

## Checklist de Repaso Rápido: Análisis Matemático (1º Trimestre). Revisar si domino:

### BLOQUE 1: LÍMITES DE FUNCIONES

- **Cálculo de Límites en un Punto y en el Infinito:**
  - Funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas.
- **Indeterminaciones Comunes (0/0,  $\infty/\infty$ ):**
  - Aplicación de la **Regla de L'Hôpital** (una o varias veces).
  - Factorización, simplificación algebraica.
  - Multiplicación por el conjugado (con raíces).
- **Otras Indeterminaciones y Estrategias:**
  - **1 $^{\infty}$ :** Uso del número e ( $\lim (1+1/f(x))^{f(x)} = e$ , o fórmula  $(e^{\lim(g(x)(f(x)-1))})$ ).
  - **0 $^{\infty}$ :** Transformación a 0/0 o  $\infty/\infty$ .
  - **$\infty - \infty$ :** Operaciones algebraicas (m.c.m. en racionales, conjugado en raíces).
  - **0 $^{\infty}$ ,  $\infty^0$ :** Tomar logaritmos neperianos ( $y = f(x)^g(x) \Rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x)$ ).
- **Límites con Parámetros:**
  - Hallar el valor de un parámetro para que el límite exista o tenga un valor específico.
  - Continuar con valor de parámetro que genera indeterminación (Ej.  $(m-2)/0$ , continuamos con  $m=2$ )

### BLOQUE 2: CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

- **Continuidad:**
  - Definición de continuidad en un punto.
  - Estudio de continuidad de funciones definidas a trozos.
  - Estudio de continuidad de funciones con **valor absoluto** (definirla a trozos).
  - Cálculo de parámetros para asegurar la continuidad.
  - Clasificación de discontinuidades (evitable, salto finito, salto infinito).
- **Derivabilidad:**
  - Definición de derivada en un punto ( $\lim (f(x)-f(a))/(x-a)$  o  $\lim (f(a+h)-f(a))/h$ ).
  - Interpretación geométrica de la derivada (pendiente de la recta tangente).
  - Estudio de derivabilidad de funciones definidas a trozos (requiere continuidad previa).
  - Estudio de derivabilidad de funciones con **valor absoluto**.
  - Cálculo de parámetros para asegurar la derivabilidad.
  - Reglas de derivación (polinomios, cocientes, productos, cadena, exp, log, trigonométricas).

### BLOQUE 3: APLICACIONES DE LA DERIVADA

- **Recta Tangente y Normal:**
  - Ecuación de la recta tangente en un punto ( $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ ).
  - Ecuación de la recta normal en un punto.
  - Tangente paralela o perpendicular a una recta dada.
  - Tangente que pasa por un punto exterior.
- **Cálculo de Parámetros de Funciones:**
  - Dadas condiciones sobre puntos de la función, valor de la derivada, extremos relativos, puntos de inflexión, tangentes específicas.
- **Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento):**
  - Estudio del signo de  $f'(x)$ .
- **Extremos Relativos (Máximos y Mínimos):**
  - Criterio de la primera derivada ( $f'(x)=0$  y cambio de signo).
  - Criterio de la segunda derivada ( $f''(x)=0$  y signo de  $f''(x)$ ).
- **Curvatura (Concavidad U y Convexidad n):**
  - Estudio del signo de  $f''(x)$ .
- **Puntos de Inflexión:**
  - $f''(x)=0$  y cambio de signo de  $f''(x)$ .
- **Problemas de Optimización:**
  - Identificar función a maximizar/minimizar.
  - Identificar restricción (si la hay).
  - Derivar, igualar a cero, comprobar si es máximo o mínimo.
  - **Tipos de problemas:**
    - Geométricos: áreas (rectángulos, triángulos inscritos), volúmenes (cajas, cilindros), perímetros, distancias. (Ej: rectángulo de área máx. bajo una curva, caja de vol. máx. con material dado, punto más cercano, alambre/cuerda en trozos, perímetro mínimo, área máxima...).
    - Funcionales/Económicos: costes, beneficios, concentraciones. (Ej: coste mínimo de producción, beneficio máximo).

## BLOQUE 4: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

- **Estudio Completo para Representar:**
  - Dominio.
  - Simetrías (par, impar).
  - Puntos de corte con los ejes.
  - Asíntotas:
    - Verticales ( $\lim f(x) = \pm\infty$  cuando  $x \rightarrow a$ ).
    - Horizontales ( $\lim f(x) = L$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ ).
    - Oblicuas ( $y = mx + n$ , con  $m = \lim f(x)/x$ ,  $n = \lim (f(x) - mx)$ ).
  - Monotonía y Extremos Relativos.
  - Curvatura y Puntos de Inflexión (si se pide o es necesario para la forma).
  - Esbozo de la gráfica.
- **Representar a Partir de Propiedades Dadas:**
  - Interpretar información sobre límites, asíntotas, signos de  $f'$ ,  $f''$ , valores de la función.

## BLOQUE 5: TEOREMAS FUNDAMENTALES

- **Teorema de Bolzano:**
  - Enunciado e interpretación geométrica.
  - Aplicación: Demostrar existencia de raíces ( $f(c) = 0$ ) o puntos de corte entre funciones ( $f(c) = g(c)$  considerando  $h(x) = f(x) - g(x)$ ).
- **Teorema de Rolle:**
  - Enunciado e interpretación geométrica.
  - Aplicación: Demostrar existencia de puntos con tangente horizontal ( $f'(c) = 0$ ), unicidad de raíces (red. absurdo).
  - Verificar hipótesis y encontrar 'c'.
  - Calcular parámetros para que se cumplan las hipótesis.
- **Teorema del Valor Medio (Lagrange):**
  - Enunciado e interpretación geométrica.
  - Aplicación: Encontrar puntos donde la tangente es paralela a la secante.
  - Verificar hipótesis y encontrar 'c'.
  - Calcular parámetros para que se cumplan las hipótesis.

## BLOQUE 6: CÁLCULO DE INTEGRALES INDEFINIDAS (para 2º Examen/Recuperación)

- **Definición de Primitiva e Integral Indefinida.**
- **Integrales Inmediatas:**
  - Tipo Potencial (simples y  $\int u^n$ ).
  - Tipo Logarítmico (simples y  $\int u'/u$ ).
  - Tipo Exponencial (simples y  $\int u'e^u$ ,  $\int u'a^u$ ).
  - Trigonométricas directas ( $\sin, \cos, 1/\cos^2, 1/\sin^2$ ).
  - Tipo Arcoseno ( $\int u'/\sqrt{1-u^2}$ ).
  - Tipo Arcotangente ( $\int u'/\sqrt{1+u^2}$ ), incluyendo completar cuadrados en el denominador.
- **Métodos de Integración:**
  - **Cambio de Variable:**
    - Cambios sencillos y evidentes.
    - Cambios para "raíces que estorban" (ej:  $u^n = \text{expresión con raíz}$ ).
    - Cambios que transforman en racionales (ej:  $u = e^x$ ).
  - **Por Partes ( $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ ):**
    - Selección adecuada de  $u$  y  $dv$  (regla ALPES o similar).
    - Aplicación una o varias veces.
    - Casos con logaritmos, exponentiales por polinomio, trigonométricas por polinomio.
  - **Funciones Racionales ( $\int P(x)/Q(x) \, dx$ ):**
    - Si grado  $P(x) \geq$  grado  $Q(x)$ : Realizar división de polinomios primero.
    - Descomposición en fracciones simples:
      - Raíces reales simples en  $Q(x)$ .
      - Raíces reales múltiples en  $Q(x)$ .

### Notas Importantes:

- **Valor Absoluto:** Recuerda que si aparece  $|f(x)|$ , debes definirlo como una función a trozos para estudiar continuidad, derivabilidad, o integrarlo (en integrales definidas).
- **Funciones Trigonométricas:** Domina las derivadas e integrales básicas, ten presentes las identidades fundamentales si fueran necesarias para simplificar, las razones trigonométricas de ángulos conocidos y EN ANÁLISIS, RADIANES.

## Guía Rápida de Casuísticas de Ejercicios – Análisis Matemático

### 1. LÍMITES: ¿Qué me pueden pedir?

- **"Calcula el siguiente límite..."**
  - **Si  $x \rightarrow a$  (número):** Sustituir. Indeterminación  $(0/0, \infty/\infty)$ , aplicar L'Hôpital, factorizar...
  - **Si  $x \rightarrow \infty$ :** Comportamiento de funciones (polinomios, exponenciales, logaritmos). Si da indeterminación  $(\infty/\infty, \infty-\infty)$ , L'Hôpital (si es aplicable), dividir por máxima potencia, o operar algebraicamente (ej. resta de raíces multiplicando por el conjugado).
  - **Con e (Indeterminación  $1^\infty$ ):** Buscar la forma  $(1 + 1/f(x))^{f(x)}$  o usar la fórmula  $e^{(\lim g(x)(f(x)-1))}$ .
  - **Con logaritmos (Indeterminaciones  $0^0, \infty^0$ ):** Llamar  $L$  al límite, tomar  $\ln L$ , aplicar propiedades de logaritmos para bajar el exponente, calcular el límite de  $\ln L$ , y finalmente  $L = e^{(\lim \ln L)}$ .
  - **Indeterminación  $0 \cdot \infty$ :** Transformar algebraicamente a  $0/0$  o  $\infty/\infty$  para poder aplicar L'Hôpital.
- **"Calcula el valor de 'm' para que el límite  $\lim (...) = k$ " o "...sea finito" o "...exista".**
  - Sustituir y analizar la expresión.
  - **Matiz importante:** A veces, para que el límite sea un valor específico, se toma el valor parámetro  $m/a$  que genere una indeterminación Ej.  $(m-2)/0$ , continuamos con  $m=2$ .

### 2. CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD: ¿Qué me pueden pedir?

- **"Estudia la continuidad de  $f(x)$  en  $x=a$  / en su dominio."**
  - Calcular  $f(a)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ . Deben existir y ser iguales.
  - Si hay **valor absoluto**, definir  $f(x)$  a trozos primero.
  - Identificar y clasificar discontinuidades si existen.
- **"Calcula 'a' y 'b' para que  $f(x)$  (a trozos) sea continua en  $x=k$ ."**
  - Igualar límites laterales en  $x=k$  y el valor de la función en ese punto (si está definido por una de las ramas). Se genera un sistema de ecuaciones si hay varios parámetros y varios puntos.
  - **Matiz importante:** A veces, para que el límite sea un valor específico, se toma el valor parámetro  $m/a$  que genere una indeterminación Ej.  $(m-2)/0$ , continuamos con  $m=2$ .
- **"Estudia la derivabilidad de  $f(x)$  en  $x=a$  / en su dominio."**
  - **Paso 1: Comprobar continuidad** en  $x=a$ . Si no es continua, NO es derivable.
  - **Paso 2: Si es continua,** calcular derivadas laterales  $f'(a^-)$  y  $f'(a^+)$  (derivando las ramas correspondientes y evaluando, o usando la definición de derivada). Deben ser iguales y finitas.
  - Si hay **valor absoluto**, definir  $f(x)$  a trozos primero.
- **"Calcula 'a' y 'b' para que  $f(x)$  (a trozos) sea derivable en  $x=k$ ."**
  - Imponer **continuidad** en  $x=k$  (genera una ecuación con  $a$  y  $b$ ).
  - Imponer **igualdad de derivadas laterales** en  $x=k$  (genera otra ecuación con  $a$  y  $b$ ).
  - Resolver el sistema de ecuaciones.

### 3. APLICACIONES DE LA DERIVADA: ¿Qué me pueden pedir?

- **RECTA TANGENTE/NORMAL:**
  - **"Halla la ecuación de la recta tangente a  $f(x)$  en  $x=a$ ."**
  - **"Halla la ecuación de la recta normal a  $f(x)$  en  $x=a$ ."**
  - **"Halla la/s tangente/s a  $f(x)$  que es/son paralela/s (o perpendicular/es) a la recta  $y=mx+n$ ."**
  - **"Halla los puntos donde la tangente es horizontal."** ( $f'(x)=0$ ).
- **CÁLCULO DE PARÁMETROS DE UNA FUNCIÓN:**
  - **"Dada  $f(x) = ax^3+bx^2+...$  halla  $a,b,c$  si..."** (y se dan condiciones como: pasa por punto, extremo en  $x_0$  o en  $(x_0, y_0)$ , inflexión en  $x_0$  o en  $(x_0, y_0)$ , tangente con pendiente dada, tangente es una recta específica). Montar y resolver sistema de ecuaciones.
- **MONOTONÍA, EXTREMOS, CURVATURA, INFLEXIÓN:**
  - **"Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$ ."** (Signo de  $f'(x)$ ).
  - **"Halla los máximos y mínimos relativos de  $f(x)$ ."** ( $f'(x)=0$ , criterio 1<sup>a</sup> o 2<sup>a</sup> derivada).
  - **"Estudia la curvatura (concavidad U / convexidad n) de  $f(x)$ ."** (Signo de  $f''(x)$ ).
  - **"Halla los puntos de inflexión de  $f(x)$ ."** ( $f''(x)=0$  y cambio de signo de  $f''(x)$ ).

- **OPTIMIZACIÓN:**
  - "De entre todos los/las... (objetos) que cumplen (restricción/es), halla el/la que hace que (función objetivo: área, volumen, coste, etc.) sea máximo/mínimo."
  - *Pasos generales:* 1. Identificar variables. 2. Escribir función objetivo. 3. Si es necesario usar dato para tenerla solo con una variable. 4. Derivar, igualar a cero, resolver. 6. Comprobar si es máx. o mín. (criterio 2<sup>a</sup> derivada o estudio de monotonía). 7. Respuesta en lenguaje natural a la pregunta.
  - *Casuísticas comunes:*
    - **Geométricas 2D:** Rectángulo de área máx. inscrito en curva/área; triángulo de área máx.; distancia mínima entre punto y curva; dimensiones de una página para que el área impresa sea máx. con márgenes fijos (o **superficie mínima de papel para un área impresa dada con márgenes**).
    - **Geométricas 3D:** Caja (con/sin tapa) de volumen máx./superficie mín./coste mín. con material dado (ej: **recortando esquinas de una plancha rectangular/cuadrada** para hacer una caja); cilindro de volumen máx.
    - **División de cantidades:** Dividir un número en sumandos para optimizar un producto/suma de cuadrados; dividir un **alambre para formar dos o más figuras geométricas** (ej: cuadrado y círculo, cuadrado y triángulo equilátero) y optimizar suma/diferencia de áreas.
    - **Costes/Beneficios/Otros:** Minimizar coste de material/construcción; maximizar beneficio; ángulo de visión máximo a un cuadro/pantalla.

#### 4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA: ¿Qué me pueden pedir?

- "Representa gráficamente  $f(x)$  estudiando: dominio, simetrías, cortes con los ejes, asíntotas (Verticales, Horizontales, Oblicuas), monotonía y extremos relativos, y (a veces) curvatura y puntos de inflexión."
- "Halla las asíntotas de  $f(x)$ ."
- "Dibuja una función  $f(x)$  que cumpla las siguientes propiedades..." (Interpretar condiciones sobre límites, continuidad, derivabilidad, signos de  $f'$ ,  $f''$ , valores de la función, asíntotas).

#### 5. TEOREMAS: ¿Qué me pueden pedir?

- "Enuncia el Teorema de (Bolzano/Rolle/Valor Medio)."
- "Explica la interpretación geométrica del Teorema de..."
- **APLICACIONES DE BOLZANO:**
  - "Demuestra que la ecuación  $f(x)=0$  tiene al menos una solución en  $[a,b]$ ."
  - "Demuestra que de  $f(x)$  y  $g(x)$  se cortan al menos una vez..." (resta  $h(x) = f(x) - g(x)$ ).
- **APLICACIONES DE ROLLE:**
  - "Demuestra que  $f(x)=0$  (o  $f(x)=g(x)$ ) tiene una única solución en  $(a,b)$ ." (Unicidad - red. absurdo).
  - "Comprueba si  $f(x)$  cumple hipótesis de Rolle en  $[a,b]$ . Halla 'c' tal que  $f'(c)=0$ ."
  - "Halla los parámetros para que  $f(x)$  cumpla las hipótesis de Rolle en  $[a,b]$ . Luego, halla 'c'."
- **APLICACIONES DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO (TVM):**
  - "Comprueba si  $f(x)$  cumple las hipótesis del TVM en  $[a,b]$ . En caso afirmativo, halla 'c' tal que  $f'(c) = (f(b)-f(a))/(b-a)$ ."
  - "Halla los parámetros para que  $f(x)$  cumpla las hipótesis del TVM en  $[a,b]$ . Luego, halla 'c'."

#### 6. INTEGRALES (para 2º Examen/Recuperación): ¿Qué me pueden pedir?

- "Define función primitiva / integral indefinida."
- "Calcula la siguiente integral indefinida..."
  - **Identificar el tipo y aplicar el método:**
    - **Inmediata:** Potencial ( $\int u^n$ ), logarítmica ( $\int u'/u$ ), exponencial ( $\int u' e^u$ ), trigonométrica directa, Arcoseno ( $\int u'/\sqrt{1-u^2}$ ), Arcotangente ( $\int u'/1+u^2$ ) - puede requerir completar cuadrados).
    - **Cambio de Variable:**
      - Sustitución evidente (ej.  $u = \text{argumento de raíz/log/exp/trig}$ ).
      - Para "raíces que estorban" (ej.  $u^2 = \text{contenido raíz}$  o al exponente que proceda).
      - $u = e^x$  si aparecen muchos  $e^x$ .
  - **Por Partes ( $\int u \, dv$ ):**
    - Polinomio x Exponencial.
    - Polinomio x Trigonométrica.
    - Polinomio x Logaritmo (aquí  $u=\ln(x)$ ).
    - Logaritmo o Arcotangente (solas o por polinomio,  $u=\ln(x)$  o  $u=\arctan(x)$ ).
    - Exponencial x Trigonométrica (cíclicas, si se ven).
  - **Funciones Racionales ( $\int P(x)/Q(x) \, dx$ ):**
    - Si  $\text{Grado}(P) \geq \text{Grado}(Q) \rightarrow \text{División}$  primero.
    - Descomposición en **fracciones simples** según las raíces de  $Q(x)$ :
      - Reales simples.
      - Reales múltiples.
      - Complejas (arcotangente, completar cuadrado).