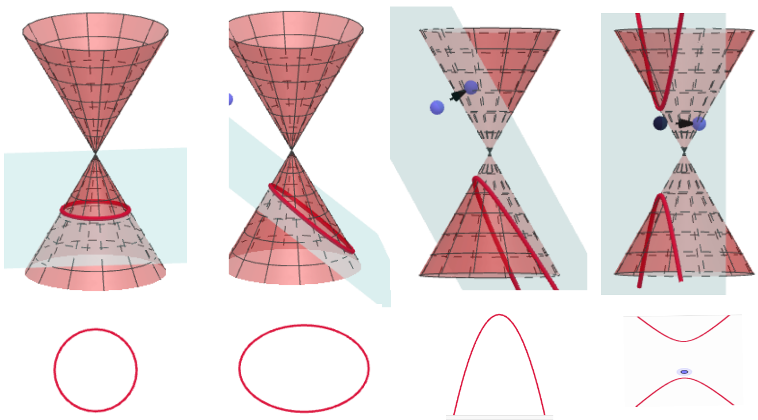
3. Cónicas.

Las cónicas son las curvas que se obtienen al cortar un cono con un plano presentado en distintas inclinaciones: **circunferencia**, **elipse**, **parábola** e **hipérbola.** Más allá de su atractivo geométrico, son esenciales porque explican fenómenos en campos muy diversos: órbitas planetarias, diseño de antenas parabólicas y arcos elípticos… Conocer sus propiedades y ecuaciones nos permite entender mejor la relación entre la geometría y el mundo real, donde estas curvas aparecen de forma natural y recurrente.

CÓNICAS POR EXCENTRICIDAD



SECCIONES CÓNICAS: CIRCUNFERENCIA, ELIPSE, PARÁBOLA E HIPÉRBOLA. FUENTE: ÁLGEBRA LINEAL II. LUIS FUENTES. UDC.

3.1. Introducción histórica a las cónicas y aplicaciones

De nuevo, es en la Grecia clásica en donde encontramos las primeras referencias a las cónicas. **Apolonio de Perga** (s. III a.C.) fue quien realizó la obra más influyente: en su tratado “Las Cónicas” se nombran por primera vez la parábola, la hipérbola y la elipse, y se analizan sus propiedades. De ahí procede la denominación “secciones cónicas”.

Con el desarrollo de la geometría analítica de **Descartes** (s. XVII), se avanza en el estudio de las ecuaciones de las cónicas y sus fundamentos algebraicos. Desde entonces, son numerosos los campos en los que se utilizan:

- **Astronomía: Johannes Kepler** (s. XVII) descubrió que la trayectoria de los planetas es una elipse con el Sol en uno de sus focos. Posteriormente, se comprobó que los cometas siguen trayectorias elípticas, parabólicas o hiperbólicas.

ÓRBITAS DE LOS PLANETAS

- **Ingeniería y arquitectura**: muchas estructuras se diseñan usando cónicas por sus propiedades, que proporcionan muchas ventajas técnicas (estructurales y de construcción). Algunos ejemplos que pueden resultar familiares son el puente colgante de San Francisco (Golden Gate) o las torres de enfriamiento de centrales térmicas (por ejemplo, la de As Pontes).

GOLDEN GATE | *TORRES ENFRIAMIENTO*

- **Propiedades derivadas de la reflexión en cónicas. Telecomunicaciones**: las antenas parabólicas concentran o emiten señales dirigiéndolas hacia un foco, aprovechando las propiedades reflectoras de las cónicas. **Generación de calor**: el mismo principio se usa para cocinas parabólicas o encendedores solares de supervivencia, también se especula con la posibilidad de que Arquímedes quemara barcos romanos enemigos con espejos que concentraban la energía solar. **Óptica, iluminación y medicina:** espejos y focos elípticos y parabólicos, como pueden ser los sistemas que usan dentistas y cirujanos, automoción, faros…

REFLEXIÓN CÓNICAS PAULO.GAL | *VÍDEO: COCINA SOLAR* | *VÍDEO: BILLAR ELÍPTICO* | *VÍDEO: CANASTA QUE SIEMPRE ENCESTA*

- **Física y trayectorias:** los movimientos de proyectiles (en ausencia de resistencia del aire y bajo la acción de la gravedad) se describen con parábolas (como el arco que describe el agua en una fuente). Las aplicaciones van mucho más allá y las encontramos en muchos posibles campos: estudio de ondas, radiación, aeronáutica…

FUENTE PARABÓLICA | *TIRO PARABÓLICO EN BALONCESTO* | *CÓNICAS EN GEOGEBRA. NAVARRA.* | *CÓNICAS. PAULO.GAL*

3.2. Circunferencia (puntos que equidistan del centro).

Definición. Lugar geométrico de los puntos ($P(x, y)$) del plano cuya distancia (r,radio) a un punto fijo (centro (a, b)) es constante.

Ecuación reducida. dist$\big(P, (a, b)\big) = r \implies \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \implies$

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Ecuación general (desarrollada).

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2 \implies x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$$\boxed{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}$$

Donde $A = -2a, \quad B = -2b, \quad C = a^2 + b^2 - r^2$.

Así, se puede calcular el centro y el radio mediante las expresiones:

$$a = -\frac{A}{2}, \quad b = -\frac{B}{2}, \quad r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}.$$

Pero es más recomendable el método de completar cuadrados (igualdades notables):

Identificar: Los coeficientes de x^2 e y^2 deben ser iguales, si es el caso, factor común.

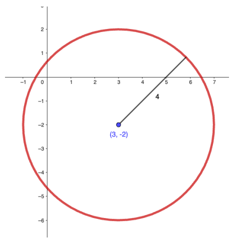
Paso de general a reducida (obtención de centro y radio) **completando cuadrados**

Ejemplo 3.2.1. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$, obtener centro, radio y ecuación reducida.

$(x^2 - 6x + \ldots) + (y^2 + 4y + \ldots) - 3 = 0 \implies$

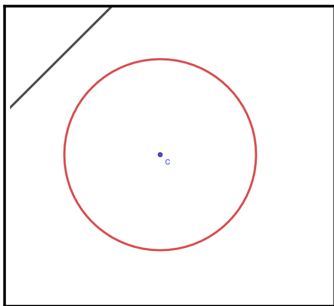
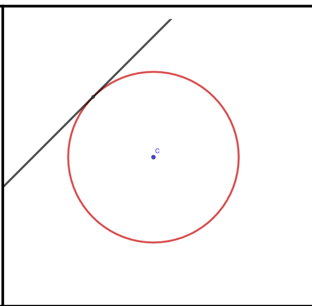
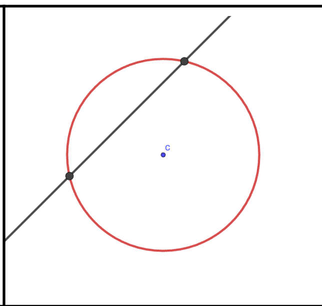
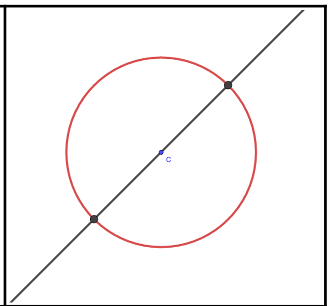
$\implies (x^2 - 6x + \mathbf{9}) + (y^2 + 4y + \mathbf{4}) - 3 - \mathbf{9} - \mathbf{4} = 0 \implies$

$\implies (x - \mathbf{3})^2 + (y + \mathbf{2})^2 = \mathbf{16} \begin{cases} \text{centro: } (3, -2) \\ \text{radio } r = 4 \end{cases}$



Posiciones relativas de recta y circunferencia

Para estudiar la posición relativa entre una recta y una circunferencia se puede medir la distancia del centro C a la recta r y compararla con el radio R. Si también queremos saber los puntos de corte en el caso de que sean secantes, se resuelve el sistema de ecuaciones no lineal formado por las ecuaciones de la recta y de la circunferencia.

			
EXTERIORES	**TANGENTES**	**SECANTES**	**SECANTE POR EL CENTRO**
Sin punto de corte	Un punto de corte	Dos puntos de corte	Dos puntos de corte, centro en la recta
Sistema sin solución (incompatible)	Solución única	Dos soluciones	Dos soluciones
Distancia al centro mayor que el radio dist$(C, r) > R$	Distancia al centro igual al radio dist$(C, r) = R$	Distancia al centro menor que el radio dist$(C, r) < R$	Distancia al centro nula dist$(C, r) = 0$

Ejemplo 3.2.2. Estudia la posición relativa de la recta $s : y = x$ respecto la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

Completamos cuadrados: $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 16 \Longrightarrow \begin{cases} centro\ (4, -1) \\ radio\ 4 \end{cases}$

Con $\begin{cases} C(-4{,}1) \\ s : x - y = 0 \end{cases}$ **estudiamos dist(C, s):**

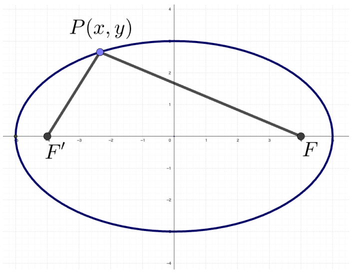
$$\text{dist}(C, s) = \frac{|1 \cdot (-4) - 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3{,}5 < 4 \Longrightarrow \textbf{SECANTES}$$

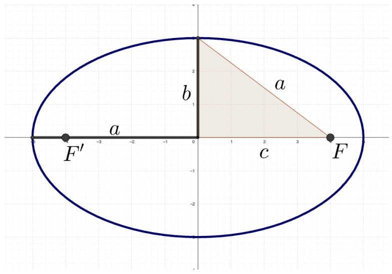
Puntos de corte: Resolver $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0 \\ y = x \end{cases}$. Por sustitiución:

$$x^2 + x^2 - 8x + 2x + 1 = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 6x + 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} (2{,}82\ ,\ 2{,}82) \\ (0{,}48\ ,\ 0{,}48) \end{cases}$$

3.3. Elipse. Suma de distancias a dos focos, fija.

Definición. Lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (focos F y F') es constante e igual a eje mayor $(2a)$

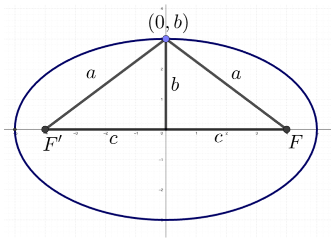




dist(P, F) + *dist*$(P, F') = 2a$

Elementos de una elipse. Consideremos una elipse con centro en el origen $O(0,0)$

- a: semieje mayor. • b: semieje menor.
- c: distancia centro-foco (semidistancia focal)
- Si a > b, la elipse tiene orientación "horizontal".
- Si b > a, orientación "vertical". (Si a=b, circunferencia)



Focos y vértices (para la elipse horizontal con centro $O(0,0)$):

- Focos: $F'(-c,0) \quad F(c,0)$.
- Vértices del eje mayor:$(a,0) \qquad (-a,0)$.
- Vértices del eje menor: $(0,b) \qquad (0, -b)$.

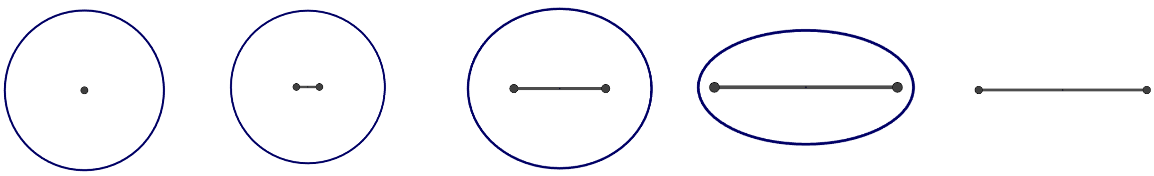
Se cumple $a^2 = b^2 + c^2$ (basta situarse en (0,b), las distancia a los focos es 2a, y aplicamos Pitágoras en uno de los triángulos rectángulos de hipotenusa a)

Excentricidad:

$$e = \frac{c}{a}, \quad 0 \leq e < 1$$

[EXCENTRICIDAD ELIPSE]

Es una medida de la deformación de la elipse desde la circunferencia hasta un segmento:



$e = 0$ CIRFUNFERENCIA

$e \approx 0$ ELIPSE PRÓXIMA A CIRCUNFERENCIA

$e \approx 0{,}5$ ELIPSE DE EXCENTRICIDAD MEDIA

$e \approx 0{,}9$ ELIPSE MUY EXCÉNTRICA (ALARGADA)

$e = 1$ ELIPSE DEGENERADA A SEGMENTO

Ecuación reducida. Elipse con centro en el origen $O(0,0)$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

DEMOSTRACIÓN: (no es necesario saberla, pero a nivel formativo conviene entenderla)

dist(P,F) + dist$(P,F')=2a \Longrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a\Longrightarrow$

$\Longrightarrow\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\Longrightarrow$ (elevando al cuadrado)

$\Longrightarrow(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2\Longrightarrow$ (desarrollo)

$\Longrightarrow\cancel{x^2}-2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}\Longrightarrow$

$\Longrightarrow-4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\Longrightarrow$ (dividimos :(-4))

$\Longrightarrow cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \Longrightarrow$ (elevando al cuadrado)

$\Longrightarrow(cx+a^2)^2=a^2\left((x+c)^2+y^2\right) \quad \Longrightarrow$ (desarrollando)

$\Longrightarrow c^2x^2+\cancel{2a^2cx}+a^4=a^2x^2+\cancel{2a^2cx}+a^2c^2+a^2y^2\Longrightarrow$(reagrupando)

$\Longrightarrow a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2 \quad \Longrightarrow$ (factor común)

$\Longrightarrow(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)\Longrightarrow$ (sustituyendo $a^2-c^2=b^2$)

$\Longrightarrow b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad \Longrightarrow$ (dividiendo por a^2b^2)

$$\Longrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ **C.Q.D.**

Ecuación reducida. Elipse con centro en el origen $C(x_0,y_0)$ (traslación)

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

NOTA: Una elipse se orienta verticalmente cuando a y b intercambian papeles (semieje mayor bajo x y semieje menor bajo y). Todo se razona análogamente.

Ejemplo 3.3.1. Haz el estudio de la elipse $x^2 + 4y^2 - 8y = 0$, identificando todos sus elementos característicos.

ECUACIÓN REDUCIDA: Sacamos factor común a y, y completamos cuadrados:

$$x^2 + 4(y^2 - 2y + \ldots)\ldots = 0 \implies x^2 + 4(y^2 - 2y + 1) - 4 = 0 \implies$$

Dividimos entre 4 la ecuación: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{1} = 1$

Comparando con la ecuación reducida, identificamos: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

· Centro $(0,1)$

· Semieje mayor $a^2 = 4 \to a = 2$ · Semieje menor $b^2 = 1 \to b = 1$

· Semidistancia focal: $c^2 = a^2 - b^2 = 2^2 - 1 = 3 \implies c = \sqrt{3}$

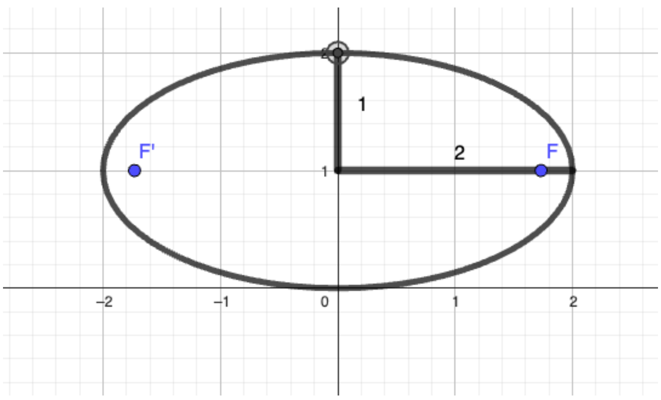
· Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ (elipse excéntrica “alargada” $e \approx 1$)

· Focos (desde el centro, nos movemos c a la izquierda y a la derecha)

$F(\sqrt{3},1)$ $F'(-\sqrt{3},1)$

· Vértices: (desde el centro, nos movemos el semieje mayor en horizontal, el menor en vertical…): $(-2,1)$, $(2,1)$, $(0,0)$, $(0,2)$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA



Identificar ecuación general (desarrollada): $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

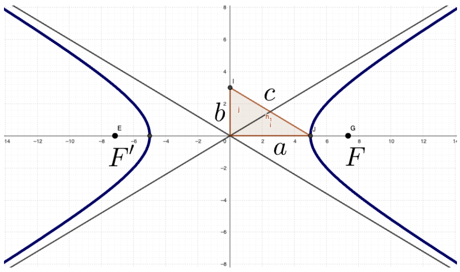
($A \neq B$, A y B mismo signo)

3.3. Hipérbola

Definición. Lugar geométrico de los puntos donde la diferencia de distancias a los dos focos es constante. $\left| d(P, F_1) - d(P, F_2) \right| = 2a$

Ecuación reducida (centro en el origen):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Ecuación reducida (centro en $P(x_0, y_0)$):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Elementos de una hipérbola centrada en $O(0,0)$:

- a: semieje. • b: (ver dibujo). • k=2a: constante
- c: distancia centro-foco (semidistancia focal)
- $r : \frac{b}{a}x$ y $r' : -\frac{b}{a}x$ asíntotas
- Focos: $F'(-c,0)$ $F(c,0)$.

EXCENTRICIDAD HIPÉRBOLA

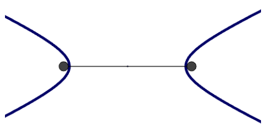
EXCENTRICIDAD COMBINADA

Se cumple $c^2 = a^2 + b^2$ (c hace de hipotenusa, en la elipse era a)

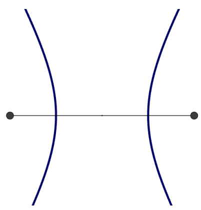
- Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}, \quad e > 1$

Es una medida de la deformación de la hipérbola (se va abriendo al aumentar):

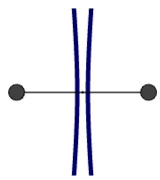
$e = 1$
CERRADA A SEGMENTO



$e \approx 1$
HIPÉRBOLA CERRADA (ASÍONTOTAS DE PENDIENTE PEQUEÑA)



e *MEDIA SE ABRE (LAS ASÍNTOTAS ABREN LA PENDIENTE)*



e *ALTA ABIERTA ACERCÁNDOSE A MEDIATRIZ (ASÍNTOTAS CASI VERTICALES)*

Identificar ecuación general (desarrollada): $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$

(A y B distinto signo)

3.4. Parábola

Definición. Lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto llamado foco (F) y una recta llamada directriz (d) d:

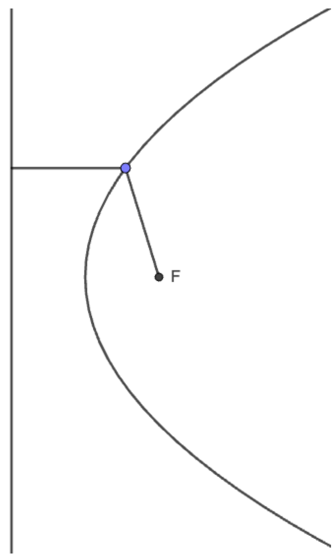
$dist(P,F) = dist(P,d)$

Elementos:

Vértice V(0,0) Foco $F(\frac{p}{2},0)$

Directriz $d : x = -\frac{p}{2}$

p: distancia del foco a la dire



Ecuación reducida (vértice en el origen): $y^2 = 2px$

DEMOSTRACIÓN: Usamos $dist(P,F) = dist(P,d)$:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \Rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{\frac{p^2}{4}} - px + y^2 = \cancel{x^2} + \cancel{\frac{p^2}{4}} + px \Rightarrow y^2 = 2px$$

Ecuación reducida (centro en $P(x_0, y_0)$): $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

Identificar ecuación general (desarrollada):

$$Ax^2 + Cx + Dy + E = 0 \qquad \text{o} \qquad By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

(solo un término al cuadrado)