TEMA 2: PROGRAMACIÓN LINEAL

1. INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS.

Se llama **inecuación lineal con dos incógnitas** a una inecuación de la forma**:**

$a\,x + b\,y \leq c$ (puede ser >, <, ≥)

Su solución es uno de los semiplanos que resulta de representar la recta que se obtiene al transformar la desigualdad en una igualdad.

Veamos un ejemplo: $2x + y \leq 3$

1º Transformamo**s la desigualdad en igualdad.** (La ecuación de una recta)

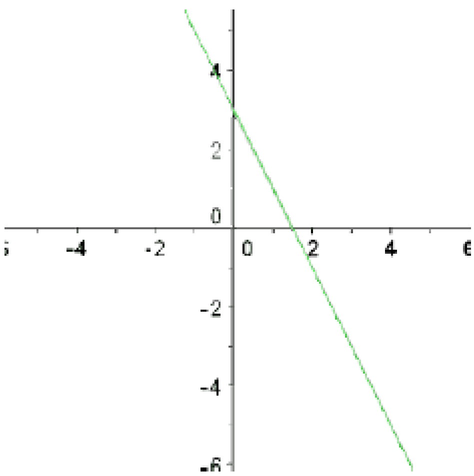
$2x + y = 3$

2º Representamos la recta resultante. Para ello damos a una de las dos variables dos valores, con lo que **obtenemos dos puntos.**

$x = 0;$ $2 \cdot 0 + y = 3;$ $y = 3;$ $(0, 3)$

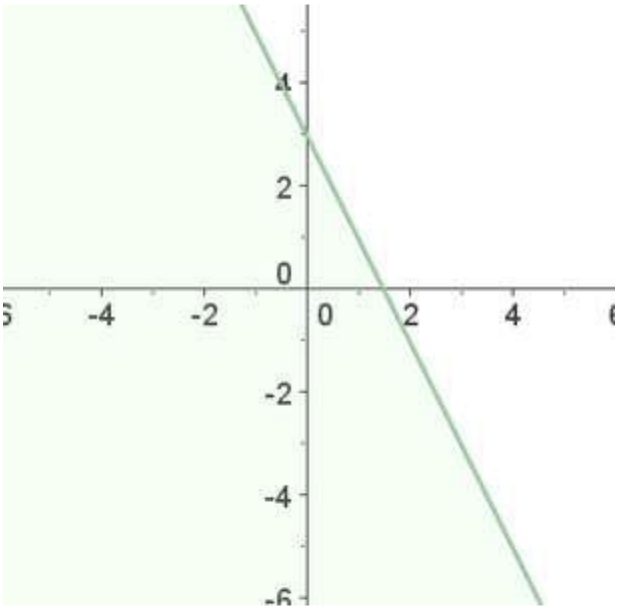
$x = 1;$ $2 \cdot 1 + y = 3;$ $y = 1;$ $(1, 1)$

3º Al representar y unir estos puntos **obtenemos una recta**.



4º **Tomamos un punto fuera de la recta**, por ejemplo, el (0, 0), los **sustituimos en la desigualdad**. **Si se cumple, la solución es el semiplano donde se encuentra el punto, si no la solución será el otro semiplano.**

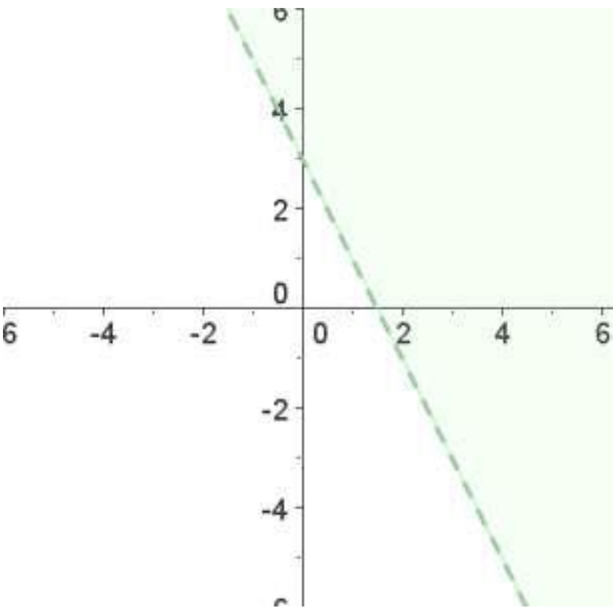
$2x + y \leq 3$ $\quad$ $2 \cdot 0 + 0 \leq 3$ $\quad$ $0 \leq 3$ $\quad$ Sí se cumple.



Si la inecuación fuera con el sentido contrario de la desigualdad:

$2x + y > 3$ $\quad$ $2 \cdot 0 + 0 > 3$ $\quad$ $0 > 3$ No se cumple.

Esta vez el punto (0,0) no cumple la desigualdad por lo tanto la solución sería el semiplano de enfrente. Además, como el signo es mayor que, pero no igual los puntos de la recta no pertenecen a la solución.



2. PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación lineal da respuesta a situaciones en las que se exige **maximizar o minimizar funciones** que se encuentran sujetas a determinadas limitaciones, que llamaremos **restricciones**.

Función objetivo

En esencia la programación lineal consiste en **optimizar (maximizar o minimizar)** una **función objetivo**, que es una **función lineal** de varias variables:

$f(x,y)=ax+by$

Restricciones

La función objetivo está sujeta a una serie de **restricciones**, expresadas por **inecuaciones lineales**:

$a_1x + b_1y \leq c_1$

$a_2x + b_2y \leq c_2$

... ...

$a_nx + b_ny \leq c_n$

Cada desigualdad del sistema de restricciones determina un semiplano.

Región factible

El conjunto intersección, de todos los semiplanos formados por las restricciones, determina un recinto, acotado o no, que recibe el nombre de **región factible** o zona de **soluciones factibles**.

Solución óptima

El conjunto de los vértices de ese recinto se denomina conjunto de **soluciones factibles básicas** y el vértice donde se presenta la **solución óptima** se llama **solución máxima** (**o mínima** según el caso).

Valor del programa lineal

El **valor** que toma la **función objetivo** en el **vértice de solución óptima** se llama **valor del programa lineal**.

3. PASOS PARA RESOLVER UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL

1. Elegir las **incógnitas**.
2. Escribir la **función objetivo** en función de los datos del problema.
3. Escribir las **restricciones** en forma de sistema de inecuaciones.
4. Averiguar la **región factible** representando gráficamente las restricciones.
5. Calcular las coordenadas de los vértices de la región factible.
6. Calcular el **valor de la función objetivo** en cada uno de los vértices para ver en cuál de ellos presenta el **valor máximo o mínimo** según nos pida el problema (hay que tener en cuenta aquí la posible no existencia de solución si el recinto no está acotado).

¿Siempre hay punto máximo o mínimo de una función lineal en dos variables en un recinto convexo?

La respuesta es que la solución puede ser **única, Infinitas o ninguna**.
Veamos los casos que pueden darse:

- Si el recinto es ACOTADO existe una solución única para el máximo y otra para el mínimo en alguno de los vértices si en todos ellos la función toma valores distintos.

- Si es ACOTADO pero hay dos vértices consecutivos en los que la función toma el mismo valor (y ese valor es por ejemplo máximo), entonces toma el mismo valor en todos los puntos del segmento que une ambos vértices, luego la función tiene infinitos máximos(mínimos) y un mínimo(máximo).

- Si el recinto NO está ACOTADO:

Se toma un punto cualquiera del interior de la región factible y se evalúa en la función objetiva:

  - Si este valor es menor que los valores de la función objetivo en los vértices, habrá máximo, pero no mínimo. El máximo se alcanzará en el vértice que maximice la función objetivo.

  - Si este valor es mayor que los valores de la función objetivo en los vértices, habrá mínimo, pero no máximo. El mínimo se alcanzará en el vértice que minimice la función objetivo.

4. EJEMPLOS

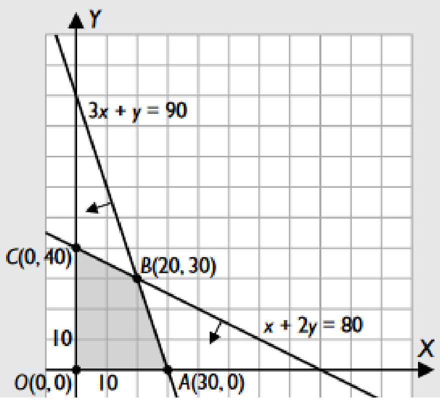
1. Un vendedor de libros usados tiene en su tienda 90 libros de la colección Austral y 80 de la colección Alianza de bolsillo. Decide hacer dos tipos de lotes: el lote de tipo A con 3 libros de Austral y 1 de Alianza de bolsillo, que vende a 8 €, y el de tipo B con 1 libro de Austral y 2 de Alianza de bolsillo, que vende a 10 €.
¿Cuántos lotes de cada tipo debe hacer el vendedor para maximizar su ganancia cuando los haya vendido todos?

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Lote A	Lote B	Restricciones	
N.º de lotes	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Austral	$3x$	y	$3x + y \leq 90$	
Alianza	x	$2y$	$x + 2y \leq 80$	
Ganancias	$8x$	$10y$	$f(x, y) = 8x + 10y$	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 0$

$A(30, 0) \Rightarrow f(30, 0) = 8 \cdot 30 + 10 \cdot 0 = 240$

$B(20, 30) \Rightarrow f(20, 30) = 8 \cdot 20 + 10 \cdot 30 =$
$= 460$ Máximo

$C(0, 40) \Rightarrow f(0, 40) = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 40 = 400$

d) La solución óptima es $B(20, 30)$

2. Un ganadero tiene que elaborar un pienso a partir de dos ingredientes nutritivos: A y B. Los mínimos que necesita son 30 unidades de A y 32 unidades de B. En el mercado se venden sacos de dos marcas que contienen A y B, cuyos contenidos y precios se dan en la tabla siguiente:

Marca	Unidades de A	Unidades de B	Precio del saco
I	3	1	9 €
II	1	4	12 €

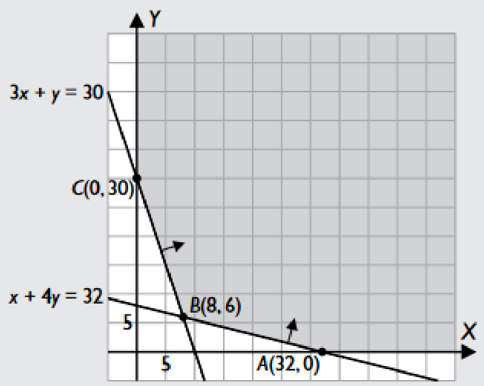
¿Cuántos sacos de cada marca tiene que comprar el ganadero para elaborar este pienso con el mínimo coste?

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Marca I	Marca II	Restricciones	
Número de sacos	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Unidades de A	$3x$	y	$3x + y \geq 30$	
Unidades de B	x	$4y$	$x + 4y \geq 32$	
Coste	$9x$	$12y$	$f(x, y) = 9x + 12y$	Minimizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(32, 0) \Rightarrow f(32, 0) = 9 \cdot 32 + 12 \cdot 0 = 288$

$B(8, 6) \Rightarrow f(8, 6) = 9 \cdot 8 + 12 \cdot 6 = 144$ Mínimo

$C(0, 30) \Rightarrow f(0, 30) = 9 \cdot 0 + 12 \cdot 30 = 360$

d) La solución óptima es $B(8, 6)$

3. Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

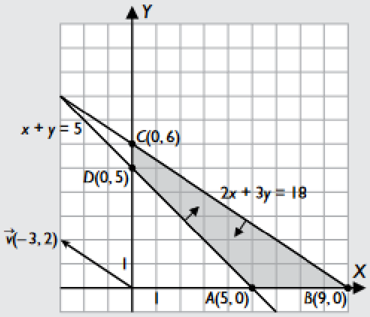
$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 5 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

maximiza en dicho recinto el valor de la función:

f (x, y) = 16x + 24y

Solución:

a) Región factible.



b) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(5, 0) \Rightarrow f(5, 0) = 16 \cdot 5 + 24 \cdot 0 = 80$

$B(9, 0) \Rightarrow f(9, 0) = 16 \cdot 9 + 24 \cdot 0 = 144$ Máximo

$C(0, 6) \Rightarrow f(0, 6) = 16 \cdot 0 + 24 \cdot 6 = 144$ Máximo

$D(0, 5) \Rightarrow f(0, 5) = 16 \cdot 0 + 24 \cdot 5 = 120$

c) La solución se alcanza en los vértices $B(9, 0)$ y $C(0, 6)$; por tanto, también se alcanza en todos los puntos del lado que une los puntos $B(9, 0)$ y $C(0, 6)$, es decir, tiene infinitas soluciones.

4. Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

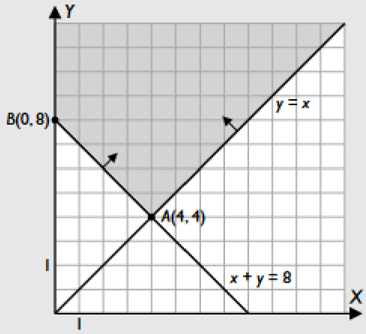
$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 8 \\ x \leq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

maximiza en dicho recinto el valor de la función:

f (x, y) = 23x + 14y

Solución:

a) Región factible.



Se observa que la región factible no está acotada y, por tanto, nunca se alcanza en ningún punto de ella el valor máximo.