

Guía Rápida de Casuísticas de Ejercicios – Análisis Matemático

1. LÍMITES: ¿Qué me pueden pedir?

- **"Calcula el siguiente límite..."**
 - **Si $x \rightarrow a$ (número):** Sustituir. Indeterminación ($0/0$, ∞/∞), aplicar L'Hôpital, factorizar...
 - **Si $x \rightarrow \infty$:** Comportamiento de funciones (polinomios, exponenciales, logaritmos). Si da indeterminación (∞/∞ , $\infty-\infty$), L'Hôpital (si es aplicable), dividir por máxima potencia, o operar algebraicamente (ej. resta de raíces multiplicando por el conjugado).
 - **Con e (Indeterminación 1^∞):** Buscar la forma $(1 + 1/f(x))^{f(x)}$ o usar la fórmula $e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 1)}$.
 - **Con logaritmos (Indeterminaciones 0^0 , ∞^0):** Llamar L al límite, tomar $\ln L$, aplicar propiedades de logaritmos para bajar el exponente, calcular el límite de $\ln L$, y finalmente $L = e^{\text{resultado}}$.
 - **Indeterminación $0 \cdot \infty$:** Transformar algebraicamente a $0/0$ o ∞/∞ para poder aplicar L'Hôpital.
- **"Calcula el valor de 'm' para que el límite $\lim (...) = k$ " o "...sea finito" o "...exista".**
 - Sustituir y analizar la expresión.
 - **Matiz importante:** A veces, para que el límite sea un valor específico, se toma el valor parámetro m/a que genere una indeterminación Ej. $(m-2)/0$, continuamos con $m=2$.

2. CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD: ¿Qué me pueden pedir?

- **"Estudia la continuidad de $f(x)$ en $x=a$ / en su dominio."**
 - Calcular $f(a)$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. Deben existir y ser iguales.
 - Si hay **valor absoluto**, definir $f(x)$ a trozos primero.
 - Identificar y clasificar discontinuidades si existen.
- **"Calcula 'a' y 'b' para que $f(x)$ (a trozos) sea continua en $x=k$."**
 - Igualar límites laterales en $x=k$ y el valor de la función en ese punto (si está definido por una de las ramas). Se genera un sistema de ecuaciones si hay varios parámetros y varios puntos.
Matiz importante: A veces, para que el límite sea un valor específico, se toma el valor parámetro m/a que genere una indeterminación Ej. $(m-2)/0$, continuamos con $m=2$.
- **"Estudia la derivabilidad de $f(x)$ en $x=a$ / en su dominio."**
 - **Paso 1: Comprobar continuidad** en $x=a$. Si no es continua, NO es derivable.
 - **Paso 2: Si es continua**, calcular derivadas laterales $f'(a^-)$ y $f'(a^+)$ (derivando las ramas correspondientes y evaluando, o usando la definición de derivada). Deben ser iguales y finitas.
 - Si hay **valor absoluto**, definir $f(x)$ a trozos primero.
- **"Calcula 'a' y 'b' para que $f(x)$ (a trozos) sea derivable en $x=k$."**
 - Imponer **continuidad** en $x=k$ (genera una ecuación con a y b).
 - Imponer **igualdad de derivadas laterales** en $x=k$ (genera otra ecuación con a y b).
 - Resolver el sistema de ecuaciones.

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA: ¿Qué me pueden pedir?

- **RECTA TANGENTE/NORMAL:**
 - **"Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=a$."**
 - **"Halla la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en $x=a$."**
 - **"Halla la/s tangente/s a $f(x)$ que es/son paralela/s (o perpendicular/es) a la recta $y=mx+n$."**
 - **"Halla los puntos donde la tangente es horizontal."** ($f'(x)=0$).
- **CÁLCULO DE PARÁMETROS DE UNA FUNCIÓN:**
 - **"Dada $f(x) = ax^3+bx^2+\dots$ halla a,b,c si..."** (y se dan condiciones como: pasa por punto, extremo en x_0 o en (x_0, y_0) , inflexión en x_0 o en (x_0, y_0) , tangente con pendiente dada, tangente es una recta específica). Montar y resolver sistema de ecuaciones.
- **MONOTONÍA, EXTREMOS, CURVATURA, INFLEXIÓN:**
 - **"Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$."** (Signo de $f'(x)$).
 - **"Halla los máximos y mínimos relativos de $f(x)$."** ($f'(x)=0$, criterio 1ª o 2ª derivada).
 - **"Estudia la curvatura (concavidad U / convexidad n) de $f(x)$."** (Signo de $f''(x)$).
 - **"Halla los puntos de inflexión de $f(x)$."** ($f''(x)=0$ y cambio de signo de $f''(x)$).

- **OPTIMIZACIÓN:**
 - "De entre todos los/las... (objetos) que cumplen (restricción/es), halla el/la que hace que (función objetivo: área, volumen, coste, etc.) sea máximo/mínimo."
 - *Pasos generales:* 1. Identificar variables. 2. Escribir función objetivo. 3. Si es necesario usar dato para tenerla solo con una variable. 4. Derivar, igualar a cero, resolver. 6. Comprobar si es máx. o mín. (criterio 2ª derivada o estudio de monotonía). 7. Respuesta en lenguaje natural a la pregunta.
 - *Casísticas comunes:*
 - **Geométricas 2D:** Rectángulo de área máx. inscrito en curva/región; triángulo de área máx.; distancia mínima entre punto y curva; dimensiones de una página para que el área impresa sea máx. con márgenes fijos (o **superficie mínima de papel para un área impresa dada con márgenes**).
 - **Geométricas 3D:** Caja (con/sin tapa) de volumen máx./superficie mín./coste mín. con material dado (ej: **recortando esquinas de una plancha rectangular/cuadrada** para hacer una caja); cilindro de volumen máx.
 - **División de cantidades:** Dividir un número en sumandos para optimizar un producto/suma de cuadrados; dividir un **alambre para formar dos o más figuras geométricas** (ej: cuadrado y círculo, cuadrado y triángulo equilátero) y optimizar suma/diferencia de áreas.
 - **Costes/Beneficios/Otros:** Minimizar coste de material/construcción; maximizar beneficio; ángulo de visión máximo a un cuadro/pantalla.

4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA: ¿Qué me pueden pedir?

- "Representa gráficamente $f(x)$ estudiando: dominio, simetrías, cortes con los ejes, asíntotas (Verticales, Horizontales, Oblicuas), monotonía y extremos relativos, y (a veces) curvatura y puntos de inflexión."
- "Halla las asíntotas de $f(x)$."
- "Dibuja una función $f(x)$ que cumpla las siguientes propiedades..." (Interpretar condiciones sobre límites, continuidad, derivabilidad, signos de f' , f'' , valores de la función, asíntotas).

5. TEOREMAS: ¿Qué me pueden pedir?

- "Enuncia el Teorema de (Bolzano/Rolle/Valor Medio)."
- "Explica la interpretación geométrica del Teorema de..."
- **APLICACIONES DE BOLZANO:**
 - "Demuestra que la ecuación $f(x)=0$ tiene al menos una solución en $[a,b]$."
 - "Demuestra que de $f(x)$ y $g(x)$ se cortan al menos una vez..." (resta $h(x) = f(x) - g(x)$).
- **APLICACIONES DE ROLLE:**
 - "Demuestra que $f(x)=0$ (o $f(x)=g(x)$) tiene una única solución en (a,b) ." (Unicidad - red. absurdo).
 - "Comprueba si $f(x)$ cumple hipótesis de Rolle en $[a,b]$. Halla 'c' tal que $f'(c)=0$."
 - "Halla los parámetros para que $f(x)$ cumpla las hipótesis de Rolle en $[a,b]$. Luego, halla 'c'."
- **APLICACIONES DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO (TVM):**
 - "Comprueba si $f(x)$ cumple las hipótesis del TVM en $[a,b]$. En caso afirmativo, halla 'c' tal que $f'(c) = (f(b)-f(a))/(b-a)$."
 - "Halla los parámetros para que $f(x)$ cumpla las hipótesis del TVM en $[a,b]$. Luego, halla 'c'."

6. INTEGRALES (para 2º Examen/Recuperación): ¿Qué me pueden pedir?

- "Define función primitiva / integral indefinida."
- "Calcula la siguiente integral indefinida..."
 - **Identificar el tipo y aplicar el método:**
 - **Inmediata:** Potencial ($\int u^n$), logarítmica ($\int u'/u$), exponencial ($\int u' e^u$), trigonométrica directa, Arcoseno ($\int u'/\sqrt{1-u^2}$), Arcotangente ($\int u'/(1+u^2)$) - puede requerir completar cuadrados).
 - **Cambio de Variable:**
 - Sustitución evidente (ej. u = argumento de raíz/log/exp/trig).
 - Para "raíces que estorban" (ej. u^2 = contenido raíz (o al exponente que proceda)).
 - $u = e^x$ si aparecen muchos e^x .
 - **Por Partes ($\int u dv$):**
 - Polinomio \times Exponencial.
 - Polinomio \times Trigonométrica.
 - Polinomio \times Logaritmo (aquí $u=\ln(x)$).
 - Logaritmo o Arcotangente (solas o por polinomio, $u=\ln(x)$ o $u=\arctan(x)$).
 - Exponencial \times Trigonométrica (cíclicas, si se ven).
 - **Funciones Racionales ($\int P(x)/Q(x) dx$):**
 - Si $\text{Grado}(P) \geq \text{Grado}(Q) \rightarrow$ **División** primero.
 - Descomposición en **fracciones simples** según las raíces de $Q(x)$:
 - Reales simples.
 - Reales múltiples.
 - Complejas (arcotangente, completar cuadrado).