $(11/25) * 100 = 44\%$. ($44\% \geq 40\%$, Sí cumple).
 - Si se contrata un hombre (C_2):
 - N° mujeres = 10. Total empleados = 25.
 - % Mujeres = $(10/25) * 100 = 40\%$. ($40\% \geq 40\%$, Sí cumple).
 - *Dado que en ambos escenarios posibles el porcentaje de mujeres es $\geq 40\%$, la empresa Sí mantendría o seu principio fundacional.*

○ **9.2. Porcentaje esperado de mujeres:**

- Número esperado de mujeres después de la contratación:
 - $E[N^{\circ} \text{ Mujeres final}] = (\text{Número de mujeres si se contrata mujer}) * P(C_1) + (\text{Número de mujeres si se contrata hombre}) * P(C_2)$
 - $E[N^{\circ} \text{ Mujeres final}] = (11 * 0.5) + (10 * 0.5) = 5.5 + 5 = 10.5 \text{ mujeres.}$
- Total de empleados después de la contratación = 25.
- Porcentaje esperado de mujeres = $(10.5 / 25) * 100 = 42\%$.
- *A porcentaxe esperada de mulleres no departamento de proxectos unha vez feita a nova contratación é do 42%.*

○ **9.3. ¿Posible acceder a rebajas fiscales ($\geq 45\%$) con nuevas P(x,y)?**

- Si se contrata una mujer (suceso C_1 , con probabilidad $P(C_1)=2x$):
 - El porcentaje de mujeres sería $(10+1)/25 = 11/25 = 0.44 = 44\%$.
- Si se contrata un hombre (suceso C_2 , con probabilidad $P(C_2)=3y$):
 - El porcentaje de mujeres sería $10/25 = 0.40 = 40\%$.
- En ninguno de los dos casos posibles (contratar una mujer o contratar un hombre) el porcentaje de mujeres alcanza el 45%. El máximo que se puede alcanzar es 44%.
- *Non sería posible acceder ás rebaixas fiscais. Mesmo se se contrata a unha muller, o porcentaje de mulleres no departamento só acadaría o 44%, que é inferior ao 45% requirido.*

4. Revisión (Validación y Respuesta):

- **a) Verifica:** Cálculos de P, %, $E[X]$.
- **b) Sentido Lógico:** Resultados coherentes.
- **c) Respuesta Precisa:**
 - 9.1: Si, mantaría o principio (44% ou 40%).
 - 9.2: % esperado de mulleres = 42%.
 - 9.3: Non sería posible (máximo 44%).

8. Exemplo 4: Probas médicas e Lei de Benford

Algunhas probas médicas resultan ser «positivas» ou «negativas». Se a proba fose infalible, «positiva» indicaría que a persoa examinada ten a enfermidade en cuestión; «negativa» indicaría que non a ten. Unha guionista está escribindo, para unha coñecida plataforma de streaming, unha historia que ten lugar nun país imaxinario. Explica no seu guión que, para detectar unha rara enfermidade que afecta a 1 de cada 10000 persoas, unha empresa farmacéutica logra desenvolver unha proba que resulta ser moi fiable, pois soamente 1 de cada 100 persoas libres da enfermidade obtén un resultado positivo, e soamente 2 de cada 100 persoas que padecen a enfermidade obteñen resultados negativos. Di tamén que os detalles que revelan o deseño da proba están protexidos por varios sistemas de seguridade, e que, o 9 de agosto de 2024, a clave que permite abrir o último deses sistemas é o número 219, que se calculou, especificamente para ese día, do seguinte xeito: *clave = n.º de ríos cuxa lonxitude en metros comeza co dígito 9, de entre os 2000 máis longos do país = 219*. Pouco antes de entregar o seu guión, xórdenlle dúbidas acerca da verosimilitude das súas cifras, conque decide compartilas cunha amiga matemática. Esta dílle que lle responderá despois de ter calculado as seguintes probabilidades: P_1 = a probabilidade de que unha persoa cunha proba positiva teña a enfermidade. P_2 = a probabilidade de que unha persoa cunha proba negativa teña a enfermidade. P_3 = a probabilidade de que 219 ríos ou máis teñan unha lonxitude en metros cuxo primeiro dígito sexa o 9. Con relación a este punto, a amiga matemática observa que, en moitos conxuntos de datos reais, os primeiros díxitos non se distribúen de xeito uniforme, senón que seguen a chamada lei de Benford, a cal afirma que a probabilidade de que un número comece co dígito d é $p = \log_{10}(1 + 1/d)$. Por elo, suporá que a probabilidade de que un río teña unha lonxitude en m cuxo primeiro dígito sexa o 9 é $p = 0.0458$.

4.1. Calcule P_1 e P_2 . Entenda que os únicos resultados posibles da proba son «positivo» ou «negativo».

4.2. Calcule P_3 .

4.3. En función dos valores de P_1 , P_2 e P_3 , dea ao menos un motivo polo cal a guionista debería modificar algunha das súas cifras. Non é necesario que diga cales deberían ser esas modificacións nin como deberían ser efectuadas.

Análisis del problema

- **Tipos de problemas básicos incluídos:** Diagrama de árbol/Probabilidade Total y Bayes (para P_1 y P_2), Binomial con aproximación Normal (para P_3).
- **Dificultades competenciales:**
 - **Contexto muy elaborado y multifacético:** Mezcla un escenario de pruebas diagnósticas con la Ley de Benford aplicada a la longitud de ríos para una "clave".
 - **Datos innecesarios / Distractores:** La forma de calcular la "clave=219" y su valor específico es un distractor para el cálculo de P_3 ; lo importante es que $X \sim B(n=2000, p=0.0458)$ y se pide $P(X \geq 219)$. La fecha también es irrelevante.
 - **Interpretación de fiabilidad de la prueba:** "soamente 1 de cada 100 persoas libres da enfermidade obtén un resultado positivo" es $P(\text{Test+|Sano}) = 0.01$ (especificidad = 0.99). "soamente 2 de cada 100 persoas que padecen a enfermidade obteñen resultados negativos" es $P(\text{Test-|Enfermo}) = 0.02$ (sensibilidad = 0.98). $P(\text{Enfermo}) = 1/10000$.
 - **Combinar estrategias:** Bayes para 4.1, Binomial con aprox. Normal para 4.2.
 - **Razonamiento crítico / Interpretación de resultados (4.3):** Requiere evaluar "verosimilitud" de las cifras del guion a la luz de las probabilidades calculadas. P_1 (valor predictivo positivo) suele ser bajo para enfermedades raras incluso con tests buenos. P_3 , la probabilidade de que 219 o máis ríos de 2000 tengan un primer dígito 9 (con $p=0.0458$), será extremadamente baja ($E[X]=2000*0.0458=91.6$, 219 está muy lejos). La guionista probablemente deba ajustar la "clave" o la prevalencia de la enfermedad o la fiabilidad del test para que la historia sea más creíble.

Problema 8: Exemplo 4: Probabilities médicas e Lei de Benford

1. Primera Lectura (Contexto General): * Prueba médica para enfermedad rara y Ley de Benford para una clave. Evaluar verosimilitud.

2. Segunda Lectura (Análisis y Desglose):

- **a) Identifica las preguntas y trata de clasificarlas en tipo/s de ejercicio/s:**
 - 4.1: $P_1 = P(EI+)$, $P_2 = P(EI-)$ -> **Diagrama de Árbol**, Probabilidad Total, Bayes.
 - 4.2: $P_3 = P(X \geq 219 \text{ ríos con primer dígito } 9)$ -> **Binomial, Aproximación Normal**.
 - 4.3: Motivo para modificar cifras -> **Razonamiento crítico**.
- **b) Extrae Datos Relevantes y Elimina Innecesarios:**
 - $P(E) = 1/10000 = 0.0001$ (E=Enfermo); $P(S) = 0.9999$ (S=Sano).
 - $P(+|S) = 1/100 = 0.01 \Rightarrow P(-|S) = 0.99$.
 - $P(-|E) = 2/100 = 0.02 \Rightarrow P(+|E) = 0.98$.
 - Para P_3 : $X \sim B(n=2000, p=0.0458)$. Piden $P(X \geq 219)$.
 - **Tachar:** ~~Descripciones de guionistas, plataformas, sistemas de seguridad, fechas, fórmula general Benford (ya se da p)...~~ (mucho contexto narrativo y distractor).

3. Resolución (Estrategia y Ejecución):

- **a) Planifica:**
 - 4.1: Árbol (1ª rama E/S; 2ª rama +/-). Calcular $P(+)$, $P(EI+)$. Calcular $P(-)$, $P(EI-)$.
 - 4.2: $X \sim B(2000, 0.0458)$. Aproximar a $Y \sim N(np, \sqrt{npq})$. Calcular $P(Y \geq 218.5)$ con corrección por continuidad.
 - 4.3: Evaluar P_1 y P_3 en el contexto de la verosimilitud.
- **b) Ejecuta:**
 - **4.1. Cálculo de P_1 y P_2 :**
 - **Diagrama de Árbol (y probabilidades de intersección):**
 - Enfermo ($P(E) = 0.0001$)
 - Test Positivo ($P(+|E) = 0.98$) $\Rightarrow P(E \cap +) = 0.0001 * 0.98 = 0.000098$
 - Test Negativo ($P(-|E) = 0.02$) $\Rightarrow P(E \cap -) = 0.0001 * 0.02 = 0.000002$
 - Sano ($P(S) = 0.9999$)
 - Test Positivo ($P(+|S) = 0.01$) $\Rightarrow P(S \cap +) = 0.9999 * 0.01 = 0.009999$
 - Test Negativo ($P(-|S) = 0.99$) $\Rightarrow P(S \cap -) = 0.9999 * 0.99 = 0.989901$
 - **Probabilidad de Test Positivo $P(+)$:**
 - $P(+)= P(E \cap +) + P(S \cap +) = 0.000098 + 0.009999 = 0.010097$.

- **$P_1 = P(\text{Enfermo} \mid \text{Test}+)$:**

- $P_1 = P(E \cap +) / P(+) = 0.000098 / 0.010097 \approx 0.009706$.
- $P_1 \approx 0.0097$ (aproximadamente 0.97%).

- **Probabilidad de Test Negativo $P(-)$:**

- $P(-) = P(E \cap -) + P(S \cap -) = 0.000002 + 0.989901 = 0.989903$.
- $(O P(-) = 1 - P(+) = 1 - 0.010097 = 0.989903)$.

- **$P_2 = P(\text{Enfermo} \mid \text{Test}-)$:**

- $P_2 = P(E \cap -) / P(-) = 0.000002 / 0.989903 \approx 0.00000202$.
- $P_2 \approx 0.000002$ (aproximadamente 0.0002%).

- **4.2. Cálculo de $P_3 = P(X \geq 219)$:**

- $X \sim B(n=2000, p=0.0458)$. $q = 1 - 0.0458 = 0.9542$.
- $\mu = np = 2000 * 0.0458 = 91.6$.
- $\sigma^2 = npq = 91.6 * 0.9542 = 87.40832 \Rightarrow \sigma = \sqrt{87.40832} \approx 9.349$.
- Condiciones de aproximación: $np=91.6 \geq 5$, $nq=1908.4 \geq 5$. Se puede aproximar.
- Aproximamos X por $Y \sim N(\mu=91.6, \sigma=9.349)$.
- $P(X \geq 219) \approx P(Y \geq 218.5)$ (corrección por continuidad).
- Tipificamos: $Z = (218.5 - 91.6) / 9.349 = 126.9 / 9.349 \approx 13.57$.
- $P(Z \geq 13.57)$ es un valor extremadamente pequeño, prácticamente 0.
- $P_3 \approx 0$.

- **4.3. Motivo para modificar cifras:**

- **P_1 :** La probabilidad de tener la enfermedad si el test es positivo es muy baja ($P_1 \approx 0.97\%$). Esto significa que la mayoría de los positivos serían falsos positivos. Si la guionista quiere que un test positivo sea un fuerte indicador de enfermedad, esta cifra es problemática.
- **P_3 :** La probabilidad de que 219 o más ríos (de 2000) comiencen con el dígito 9 (cuando se esperan alrededor de 92) es prácticamente cero ($P_3 \approx 0$). Esto hace que la "clave = 219" obtenida de esta manera sea extremadamente inverosímil.
- *A guionista debería modificar a cifra da "clave = 219", xa que a probabilidade (P_3) de obter ese valor ou un superior é practicamente cero, o que o fai moi inverosímil. Ademais, se desexa que un test positivo sexa máis concluínte, podería revisar a prevalencia da enfermidade ou a fiabilidade do test para aumentar P_1 .*

4. Revisión (Validación y Respuesta):

- **a) Verifica:** Cálculos árbol, Bayes, Normal.
- **b) Sentido Lógico:** Resultados extremos (P_1 bajo, P_3 nulo) esperados.
- **c) Respuesta Precisa:**
 - 4.1: $P_1 \approx 0,0097$; $P_2 \approx 0,000002$.
 - 4.2: $P_3 \approx 0$.
 - 4.3: Clave 219 inverosímil ($P_3 \approx 0$). $P(\text{Enfermedad} \mid +)$ moi baixa ($P_1 \approx 0,97\%$).

9. Exemplo 6: Facultade, cafetería

Nunha facultade dun campus galego, os estudantes para entrar nunha clase da materia Estatística Aplicada deben subir ata o segundo piso. Para subir poden empregar o ascensor ou unha escaleira, aínda que algúns deles, o 5%, deciden ir á cafetería. A clase de Estatística Aplicada é de 11:00 a 12:00, e ás 12:00 moitos deles (o 99% dos matriculados) teñen clase de Física. A porcentaxe de estudantes que teñen pensado subir polo ascensor para ir a clase é o 50%, mentres que a porcentaxe que dos que empregan as escaleiras é o restante 45%. Sen embargo, algúns estudantes cando van cara o ascensor cambian de idea e deciden ir á cafetería, isto ocorre cunha probabilidade igual a 0,05. Dos que van cara a escaleira, o 15% cambian de idea e deciden non ir a clase para ir á cafetería. Aínda que son menos, o 1% dos estudantes que se dirixían á cafetería deciden finalmente ir a clase, para o que collen unhas escaleiras exteriores polas que tamén poden chegar ao segundo piso.

Responda estes catro apartados: 6.1., 6.2., 6.3 e 6.4

- 6.1. Calcule a probabilidade de que un estudante entre en clase da materia Estatística Aplicada.
- 6.2. Calcule a probabilidade de que un estudante dos matriculados na materia Estatística Aplicada atópanse na cafetería na hora de clase.
- 6.3. Calcule a probabilidade de que un estudante que entre na clase decidira inicialmente ir á cafetería.
- 6.4. Razoe o motivo polo que non poden ser incompatibles os sucesos "ter clase de Física ás 12:00" e "ir á cafetería na hora da clase de Estatística Aplicada"?

Análisis del problema

- **Tipos de problemas básicos incluídos:** Diagrama de árbol (con múltiples etapas y decisiones), Probabilidad Total (6.1, 6.2), Bayes (6.3), Sucesos (incompatibilidad conceptual 6.4).
- **Dificultades competenciales:**
 - **Contexto largo y enrevesado:** Múltiples condiciones, decisiones secuenciales y cambios de idea.
 - **Modelización con árbol complejo:** El árbol de decisión es la clave y tiene varias ramificaciones. $P(\text{Intención Ascensor})=0.50$, $P(\text{Intención Escaleira})=0.45$, $P(\text{Intención Cafetería Inicial})=0.05$. Luego, $P(\text{Cambia a Cafetería} \mid \text{Intención Ascensor})=0.05$, $P(\text{Cambia a Cafetería} \mid \text{Intención Escaleira})=0.15$. Finalmente, $P(\text{Va a Clase} \mid \text{Estaba/Iba a Cafetería})=0.01$.
 - **Presentación indirecta y acumulativa de datos:** Hay que seguir la secuencia de decisiones.
 - **Razonamiento lógico (6.4):** Interpretar la relación temporal y la posibilidad de que un estudiante esté en la cafetería a las 11:XX y luego tenga Física a las 12:00 (no son incompatibles).

Solución Problema 9: Exemplo 6: Facultad, cafetería

1. Primera Lectura (Contexto General): * Decisiones de estudiantes para ir a clase (ascensor, escalera, cafetería) y cambios de idea.

2. Segunda Lectura (Análisis y Desglose):

- **a) Identifica las preguntas y trata de clasificarlas en tipo/s de ejercicio/s:**
 - 6.1: $P(\text{entra en clase}) \rightarrow$ **Diagrama de Árbol** (complejo, con cambios de decisión) y Probabilidad Total.
 - 6.2: $P(\text{está en cafetería}) \rightarrow$ **Diagrama de Árbol** y Probabilidad Total.
 - 6.3: $P(\text{intención cafetería} \mid \text{entró en clase}) \rightarrow$ Teorema de Bayes.
 - 6.4: ¿Incompatibles "Física 12h" y "Cafetería 11-12h"? $\rightarrow$ **Sucesos** (conceptual).
- **b) Extrae Datos Relevantes y Elimina Innecesarios:**
 - $P(IA)=0.50$ (Intención Ascensor), $P(IE)=0.45$ (Intención Escalera), $P(IC_{in})=0.05$ (Intención Cafetería inicial).
 - $P(Caf \mid IA)=0.05 \Rightarrow P(EC \mid IA)=0.95$ (EC=Entra Clase).
 - $P(Caf \mid IE)=0.15 \Rightarrow P(EC \mid IE)=0.85$.
 - $P(EC \mid IC_{in})=0.01 \Rightarrow P(Caf \mid IC_{in})=0.99$.
 - **Tachar:** ~~Detalles sobre cómo suben al 2º piso, escaleras exteriores...~~ (contexto si ya se dan las P de cambio).

3. Resolución (Estrategia y Ejecución):

- **a) Planifica:**
 - Construir Diagrama de Árbol: 1ª rama Intención (IA, IE, IC_{in}); 2ª rama Decisión Final (EC, Caf).
 - 6.1: $P(EC) = P(IA \cap EC) + P(IE \cap EC) + P(IC_{in} \cap EC)$.
 - 6.2: $P(Caf) = P(IA \cap Caf) + P(IE \cap Caf) + P(IC_{in} \cap Caf)$ (o $1 - P(EC)$).
 - 6.3: $P(IC_{in} \mid EC) = P(IC_{in} \cap EC) / P(EC)$.
 - 6.4: Razonamiento lógico.
- **b) Ejecuta:**
 - **Diagrama de Árbol (y probabilidades de intersección):**
 - Intención Ascensor ($P(IA) = 0.50$)
 - Entra en Clase ($P(EC \mid IA) = 0.95$) $\Rightarrow P(IA \cap EC) = 0.50 * 0.95 = 0.475$
 - Va a Cafetería ($P(Caf \mid IA) = 0.05$) $\Rightarrow P(IA \cap Caf) = 0.50 * 0.05 = 0.025$
 - Intención Escalera ($P(IE) = 0.45$)
 - Entra en Clase ($P(EC \mid IE) = 0.85$) $\Rightarrow P(IE \cap EC) = 0.45 * 0.85 = 0.3825$
 - Va a Cafetería ($P(Caf \mid IE) = 0.15$) $\Rightarrow P(IE \cap Caf) = 0.45 * 0.15 = 0.0675$
 - Intención Cafetería Inicial ($P(IC_{in}) = 0.05$)
 - Entra en Clase ($P(EC \mid IC_{in}) = 0.01$) $\Rightarrow P(IC_{in} \cap EC) = 0.05 * 0.01 = 0.0005$
 - Queda en Cafetería ($P(Caf \mid IC_{in}) = 0.99$) $\Rightarrow P(IC_{in} \cap Caf) = 0.05 * 0.99 = 0.0495$

- **6.1. Calcular $P(EC)$ (Probabilidad de que un estudiante entre en clase):**
 - $P(EC) = P(IA \cap EC) + P(IE \cap EC) + P(IC_{in} \cap EC)$
 - $P(EC) = 0.475 + 0.3825 + 0.0005 = 0.8580$.
 - *A probabilidade de que un estudante entre en clase da materia Estatística Aplicada é 0,8580.*
- **6.2. Calcular $P(Caf)$ (Probabilidad de que un estudiante esté en la cafetería):**
 - $P(Caf) = P(IA \cap Caf) + P(IE \cap Caf) + P(IC_{in} \cap Caf)$
 - $P(Caf) = 0.025 + 0.0675 + 0.0495 = 0.1420$.
 - (Comprobación: $P(EC) + P(Caf) = 0.8580 + 0.1420 = 1.0000$).
 - *A probabilidade de que un estudante dos matriculados na materia Estatística Aplicada se atope na cafetería na hora de clase é 0,1420.*
- **6.3. Calcular $P(IC_{in} | EC)$ (Probabilidad de que decidiera inicialmente ir a cafetería, sabiendo que entró en clase):**
 - $P(IC_{in} | EC) = P(IC_{in} \cap EC) / P(EC)$
 - $P(IC_{in} | EC) = 0.0005 / 0.8580 \approx 0.00058275$.
 - *A probabilidade de que un estudante que entre na clase decidira inicialmente ir á cafetería é aproximadamente 0,00058.*
- **6.4. ¿Por qué no pueden ser incompatibles "tener Física a las 12:00" e "ir a cafetería en hora de Estadística (11-12)"?:**
 - Un estudante pode estar en la cafetería durante la hora de Estadística (de 11:00 a 12:00) y luego asistir a su clase de Física a las 12:00. El hecho de estar en la cafetería entre las 11 y las 12 no impide que esa misma persona tenga clase de Física a las 12. Los eventos pueden ocurrir secuencialmente para el mismo estudiante.
 - *Non son incompatibles porque un estudante pode estar na cafetería durante a clase de Estatística (11:00-12:00) e despois asistir á súa clase de Física ás 12:00. Un suceso non exclúe a posibilidade do outro para o mesmo individuo.*

4. Revisión (Validación y Respuesta):

- **a) Verifica:** Sumas del árbol correctas.
- **b) Sentido Lógico:** $P(EC) + P(Caf) = 1$. $P(IC_{in} | EC)$ muy baja, lógico.
- **c) Respuesta Precisa:**
 - 6.1: $P(\text{estudiante entre en clase}) = 0,858$.
 - 6.2: $P(\text{estudiante na cafetería}) = 0,142$.
 - 6.3: $P(\text{decidiu inicialmente ir á cafetería} | \text{entrou en clase}) \approx 0,00058$.
 - 6.4: Non son incompatibles, poden ocorrer secuencialmente para a mesma persoa.

10. Exemplo 2: Concurso Monty Hall

Unha televisión privada que emite a nivel estatal puxo en marcha un concurso de televisión, para o que realizou unha campaña de publicidade previa coa finalidade de atopar participantes. Anotáronse máis de 4.000 persoas entre as que elixiron a 100 grupos de dous concursantes, tendo en conta que por motivos de lograr unha maior audiencia, seleccionaron diversos perfís de idades e representantes de tódalas comunidades autónomas. Son programas de curta duración para emitir xusto antes das noticias das 21:00. Nunha primeira fase cada grupo de dous concursantes teñen que elixir unha de tres portas, sabendo que detrás dunha delas hai un premio en metálico de 1.000 euros. O primeiro concursante elixe unha porta, se está o premio gaña os 1.000 euros, pasa directamente á segunda fase e o segundo concursante xa non ten opcións de participar no concurso. De non elixir a porta co premio queda eliminado e o segundo concursante ten que seleccionar unha porta entre as dúas restantes. No caso de acertar coa porta co premio gaña os 1.000 euros e pasa á segunda fase. De non elixir dita porta, ningún concursante consegue o premio de 1.000 euros nin pasa á segunda fase. No caso de que un concursante logre superar a primeira fase, na segunda repítese o proceso da primeira pero cun maior importe e coa posibilidade de cambiar a súa elección. De novo, o concursante ten que elixir unha porta entre tres, aínda que neste caso o importe do premio que está detrás dunha única porta é de 10.000 euros. Unha vez elixida a porta, o presentador, que coñece en que porta está o premio, amósalle ao concursante unha porta entre as dúas que non seleccionou e na que non está o premio, e ofrécelle ao concursante a posibilidade de cambiar de porta. Nota: A segunda fase do concurso correspóndese co coñecido coma o problema de Monty Hall, baseado no concurso estadounidense Let's Make a Deal.

2.1. Un concursante ao coñecer as regras do concurso e tendo en conta que se o primeiro en elixir acerta coa porta correcta o segundo concursante xa non tería opción de participar, pide elixir en primeiro lugar porque dese xeito cre que tería maior probabilidade de gañar. É certa a súa suposición ou é indiferente elixir en primeiro ou segundo lugar?

2.2. Tendo en conta só a primeira fase, os acontecementos “gaña o primeiro en elixir” e “gaña o segundo en elixir”, son incompatibles?, son independentes?

2.3. A partir da resposta do apartado anterior, indique unha norma xeral que relacione sucesos independentes e incompatibles. Xustifique a resposta.

2.4. Sábese que a estratexia óptima para gañar o premio da segunda fase é aceptar a opción do presentador, é dicir, cambiar a elección da porta inicial pola porta que o presentador non amosa entre as dúas non elixidas. Demostre que ao cambiar a elección inicial a probabilidade de gañar o premio duplícase.

- **Tipos de problemas básicos incluídos:** Probabilidade elemental/clásica (conteo de casos, definición de P), Sucesos (incompatibilidade, independencia), Probabilidade Condicionada (implícita y explícita en Monty Hall).
- **Dificultades competenciales:**
 - **Contexto largo/elaborado:** Descripción detallada del concurso en dos fases.
 - **Datos innecesarios:** Número de inscritos, grupos, perfiles, duración del programa.
 - **Modelización:** El alumno debe modelizar correctamente las probabilidades en cada etapa. Para 2.1, $P(\text{Gana } 1^\circ) = 1/3$. $P(\text{Gana } 2^\circ) = P(1^\circ \text{ Falla Y } 2^\circ \text{ Acierta}) = (2/3) * (1/2) = 1/3$. Son iguales.
 - **Razonamiento Lógico / Contraintuitivo:** Especialmente el apartado 2.4 (Monty Hall) es famoso por ser contraintuitivo. Requiere un razonamiento cuidadoso sobre la información que revela el presentador y cómo actualiza las probabilidades.
 - **Conceptual (2.2, 2.3):** Preguntas directas sobre propiedades de sucesos aplicadas al contexto.
 - **No estándar:** No se ajusta a una distribución típica, sino a probabilidad fundamental, lógica y argumentación.

Problema 10: Exemplo 2: Concurso Monty Hall

1. **Primera Lectura (Contexto General):** * Concurso TV. Fase 1: dos concursantes eligen puertas. Fase 2: Monty Hall.

2. **Segunda Lectura (Análisis y Desglose):**

- **a) Identifica las preguntas y trata de clasificarlas en tipo/s de ejercicio/s:**
 - 2.1: ¿Mejor elegir 1º o 2º (Fase 1)? -> **Probabilidad Elemental**.
 - 2.2: ¿"Gana 1º" y "Gana 2º" incomp/indep? -> **Sucesos**.
 - 2.3: Norma general incomp/indep -> **Sucesos** (teoría).
 - 2.4: Demostrar $P(\text{Ganar Monty Hall cambiando})$ -> **Probabilidad Condicionada** (Monty Hall).
- **b) Extrae Datos Relevantes y Elimina Innecesarios:**
 - Fase 1: 3 puertas, 1 premio. Si 1º acierta, gana. Si 1º falla, 2º elige de 2 restantes.
 - Fase 2 (Monty Hall): 3 puertas, 1 premio. Elige 1. Presentador abre 1 vacía de las no elegidas. Opción de cambiar.
 - **Tachar:** ~~Historia TV, nº inscritos, perfiles, duración programa, cantidades premios...~~ (contexto).

3. **Resolución (Estrategia y Ejecución):**

- **a) Planifica:**
 - 2.1: Calcular $P(\text{Gana } 1^\circ)$. Calcular $P(\text{Gana } 2^\circ) = P(1^\circ \text{ Falla}) * P(2^\circ \text{ Acierta} \mid 1^\circ \text{ Falló})$. Comparar.
 - 2.2: Analizar si $P(G1^\circ \cap G2^\circ) = 0$ (incompatibilidad) y si $P(G1^\circ \cap G2^\circ) = P(G1^\circ)P(G2^\circ)$ (independencia).
 - 2.3: Enunciar la relación teórica.
 - 2.4 (Monty Hall): Calcular $P(\text{Ganar si NO cambia})$ y $P(\text{Ganar si SÍ cambia})$ analizando los escenarios de la elección inicial.
- **b) Ejecuta:**
 - **2.1. ¿Es mejor elegir primero o segundo?**
 - $P(\text{Gana } 1^\circ \text{ concursante}) = 1/3$ (elige 1 de 3 puertas, 1 con premio).
 - $P(\text{Gana } 2^\circ \text{ concursante}) = P(1^\circ \text{ Falla}) * P(2^\circ \text{ Acierta} \mid 1^\circ \text{ Falló})$.
 - $P(1^\circ \text{ Falla}) = 2/3$.
 - Si 1º falla, quedan 2 puertas, 1 con premio. $P(2^\circ \text{ Acierta} \mid 1^\circ \text{ Falló}) = 1/2$.
 - $P(\text{Gana } 2^\circ) = (2/3) * (1/2) = 2/6 = 1/3$.
 - Como $P(\text{Gana } 1^\circ) = P(\text{Gana } 2^\circ) = 1/3$, *é indiferente elixir en primeiro ou segundo lugar.*
 - **2.2. ¿"Gana 1º" (G1) y "Gana 2º" (G2) son incompatibles? ¿Son independientes?**
 - **Incompatibles:** Si el primer concursante gana (G1 ocurre), el segundo concursante ya no participa y, por lo tanto, no puede ganar (G2 no puede ocurrir). Así, G1 y G2 no pueden ocurrir simultáneamente. $P(G1 \cap G2) = 0$. *Son incompatibles.*

- **Independientes:** Si dos sucesos son incompatibles y tienen probabilidad no nula ($P(G1)=1/3 > 0$, $P(G2)=1/3 > 0$), no pueden ser independientes. Si fueran independientes, $P(G1 \cap G2) = P(G1)P(G2) = (1/3)(1/3) = 1/9$. Pero sabemos que $P(G1 \cap G2) = 0$. Como $0 \neq 1/9$, *non son independientes*.
- **2.3. Norma general entre sucesos independientes e incompatibles:**
 - *Se dous sucesos A e B son incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) e ambos teñen probabilidades non nulas ($P(A) > 0$ e $P(B) > 0$), entón non poden ser independentes. A incompatibilidade implica unha forte dependencia: se un ocorre, o outro non pode ocorrer.*
- **2.4. Monty Hall: Demostrar que cambiar duplica $P(\text{Ganar})$:**
 - **Estratexia 1: Non cambiar.**
 - El concursante elige inicialmente una puerta. La probabilidad de que esta puerta tenga el premio es $1/3$.
 - El presentador abre otra puerta que sabe que no tiene premio. Esta acción no cambia la probabilidad de que la puerta elegida inicialmente sea la correcta.
 - Si el concursante no cambia, $P(\text{Ganar si NO cambia}) = 1/3$.
 - **Estratexia 2: Cambiar.**
 - Hay dos escenarios iniciales:
 1. **El concursante elige la puerta correcta inicialmente (Probabilidad = $1/3$).**
 - El presentador abrirá una de las otras dos puertas (ambas vacías).
 - Si el concursante cambia, cambiará a la otra puerta vacía y perderá.
 2. **El concursante elige una puerta incorrecta inicialmente (Probabilidad = $2/3$).**
 - El presentador debe abrir la otra puerta incorrecta (de las dos no elegidas, una tiene el premio y la otra no; el presentador debe revelar una sin premio).
 - La puerta que queda cerrada (y a la que el concursante cambiaría) es la que tiene el premio.
 - Si el concursante cambia, gana.
 - Por lo tanto, $P(\text{Ganar si SÍ cambia}) = P(\text{Ganar} \mid \text{Eligió mal inicialmente}) * P(\text{Eligió mal inicialmente}) + P(\text{Ganar} \mid \text{Eligió bien inicialmente}) * P(\text{Eligió bien inicialmente})$
 - $P(\text{Ganar si SÍ cambia}) = 1 * (2/3) + 0 * (1/3) = 2/3$.
 - **Conclusión:** $P(\text{Ganar si SÍ cambia}) = 2/3$, que é o dobre de $P(\text{Ganar si NO cambia}) = 1/3$. Queda demostrado que ao cambiar a elección inicial, a probabilidade de gañar o premio duplicase.

4. Revisión (Validación y Respuesta):

- **a) Verifica:** Cálculos de probabilidad.
- **b) Sentido Lógico:** Lógica de Monty Hall correcta.
- **c) Respuesta Precisa:**
 - 2.1: É indiferente ($P=1/3$ para ambos). 2.2: Son incompatibles; non son independentes. 2.3: Dous sucesos incompatibles con $P>0$ non son independentes. 2.4: $P(\text{gañar sen cambiar})=1/3$. $P(\text{gañar cambiando})=2/3$. Duplicase.