

Checklist de Repaso Rápido: Análisis Matemático (1º Trimestre). Revisar si domino:

BLOQUE 1: LÍMITES DE FUNCIONES

- ☐ **Cálculo de Límites en un Punto y en el Infinito:**
 - ☐ Funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas.
- ☐ **Indeterminaciones Comunes (0/0, ∞/∞):**
 - ☐ Aplicación de la **Regla de L'Hôpital** (una o varias veces).
 - ☐ Factorización, simplificación algebraica.
 - ☐ Multiplicación por el conjugado (con raíces).
- ☐ **Otras Indeterminaciones y Estrategias:**
 - ☐ **1^∞** : Uso del número e ($\lim (1+1/f(x))^{f(x)} = e$, o fórmula ($e^{\lim(g(x)(f(x)-1))}$)).
 - ☐ **$0 \cdot \infty$** : Transformación a 0/0 o ∞/∞ .
 - ☐ **$\infty - \infty$** : Operaciones algebraicas (m.c.m. en racionales, conjugado en raíces).
 - ☐ **0^0 , ∞^0** : Tomar logaritmos neperianos ($y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x)$).
- ☐ **Límites con Parámetros:**
 - ☐ Hallar el valor de un parámetro para que el límite exista o tenga un valor específico.
 - ☐ Continuar con valor de parámetro que genera indeterminación (Ej. $(m-2)/0$, continuamos con $m=2$).

BLOQUE 2: CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

- ☐ **Continuidad:**
 - ☐ Definición de continuidad en un punto.
 - ☐ Estudio de continuidad de funciones definidas a trozos.
 - ☐ Estudio de continuidad de funciones con **valor absoluto** (definirla a trozos).
 - ☐ Cálculo de parámetros para asegurar la continuidad.
 - ☐ Clasificación de discontinuidades (evitable, salto finito, salto infinito).
- ☐ **Derivabilidad:**
 - ☐ Definición de derivada en un punto ($\lim (f(x)-f(a))/(x-a)$ o $\lim (f(a+h)-f(a))/h$).
 - ☐ Interpretación geométrica de la derivada (pendiente de la recta tangente).
 - ☐ Estudio de derivabilidad de funciones definidas a trozos (requiere continuidad previa).
 - ☐ Estudio de derivabilidad de funciones con **valor absoluto**.
 - ☐ Cálculo de parámetros para asegurar la derivabilidad.
 - ☐ Reglas de derivación (polinomios, cocientes, productos, cadena, exp, log, trigonométricas).

BLOQUE 3: APLICACIONES DE LA DERIVADA

- ☐ **Recta Tangente y Normal:**
 - ☐ Ecuación de la recta tangente en un punto ($y - f(a) = f'(a)(x-a)$).
 - ☐ Ecuación de la recta normal en un punto.
 - ☐ Tangente paralela o perpendicular a una recta dada.
 - ☐ Tangente que pasa por un punto exterior.
- ☐ **Cálculo de Parámetros de Funciones:**
 - ☐ Dadas condiciones sobre puntos de la función, valor de la derivada, extremos relativos, puntos de inflexión, tangentes específicas.
- ☐ **Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento):**
 - ☐ Estudio del signo de $f'(x)$.
- ☐ **Extremos Relativos (Máximos y Mínimos):**
 - ☐ Criterio de la primera derivada ($f'(x)=0$ y cambio de signo).
 - ☐ Criterio de la segunda derivada ($f'(x)=0$ y signo de $f''(x)$).
- ☐ **Curvatura (Concavidad U y Convexidad \cap):**
 - ☐ Estudio del signo de $f''(x)$.
- ☐ **Puntos de Inflexión:**
 - ☐ $f''(x)=0$ y cambio de signo de $f''(x)$.
- ☐ **Problemas de Optimización:**
 - ☐ Identificar función a maximizar/minimizar.
 - ☐ Identificar restricción (si la hay).
 - ☐ Derivar, igualar a cero, comprobar si es máximo o mínimo.
 - ☐ *Tipos de problemas:*
 - Geométricos: áreas (rectángulos, triángulos inscritos), volúmenes (cajas, cilindros), perímetros, distancias. (Ej: rectángulo de área máx. bajo una curva, caja de vol. máx. con material dado, punto más cercano, alambre/cuerda en trozos, perímetro mínimo, área máxima...).
 - Funcionales/Económicos: costes, beneficios, concentraciones. (Ej: coste mínimo de producción, beneficio máximo).

BLOQUE 4: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

- **[] Estudio Completo para Representar:**
 - [] Dominio.
 - [] Simetrías (par, impar).
 - [] Puntos de corte con los ejes.
 - [] Asíntotas:
 - [] Verticales ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ cuando $x \rightarrow a$).
 - [] Horizontales ($\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$).
 - [] Oblicuas ($y = mx+n$, con $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x$, $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x)-mx)$).
 - [] Monotonía y Extremos Relativos.
 - [] Curvatura y Puntos de Inflexión (si se pide o es necesario para la forma).
 - [] Esbozo de la gráfica.
- **[] Representar a Partir de Propiedades Dadas:**
 - [] Interpretar información sobre límites, asíntotas, signos de f' , f'' , valores de la función.

BLOQUE 5: TEOREMAS FUNDAMENTALES

- **[] Teorema de Bolzano:**
 - [] Enunciado e interpretación geométrica.
 - [] Aplicación: Demostrar existencia de raíces ($f(c)=0$) o puntos de corte entre funciones ($f(x)=g(x)$ considerando $h(x)=f(x)-g(x)$).
- **[] Teorema de Rolle:**
 - [] Enunciado e interpretación geométrica.
 - [] Aplicación: Demostrar existencia de puntos con tangente horizontal ($f'(c)=0$), unicidad de raíces (red. absurdo).
 - [] Verificar hipótesis y encontrar 'c'.
 - [] Calcular parámetros para que se cumplan las hipótesis.
- **[] Teorema del Valor Medio (Lagrange):**
 - [] Enunciado e interpretación geométrica.
 - [] Aplicación: Encontrar puntos donde la tangente es paralela a la secante.
 - [] Verificar hipótesis y encontrar 'c'.
 - [] Calcular parámetros para que se cumplan las hipótesis.

BLOQUE 6: CÁLCULO DE INTEGRALES INDEFINIDAS (para 2º Examen/Recuperación)

- **[] Definición de Primitiva e Integral Indefinida.**
- **[] Integrales Inmediatas:**
 - [] Tipo Potencial (simples y $\int u^n$).
 - [] Tipo Logarítmico (simples y $\int u'/u$).
 - [] Tipo Exponencial (simples y $\int u' e^u$, $\int u' a^u$).
 - [] Trigonómicas directas (\sin , \cos , $1/\cos^2$, $1/\sin^2$).
 - [] Tipo Arcoseno ($\int u'/\sqrt{1-u^2}$).
 - [] Tipo Arcotangente ($\int u'/(1+u^2)$), incluyendo completar cuadrados en el denominador.
- **[] Métodos de Integración:**
 - **[] Cambio de Variable:**
 - Cambios sencillos y evidentes.
 - Cambios para "raíces que estorban" (ej: $u^n = \text{expresión con raíz}$).
 - Cambios que transforman en racionales (ej: $u = e^x$).
 - **[] Por Partes ($\int u dv = uv - \int v du$):**
 - Selección adecuada de u y dv (regla ALPES o similar).
 - Aplicación una o varias veces.
 - Casos con logaritmos, exponenciales por polinomio, trigonómicas por polinomio.
 - **[] Funciones Racionales ($\int P(x)/Q(x) dx$):**
 - Si grado $P(x) \geq$ grado $Q(x)$: Realizar división de polinomios primero.
 - Descomposición en fracciones simples:
 - Raíces reales simples en $Q(x)$.
 - Raíces reales múltiples en $Q(x)$.

Notas Importantes:

- **Valor Absoluto:** Recuerda que si aparece $|f(x)|$, debes definirlo como una función a trozos para estudiar continuidad, derivabilidad, o integrarlo (en integrales definidas).
- **Funciones Trigonómicas:** Domina las derivadas e integrales básicas, ten presentes las identidades fundamentales si fueran necesarias para simplificar, las razones trigonómicas de ángulos conocidos y EN ANÁLISIS, RADIANTES.

Guía Rápida de Casuísticas de Ejercicios – Análisis Matemático

1. LÍMITES: ¿Qué me pueden pedir?

- **"Calcula el siguiente límite..."**
 - **Si $x \rightarrow a$ (número):** Sustituir. Indeterminación ($0/0$, ∞/∞), aplicar L'Hôpital, factorizar...
 - **Si $x \rightarrow \infty$:** Comportamiento de funciones (polinomios, exponenciales, logaritmos). Si da indeterminación (∞/∞ , $\infty-\infty$), L'Hôpital (si es aplicable), dividir por máxima potencia, o operar algebraicamente (ej. resta de raíces multiplicando por el conjugado).
 - **Con e (Indeterminación 1^∞):** Buscar la forma $(1 + 1/f(x))^{f(x)}$ o usar la fórmula $e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 1)}$.
 - **Con logaritmos (Indeterminaciones 0^0 , ∞^0):** Llamar L al límite, tomar $\ln L$, aplicar propiedades de logaritmos para bajar el exponente, calcular el límite de $\ln L$, y finalmente $L = e^{\text{resultado}}$.
 - **Indeterminación $0 \cdot \infty$:** Transformar algebraicamente a $0/0$ o ∞/∞ para poder aplicar L'Hôpital.
- **"Calcula el valor de 'm' para que el límite $\lim (...) = k$ " o "...sea finito" o "...exista".**
 - Sustituir y analizar la expresión.
 - **Matiz importante:** A veces, para que el límite sea un valor específico, se toma el valor parámetro m/a que genere una indeterminación Ej. $(m-2)/0$, continuamos con $m=2$.

2. CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD: ¿Qué me pueden pedir?

- **"Estudia la continuidad de $f(x)$ en $x=a$ / en su dominio."**
 - Calcular $f(a)$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. Deben existir y ser iguales.
 - Si hay **valor absoluto**, definir $f(x)$ a trozos primero.
 - Identificar y clasificar discontinuidades si existen.
- **"Calcula 'a' y 'b' para que $f(x)$ (a trozos) sea continua en $x=k$."**
 - Igualar límites laterales en $x=k$ y el valor de la función en ese punto (si está definido por una de las ramas). Se genera un sistema de ecuaciones si hay varios parámetros y varios puntos.
Matiz importante: A veces, para que el límite sea un valor específico, se toma el valor parámetro m/a que genere una indeterminación Ej. $(m-2)/0$, continuamos con $m=2$.
- **"Estudia la derivabilidad de $f(x)$ en $x=a$ / en su dominio."**
 - **Paso 1: Comprobar continuidad** en $x=a$. Si no es continua, NO es derivable.
 - **Paso 2: Si es continua**, calcular derivadas laterales $f'(a^-)$ y $f'(a^+)$ (derivando las ramas correspondientes y evaluando, o usando la definición de derivada). Deben ser iguales y finitas.
 - Si hay **valor absoluto**, definir $f(x)$ a trozos primero.
- **"Calcula 'a' y 'b' para que $f(x)$ (a trozos) sea derivable en $x=k$."**
 - Imponer **continuidad** en $x=k$ (genera una ecuación con a y b).
 - Imponer **igualdad de derivadas laterales** en $x=k$ (genera otra ecuación con a y b).
 - Resolver el sistema de ecuaciones.

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA: ¿Qué me pueden pedir?

- **RECTA TANGENTE/NORMAL:**
 - **"Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=a$."**
 - **"Halla la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en $x=a$."**
 - **"Halla la/s tangente/s a $f(x)$ que es/son paralela/s (o perpendicular/es) a la recta $y=mx+n$."**
 - **"Halla los puntos donde la tangente es horizontal."** ($f'(x)=0$).
- **CÁLCULO DE PARÁMETROS DE UNA FUNCIÓN:**
 - **"Dada $f(x) = ax^3+bx^2+\dots$ halla a,b,c si..."** (y se dan condiciones como: pasa por punto, extremo en x_0 o en (x_0, y_0) , inflexión en x_0 o en (x_0, y_0) , tangente con pendiente dada, tangente es una recta específica). Montar y resolver sistema de ecuaciones.
- **MONOTONÍA, EXTREMOS, CURVATURA, INFLEXIÓN:**
 - **"Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$."** (Signo de $f'(x)$).
 - **"Halla los máximos y mínimos relativos de $f(x)$."** ($f'(x)=0$, criterio 1ª o 2ª derivada).
 - **"Estudia la curvatura (concavidad U / convexidad n) de $f(x)$."** (Signo de $f''(x)$).
 - **"Halla los puntos de inflexión de $f(x)$."** ($f''(x)=0$ y cambio de signo de $f''(x)$).

- **OPTIMIZACIÓN:**
 - "De entre todos los/las... (objetos) que cumplen (restricción/es), halla el/la que hace que (función objetivo: área, volumen, coste, etc.) sea máximo/mínimo."
 - *Pasos generales:* 1. Identificar variables. 2. Escribir función objetivo. 3. Si es necesario usar dato para tenerla solo con una variable. 4. Derivar, igualar a cero, resolver. 6. Comprobar si es máx. o mín. (criterio 2ª derivada o estudio de monotonía). 7. Respuesta en lenguaje natural a la pregunta.
 - *Casísticas comunes:*
 - **Geométricas 2D:** Rectángulo de área máx. inscrito en curva/región; triángulo de área máx.; distancia mínima entre punto y curva; dimensiones de una página para que el área impresa sea máx. con márgenes fijos (o **superficie mínima de papel para un área impresa dada con márgenes**).
 - **Geométricas 3D:** Caja (con/sin tapa) de volumen máx./superficie mín./coste mín. con material dado (ej: **recortando esquinas de una plancha rectangular/cuadrada** para hacer una caja); cilindro de volumen máx.
 - **División de cantidades:** Dividir un número en sumandos para optimizar un producto/suma de cuadrados; dividir un **alambre para formar dos o más figuras geométricas** (ej: cuadrado y círculo, cuadrado y triángulo equilátero) y optimizar suma/diferencia de áreas.
 - **Costes/Beneficios/Otros:** Minimizar coste de material/construcción; maximizar beneficio; ángulo de visión máximo a un cuadro/pantalla.

4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA: ¿Qué me pueden pedir?

- "Representa gráficamente $f(x)$ estudiando: dominio, simetrías, cortes con los ejes, asíntotas (Verticales, Horizontales, Oblicuas), monotonía y extremos relativos, y (a veces) curvatura y puntos de inflexión."
- "Halla las asíntotas de $f(x)$."
- "Dibuja una función $f(x)$ que cumpla las siguientes propiedades..." (Interpretar condiciones sobre límites, continuidad, derivabilidad, signos de f' , f'' , valores de la función, asíntotas).

5. TEOREMAS: ¿Qué me pueden pedir?

- "Enuncia el Teorema de (Bolzano/Rolle/Valor Medio)."
- "Explica la interpretación geométrica del Teorema de..."
- **APLICACIONES DE BOLZANO:**
 - "Demuestra que la ecuación $f(x)=0$ tiene al menos una solución en $[a,b]$."
 - "Demuestra que de $f(x)$ y $g(x)$ se cortan al menos una vez..." (resta $h(x) = f(x) - g(x)$).
- **APLICACIONES DE ROLLE:**
 - "Demuestra que $f(x)=0$ (o $f(x)=g(x)$) tiene una única solución en (a,b) ." (Unicidad - red. absurdo).
 - "Comprueba si $f(x)$ cumple hipótesis de Rolle en $[a,b]$. Halla 'c' tal que $f'(c)=0$."
 - "Halla los parámetros para que $f(x)$ cumpla las hipótesis de Rolle en $[a,b]$. Luego, halla 'c'."
- **APLICACIONES DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO (TVM):**
 - "Comprueba si $f(x)$ cumple las hipótesis del TVM en $[a,b]$. En caso afirmativo, halla 'c' tal que $f'(c) = (f(b)-f(a))/(b-a)$."
 - "Halla los parámetros para que $f(x)$ cumpla las hipótesis del TVM en $[a,b]$. Luego, halla 'c'."

6. INTEGRALES (para 2º Examen/Recuperación): ¿Qué me pueden pedir?

- "Define función primitiva / integral indefinida."
- "Calcula la siguiente integral indefinida..."
 - **Identificar el tipo y aplicar el método:**
 - **Inmediata:** Potencial ($\int u^n$), logarítmica ($\int u'/u$), exponencial ($\int u' e^u$), trigonométrica directa, Arcoseno ($\int u'/\sqrt{1-u^2}$), Arcotangente ($\int u'/(1+u^2)$) - puede requerir completar cuadrados).
 - **Cambio de Variable:**
 - Sustitución evidente (ej. u = argumento de raíz/log/exp/trig).
 - Para "raíces que estorban" (ej. u^2 = contenido raíz (o al exponente que proceda)).
 - $u = e^x$ si aparecen muchos e^x .
 - **Por Partes ($\int u dv$):**
 - Polinomio \times Exponencial.
 - Polinomio \times Trigonométrica.
 - Polinomio \times Logaritmo (aquí $u=\ln(x)$).
 - Logaritmo o Arcotangente (solos o por polinomio, $u=\ln(x)$ o $u=\arctan(x)$).
 - Exponencial \times Trigonométrica (cíclicas, si se ven).
 - **Funciones Racionales ($\int P(x)/Q(x) dx$):**
 - Si $\text{Grado}(P) \geq \text{Grado}(Q) \rightarrow$ **División** primero.
 - Descomposición en **fracciones simples** según las raíces de $Q(x)$:
 - Reales simples.
 - Reales múltiples.
 - Complejas (arcotangente, completar cuadrado).