

Ejercicio 1. DERIVADAS. Calcula las derivadas simplificando cuando proceda:

$$a) f_1(x) = \arctan \frac{x^2+1}{x^2-1} \quad b) f_2(x) = 5^{\cos \frac{1}{x^4}} \quad c) f_3(x) = \frac{e^{x^2}}{\sqrt[3]{x}} \quad d) f_4(x) = 2x \cdot \ln \sqrt{\frac{x^2}{1-x}}$$

$$e) f_5(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \quad f) f_6(x) = 2^{\cos \frac{1}{x^2}} \quad g) f_7(x) = \frac{e^x}{\sin^2 x} \quad h) f_8(x) = \arctan \sqrt{x^2-1}$$

$$i) f_9(x) = 5^{\sin(\tan x)} \quad j) f_{10}(x) = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad k) f_{11}(x) = \ln(\sin \sqrt[3]{x}) \quad l) f_{12}(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \tan x$$

$$m) f_{13}(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} \quad n) f_{14}(x) = \ln(\sin(\frac{1}{x})) \quad o) f_{15}(x) = \frac{2e^{x^2}}{\sqrt{x}} \quad p) f_{16}(x) = 2^x \cdot \arcsin x$$

$$q) f_{17}(x) = \ln \sqrt{\frac{2x}{x+1}} \quad r) f_{18}(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \quad s) f_{19}(x) = 5^{\cos \frac{1}{x^2}} \quad t) f_{20}(x) = e^{-x^2} \cdot \sqrt[3]{2x}$$

$$u) f_{21}(x) = \arctan \frac{x}{x+2} \quad v) f_{22}(x) = \ln(\cos \frac{1}{x}) \quad w) f_{23}(x) = e^{x^2} \cdot \sqrt{x}$$

SOLUCIONES:

$$a) f_1'(x) = \frac{-2x}{x^4+1} \quad b) f_2'(x) = \frac{4 \ln 5 \cdot 5^{\cos \frac{1}{x^4}} \sin \frac{1}{x^4}}{x^5} \quad c) f_3'(x) = \frac{e^{x^2}(6x^2-1)}{3x\sqrt[3]{x}} \quad d) f_4'(x) = \ln \frac{x^2}{1-x} + \frac{2-x}{1-x}$$

$$e) f_5'(x) = \frac{-2x}{x^4-1} \quad f) f_6'(x) = \frac{2 \ln 2 \cdot 2^{\cos \frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x^2}}{x^3} \quad g) f_7'(x) = \frac{e^x(\sin x - 2 \cos x)}{\sin^3 x} \quad h) f_8'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$i) f_9'(x) = \ln 5 \cdot 5^{\sin(\tan x)} \cdot \cos \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \quad j) f_{10}'(x) = \frac{1}{x-1} \quad k) f_{11}'(x) = \frac{\sqrt[3]{x} \cos \sqrt[3]{x}}{3x} = \frac{\cot \sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2} \sin \sqrt[3]{x}} \quad l) f_{12}'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\tan x}{x^2} \right)$$

$$m) f_{13}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad n) f_{14}'(x) = \frac{-\cot \frac{1}{x}}{x^2} \quad o) f_{15}'(x) = \frac{e^{x^2}(4x^2-1)}{x\sqrt{x}} \quad p) f_{16}'(x) = 2^x \ln 2 \cdot \arcsin x + \frac{2^x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$q) f_{17}'(x) = \frac{1}{2x(x+1)} \quad r) f_{18}'(x) = \frac{2x}{1-x^4} \quad s) f_{19}'(x) = \frac{2 \ln 5 \cdot 5^{\cos \frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x^2}}{x^3} \quad t) f_{20}'(x) = 2e^{-x^2} \left(\frac{1-6x^2}{3\sqrt[3]{4x^2}} \right)$$

$$u) f_{21}'(x) = \frac{1}{x^2+2x+2} \quad v) f_{22}'(x) = \frac{\tan \frac{1}{x}}{x^2} \quad w) f_{23}'(x) = e^{x^2} \left(\frac{4x^2+1}{2\sqrt{x}} \right)$$

Ejercicio 2. CÁLCULO DE LÍMITES.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - e^x} = 0 \quad b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \ln x}{x^3 + x^2} = 1/2 \quad c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\tan(x^2 - 1)}{\ln(x^4)} = 1/2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{2x^3 - 5x + 4} = 2 \quad e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1} = 0 \quad f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x + x^2}{2x^2} = \inf$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 4} = -3/5 \quad h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^3 + x^2 - 5x + 10} = 1/2 \quad i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{e^x} = 1$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = 1/6 \quad k) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{\tan(x - 1)} = 4 \quad l) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2x + 1}{x^3 + x^2 - 5x + 10} = 2$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = 1/2 \quad n) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 1} \right) = 1 \quad \tilde{n}) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} = e$$

$$o) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} \right)^{\frac{-x^2}{2x+1}} = 0$$

$$p) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{x} - \frac{x^2}{x-1} \right) = -3$$

$$q) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 6x} \right) = 3$$

$$r) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 + 5} \right) = -2$$

$$s) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 3x} \right) = 3/2$$

$$t) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{\frac{x^2-1}{x}} = e^{-3}$$

$$u) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{2x+1} \right)^{\frac{x^2-1}{2x}} = 0$$

$$v) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1}}{x-3} = -2$$

$$w) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^{\frac{x^2}{x+1}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$x) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{\frac{x^2+2}{x}} = e^{-3}$$

Ejercicio 3. ESTUDIO DE CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD.

3.1. Calcula a y b para que $f(x) = \begin{cases} -x^2 + bx & \text{si } x \leq 2 \\ -x + c & \text{si } x > 2 \end{cases}$ sea continua y derivable en $x=2$.
 $b = 3, c = 4$

3.2. Calcula a y b para que $f(x) = \begin{cases} a + \ln x & \text{si } 0 < x \leq e \\ bx & \text{si } x > e \end{cases}$ sea continua y derivable en $(0, +\infty)$.
 $a = 0, b = \frac{1}{e}$

3.3. Calcula a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + bx + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 - 5x + 2a & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3a - 5 = b \\ 2a - 3 = b \end{cases} \quad \text{sols : } a = 2, b = 1$$

3.4. Calcula a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + 3 = b \\ 4a - 1 = -b \end{cases} \quad \text{sols : } a = 2, b = -7$$

3.5. Calcula a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \quad \text{sols : } a = 1, b = 0$$

3.6. Calcula a para que $f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 0 \\ 1 + xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea continua en $x=0$ y estudiar la derivabilidad.
 $a = 1$, no derivable

Ejercicio 4. RECTA TANGENTE Y NORMAL.

4.1. Dada la parábola $y = 4 - x^2$, representa la parábola y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$

$$y = -2x + 5$$

4.2. Dibuja la gráfica de la parábola $y = \frac{x^2}{2} + 1$ y su recta normal en el punto de abscisa $x = 1$. (Nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad).

$$y = -x + \frac{3}{2}$$

4.3. Dada la función $f(x) = \frac{2x}{x-1}$:

$$\text{b) } y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

a) Calcula los puntos, en el que las tangentes a la función son paralelas a la recta de ecuación: $r : x + 2y - 4 = 0$

$$(3,3), (-1,1)$$

b) Obtén las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.

4.4. Dada la función $f(x) = \frac{2x}{x-1}$:

$$\text{b) } y = -2x + 8 \text{ e } y = -2x$$

a) Calcula los puntos, en el que las tangentes a la función son paralelas a la recta de ecuación: $r : 2x + y = 0$

$$(2,4), (0,0)$$

b) Obtén las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.

4.5. Dada la función $f(x) = x^2 + 5x - 6$, calcula el punto en el que la tangente a la función es paralela a la recta de ecuación: $r : 2x - 2y - 5 = 0$ y obtén esa tangente.

$$(2,0) \text{ e } y = x - 2$$

4.6. Calcula la recta tangente a la función $y = \sqrt{2x-1}$ en el punto en que dicha recta sea paralela a recta $y = \frac{1}{3}x - 2$.

$$(5,3) \text{ y } y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

4.7. Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ en su punto de inflexión.

$$(-1,1) \text{ e } y = -3x - 2$$

4.8. Calcula la recta tangente y normal a la función $y = \ln(x+2)$ en el punto en que dicha recta sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

$$(-1,0) \text{ e } y = x + 1; y = -x - 1$$

4.9. Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$ en el punto en el que sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

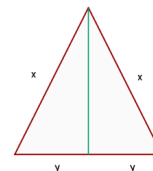
$$(0,1) \text{ e } y = x + 1$$

4.10. Dada la función $f(x) = 2 \cos(x) + |x-1|$, calcula $f'(0)$, y obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.

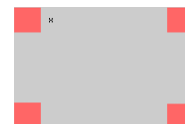
$$f'(0) = -1 \quad (\pi, \pi-3) \text{ y } y = x - 3$$

Ejercicio 5. OPTIMIZACIÓN

5.1. De todos los triángulos isósceles de 12 m de perímetro, hallar los lados del que tome área máxima. (4m de lado)



5.2. Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones un cuadrado de lado 80 m x 50 m, y doblando convenientemente (véase figura), se construye una caja. Calcular x para que el volumen de dicha caja sea máximo. (x=10)



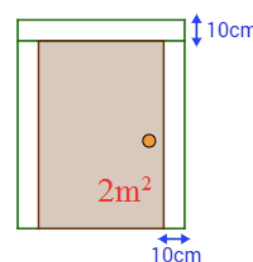
5.3. Una hoja de papel debe tener 18 cm² de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtener razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie del papel. (x=5)

5.4. Descomponer el número 44 en dos sumandos tales que el quintuplo del cuadrado del primero menos el séxtuplo del cuadrado del segundo sea un mínimo. (24 y 20)

5.4. Un alambre de 170 cm de longitud se divide en dos partes. Con una, se quiere formar un cuadrado y con la otra un rectángulo de forma que la base mida el doble que la altura. Calcula las longitudes de las partes en las que se tiene que dividir el alambre para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima. (80C 90R)

5.5. Una empresa de fabricación de puertas de madera utiliza un tablón rectangular para la hoja y tres listones de 10cm de ancho para el marco (lados laterales y lado superior). El precio del tablón es de 128 € por metro cuadrado y el de los listones es de 87 € por metro lineal.

Calcular las dimensiones de una puerta de 2 m² de superficie de hoja para que el coste sea mínimo. ¿Cuál será su precio? (2 m ancho x 1 m largo)



5.6. Considera la función $f(x) = 3 - x^2$ y un punto de su gráfica, M, situado en el primer cuadrante ($x \geq 0$, $y \geq 0$). Si por el punto M se trazan paralelas a los ejes de coordenadas, su intersección con OX y OY determina dos puntos, A y B, respectivamente.

a) Haz una gráfica de los elementos del problema.

b) Halla las coordenadas del punto M que hace que el rectángulo OAMB tenga área máxima. (1,2)

5.7. Se desea construir una caja con forma de paralelepípedo rectangular de 9 litros de volumen y tal que un lado de la base sea doble que el otro. Determinar las longitudes de sus lados para que el área total de sus 6 caras sea mínima.

- Obtén la función $S(x)$ (superficie total de la caja en función del lado menor de la base).
- Obtén el valor mínimo de la función $S(x)$
- Indica las dimensiones que minimizan el coste de construcción de la caja.)
- Indica cuál será la superficie de la caja con esas dimensiones.

$$S(x) = 4x^2 + \frac{27}{x} \implies S'(x) = 8x - \frac{27}{x^2}, \quad x = 3/2 = 1'5 \text{ dm}, \quad 1'5 \times 3 \times 2 \text{ dm}, \quad 27 \text{ dm}^2$$

5.8. Se quiere construir un depósito de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13,5 m³, sin cubierta superior. El material será una chapa de grosor uniforme. El objetivo es calcular las dimensiones del depósito para que el gasto sea el menor posible.

- Obtén la función $S(x)$ (superficie de chapa necesaria para la construcción del depósito en función del lado de la base).
- Obtén los máximos o mínimos necesarios de la función $S(x)$.
- Calcula las dimensiones que minimizan el coste de construcción del depósito.
- Calcula el precio del depósito si la chapa cuesta 15 €/m².

$$S(x) = x^2 + \frac{54}{x} \implies S'(x) = 2x - \frac{54}{x^2}, \quad 3 \times 3 \times 1'5 \text{ m} \implies 27 \text{ m}^2, \quad 405 \text{ €}$$

5.9. Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m² de superficie de modo que sea lo más barato posible. Los tramos horizontales del marco cuestan 2,5 €/m y los tramos verticales 3 €/m.

- Obtén la función $C(x)$ (coste del marco en función de la longitud de la base).
- Obtén el valor mínimo de la función $C(x)$
- Indica las dimensiones que minimizan el coste de construcción del marco.
- Indica cuál será el coste del marco con esas dimensiones.

$$C(x) = 5x + \frac{36}{x} \implies S'(x) = 5 - \frac{36}{x^2}, \quad \frac{6\sqrt{5}}{5}x\sqrt{5} = 2'68 \times 2'24 \text{ m}, \quad 12\sqrt{5} = 26,83 \text{ €}$$

Ejercicio 6. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

6.1. Realiza una representación gráfica de la siguiente función estudiando las características básicas necesarias que se indican en el resumen de puntuación:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

(reparto de puntuación: dominio/continuidad (0,25), simetría (0,5), periodicidad (0,25) puntos de corte (0,5), asíntotas (0,75), monotonía, máximos y mínimos (0,75), representación gráfica 0,75)



6.2. Realiza una representación gráfica de la siguiente función estudiando las características básicas necesarias que se indican en el resumen de puntuación:

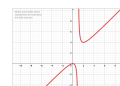
$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

(reparto de puntuación: dominio, simetría y puntos de corte (0,2), asíntotas (0,35), monotonía, máximos y mínimos (0,35), representación gráfica 0,35)



6.3. Realiza una representación gráfica de la siguiente función estudiando las características básicas necesarias que se indican en el resumen de puntuación:

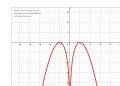
$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$



(reparto de puntuación: dominio/continuidad (0,25), simetría (0,5), periodicidad (0,25) puntos de corte (0,5), asíntotas (0,75), monotonía, máximos y mínimos (0,75), representación gráfica (0,75))

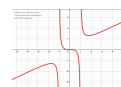
6.4 Realiza una representación gráfica de la siguiente función estudiando las características básicas necesarias que se indican en el resumen de puntuación:

$$f(x) = 1 - x^2 + \ln x^2$$

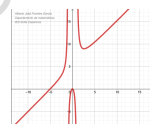


(reparto de puntuación: dominio/continuidad (0,25), simetría (0,5), periodicidad (0,25) puntos de corte (0,25), asíntotas (0,75), monotonía, máximos y mínimos (0,5), curvatura/puntos de inflexión (0,5), representación gráfica (0,75))

6.5. Dibuja la gráfica de $f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 2}$ estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos.



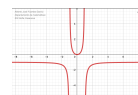
6.6. Halla la asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1}$



6.7. Representa gráficamente la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$ calculando dominio, simetría, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, curvatura y puntos de inflexión.



6.8. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$ calculando dominio, simetría, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos.



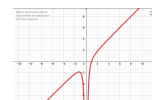
6.9. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{-2x^3 - 1}{x^2}$ calculando dominio, asíntotas, puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, curvatura y puntos de inflexión.



6.10. Representa gráficamente la función $f(x) = x + e^{-x}$ calculando dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, curvatura y puntos de inflexión.



6.11. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$ calculando dominio, asíntotas, puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, curvatura y puntos de inflexión.



6.12. Dibuja la gráfica de $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$ estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos e mínimos relativos.

