Ejercicio 1. PUNTOS ALINEADOS, PUNTO MEDIO, PUNTO SIMÉTRICO…

1.1. Averigua si están alineados los puntos $P(7,11)$, $Q(4,-3)$ y $R(10,25)$.
Sol: están alineados.

1.2. Calcula el valor de k para que los puntos de coordenadas $A(1,7)$, $B(-3,4)$, $C(k,5)$ estén alineados. Sol: $k=-\frac{5}{3}$

1.3. Dados los puntos $P(3,9)$ y $Q(8,-1)$:

a) Halla el punto medio de $\overline{PQ}$. Sol: $M=\left(\frac{11}{2},4\right)$

b) Halla el simétrico de P respecto de Q. Sol: $P'(13,-11)$

c) Halla el simétrico de Q respecto de P . Sol: $Q'(-2,19)$

d) Obtén un punto A de $\overline{PQ}$ tal que $\overline{PA}/\overline{AQ}=\frac{2}{3}$. Sol: $A(5,5)$

e) Obtén un punto B de $\overline{PQ}$ tal que $\overline{PB}/\overline{PQ}=\frac{1}{5}$. Sol: $B(4,7)$

1.4. Halla el punto simétrico de $P(1,-2)$ respecto del punto $H(3,0)$. Sol: $P'(5,2)$

1.5.. Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $A(1,2)$, $B(5,-1)$, $C(6,3)$. Represéntalo gráficamente. Sol: $D(2,6)$

1.6. Determina k para que los puntos $A(-3,5)$, $B(2,1)$ y $C(6,k)$ estén alineados.
Sol: $k=-\frac{11}{5}$

1.7. Determina los puntos que dividen al segmento AB, A(–2, 1), B(5, 4), en tres partes iguales. Sol: $P(1/3,2)$ $Q(8/3,3)$

1.8. Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo. Compruébalo con el cuadrilátero de vértices: $A(3,8)$ $B(5,2)$ $C(1,0)$ $D(-1,6)$
Sol: $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}(-1,4)$ $\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{RQ}=(-3,2)$

Ejercicio 2. ECUACIONES DE LA RECTA Y OBTENCIÓN DE RECTAS

2.1. Dados los siguientes datos a partir de los cuales se puede obtener una recta, obtén, en cada caso, las ecuaciones paramétricas, continua, punto pendiente, explícita e implícita (o general). Indica también la pendiente, un vector de dirección, un vector perpendicular, la ordenada en el origen y un punto adicional.

a) $\begin{cases} \text{punto } A(-3,7) \\ \text{dirección } \perp \overrightarrow{d_\perp}(7,4) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{punto } A(-3,7) \\ \text{dirección } \vec{d}(2,2) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{punto } P(5,-2) \\ \text{punto } Q(0,4) \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{punto } M(3,7) \\ \text{punto } Q(3,0) \end{cases}$

e) $\begin{cases} \text{punto } A(0,0) \\ \text{punto } B(7,0) \end{cases}$

f) $\begin{cases} \text{punto } R(1,1) \\ \text{punto } S(3,3) \end{cases}$

g) $\begin{cases} \text{pendiente } 3 \\ \text{ordenada en el origen } -5 \end{cases}$

sols

r	$\vec{v}$	$\overrightarrow{v_\perp}$	Paramétricas	Continua	Punto-Pendiente	Explícita	Implícita	m pte	η ord orig	Punto
(a)	(4, -7)	(7, 4)	x = -3 + 4t; y = 7 - 7t	(x+3)/4 = (y-7)/-7	y - 7 = (-7/4)(x + 3)	y = (-7/4)x + 7/4	7x + 4y - 7 = 0	-7/4	7/4	(1, 0)
(b)	(2, 2)-> (1,1)	(2, -2)	x = -3 + 2t; y = 7 + 2t	(x+3)/2 = (y-7)/2	y - 7 = 1·(x + 3)	y = x + 10	x - y + 10 = 0	1	10	(-1, 9)
(c)	(-5, 6)	(6, 5)	x = 5 - 5t; y = -2 + 6t	(x-5)/-5 = (y+2)/6	y + 2 = (-6/5)(x - 5)	y = (-6/5)x + 4	6x + 5y - 20 = 0	-6/5	4	(0, 4)
(d)	(0, -7)-> (0,1)	(1, 0)	x = 3; y = 7 - 7t	(x-3)/0 = (y-7)/-7 *	(no aplica; recta vertical)	(no aplica; x=3)	x - 3 = 0	∞	(no existe)	(-3,2)
(e)	(7, 0)-> (1,0)	(0, 1)	x = t; y = 0	(no continua común)*	y - 0 = 0·(x - 0)	y = 0	y = 0	0	0	(3, 0)
(f)	(2, 2)	(2, -2)	x = 1 + 2t; y = 1 + 2t	(x-1)/2 = (y-1)/2	y - 1 = 1·(x - 1)	y = x	x - y = 0	1	0	(2,2)
(g)	(1, 3)	(3, -1)	x = t; y = -5 + 3t	x/1 = (y+5)/3	y + 5 = 3(x - 0)	y = 3x - 5	3x - y - 5 = 0	3	-5	(1, -2)

2.2. Dadas las rectas $r_a : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$ y $r_b : \begin{cases} x = 1 - 4s \\ y = 4 + 3s \end{cases}$, obtén paramétrica e implícita de la recta:

a) paralela a r_a que pase por el punto $(5,7)$

Sol: $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases} \equiv x + 2y - 19 = 0$

b) perpendicular a r_b que pase por el punto $(0,0)$

Sol: $\begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \end{cases} \equiv 4x - 3y = 0$

2.3. Dadas las siguientes rectas dadas mediante una de sus ecuaciones, obtén, en cada caso, las ecuaciones paramétricas, continua, punto pendiente, explícita e implícita (o general). Indica también la pendiente, un vector de dirección, un vector perpendicular y la ordenada en el origen.

a) $5x - 3y + 8 = 0$

b) $\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

c) $y = 3x - 4$

d) $2x - y = 0$

e) $x - 7 = 0$

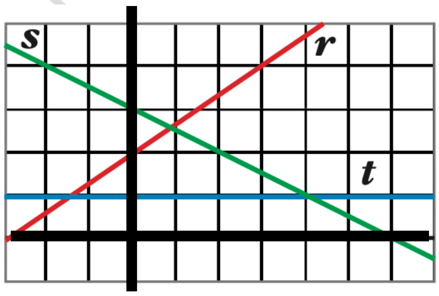
f) $3y - 6 = 0$

g) $x + 3y = 0$

sols-1

r	Paramétrica	Continua	Punto-pendiente	Explícita	Implícita	$\vec{v}$	$\overrightarrow{v_\perp}$	m	N
a	x = t; y = (5/3)t + 8/3	(x - 0)/3 = (y - 8/3)/5	y - 8/3 = (5/3)(x - 0)	y = (5/3)x + 8/3	5x - 3y + 8 = 0	(3,5)	(5,-3)	5/3	8/3
b	x = 5 - 3t; y = -1 + 2t	(x - 5)/-3 = (y + 1)/2	y + 1 = (-2/3)(x - 5)	y = (-2/3)x + 7/3	2x + 3y - 7 = 0	(-3,2)	(2,3)	-2/3	7/3
c	x = t; y = 3t - 4	(x - 0)/1 = (y + 4)/3	y + 4 = 3(x - 0)	y = 3x - 4	3x - y - 4 = 0	(1,3)	(3,-1)	3	-4
d	x = t; y = 2t	(x - 0)/1 = (y - 0)/2	y - 0 = 2(x - 0)	y = 2x	2x - y = 0	(1,2)	(2,-1)	2	0
e	x = 7; y = t	(no continua válida)	(no aplica, recta vertical)	(no aplica, recta vertical)	x - 7 = 0	(-0,1)	(1,0)	∞	-
f	x = t; y = 2	(no continua válida)	y - 2 = 0·(x - 0)	y = 2	3y - 6 = 0	(-1,0)	(-0,1)	0	2
g	x = t; y = -t/3	(x - 0)/3 = (y - 0)/-1	y - 0 = (-1/3)(x - 0)	y = (-1/3)x	x + 3y = 0	(3,-1)	(1,3)	-1/3	0

2.4. Escribe las ecuaciones explícitas de las rectas representadas en la gráfica:



Sols:

$r: y = \frac{2}{3}x + 2$

$s: y = \frac{-1}{2}x + 3$

$t: y = 1$

2.5. Halla la ecuación de la paralela a $r: 2x - 3y = 0$ cuya ordenada en el origen es -2.
NOTA: (cuando no se indica, en geometría, se utiliza la forma general o implícita)

Sol: 2x– 3y– 6 = 0

2.6. Dada la recta $4x + 3y - 6 = 0$, escribe la ecuación de la recta perpendicular a ella en el punto de corte con el eje de ordenadas.   *Sol:* $3x - 4y + 8 = 0$

2.7. Halla k para que $S(-5,k)$ pertenezca a r: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$ *Sol:* $k = 10$

Ejercicio 3. POSICIONES RELATIVAS, DISTANCIAS Y ÁNGULOS

3.1. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas.
Si son secantes, calcula su punto de corte y el ángulo que forman (puedes calcular el ángulo que forman sus vectores normales).
Si son paralelas, calcula su distancia (obtén un punto de una de ellas dando valores)

a) $\begin{cases} 3x + 5y - 8 = 0 \\ 6x + 10y + 4 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 3y + 4 = 0 \\ 3x - 9y - 12 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + y + 3 = 0 \\ x - 2y + 16 = 0 \end{cases}$

Sol: a) paralelas $dist = \frac{10}{\sqrt{34}}$ b) secantes (4/3, 4/3) $\theta \approx 71.565°$

c) coincidentes d) secantes en (-2,7) $\theta \approx \arccos(3/\sqrt{130}) \approx 73.739°$

3.2. Justifica, razonando con los vectores directores, que las siguientes rectas son secantes, y calcula su punto de corte sustituyendo la paramétrica en la implícita o explícita y calculando el valor del parámetro:

a) $r_1 : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$ $r_2 : y = -3x + 9$

b) $r_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$ $r_2 : -2x + 3y - 1 = 0$

Sol: a) $t = 2 \implies (2,3)$ *b)* $t = -1 \implies (1,1)$

3.3. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas.
Si son secantes, calcula su punto de corte y el ángulo que forman (hazlo sin cambiar a otra ecuación de la recta, trabaja en paramétricas, igualando y calculando t y s).
Si son paralelas, calcula su distancia (para la distancia, pasa a implícita).

a) $r_a : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$ $r_b : \begin{cases} x = 1 - 4s \\ y = 4 + 3s \end{cases}$ b) $r_1 : \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$ $r_2 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 - 2s \end{cases}$

c) $r_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ $r_3 : \begin{cases} x = 5 + 3s \\ y = -5 - 6s \end{cases}$ d) $r_3 : \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -5 - 6t \end{cases}$ $r_4 : \begin{cases} x = 5 - 2s \\ y = -12 + 4s \end{cases}$

Sols: a) secantes, $\cap (-15,16)$, $\alpha = 10°18'17''4$

b) secantes, $\cap (2,1)$, $\alpha = 32°28'16''29$

c) coincidentes d) paralelas, $dist(r_3, r_4) = \frac{7}{\sqrt{5}}$

3.4. Halla la distancia de $Q(-3,4)$ a las siguientes rectas:

a) $2x + 3y = 4$ b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5}$ c) $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - 6t \end{cases}$ d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

Sols: a) $\frac{3\sqrt{13}}{13} = 0{,}55$ b) $\frac{20\sqrt{29}}{29} = 3{,}71$ c) $\frac{13\sqrt{10}}{10} = 4{,}11$ d) $\frac{7\sqrt{13}}{13} = 1{,}94$

Ejercicio 4. SIMÉTRICO RESPECTO A RECTA. PROBLEMAS DE RECTAS

4.1. Calcula el simétrico de $A(6,3)$ respecto a la recta $r: x + 2y - 2 = 0$. *Sol* $A'(2,-5)$

4.2. Calcula el simétrico de $P(1,1)$ respecto a la recta $x - 2y - 4 = 0$. Sol: $P'(3,-3)$

4.3. Calcula el simétrico del punto $(2,-5)$ respecto a la recta $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+1}{-1}$. Sol: $P'(6,3)$

4.4. Calcula el simétrico de $A(4,-2)$ respecto a la recta $r: \dfrac{x-3}{2} = -y + 1$. Sol: $P'(6,2)$

Para calcular un punto simétrico respecto a una recta:

1º. Construye recta $r_\perp : \begin{cases} punto\ P \\ vector \perp r \end{cases}$

2º. Calcula el corte $M = r \cap r_\perp$

3º. Usa la fórmula del punto medio (M punto medio de P y P')

Puedes comprobar o generar más ejercicios desde aquí: https://shorturl.at/SSLBg

---

4.5. Halla la ecuación explícita de una recta que pase por $A(2,-3)$ y forme un ángulo de 45 grados con la recta de ecuación $r: 3x - y + 3 = 0$.

Sol: (i) $y = -2x + 1$, *(ii)* $y = \frac{1}{2}x - 4$.

NOTA: Para el vector de la recta tenemos dos opciones:

A) Usar el vector $\vec{v}(1,k)$ *y el producto escalar para ángulos para calcular k (igual que en ejercicios anteriores).*

B) Usar la fórmula (que no hemos tratado en los apuntes) $\tan\alpha = \left|\dfrac{m_2 - m_1}{1 - m_2 m_1}\right|$

4.6. Calcula la ecuación continua de una recta perpendicular a $y = 2x + 1$ y pase por el punto $P(2,-1)$. *Sol:* $x + 2y = 0$

4.7. Dadas las rectas: $\begin{cases} r: (x,y) = (2,-1) + t(1,-3), t \in \mathbb{R} \\ s: \text{paralela a la recta: } x + y - 1 = 0 \text{ y pasa por } A(5,2) \end{cases}$

a) Calcula la posición relativa de las dos rectas y el ángulo que forman.

b) Calcula la ecuación de una recta que pase por un punto de la recta $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -t, \end{cases}$ y que forme 45° con la recta s.

Sol: a) secantes (-1,8), $\alpha = 26°56$ $x + 2y = 0$ *b) y=t*

Ejercicio 5. CENTROS TRIÁNGULO, MEDIATRIZ, MEDIANA, ALTURA, BISECTRIZ.

NOTA: La fórmula de Herón permite calcular el área de un triángulo conocidos los lados a, b, c*. El semiperímtetro es* $s = \frac{a+b+c}{2}$*. El área:* $A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$*)*

En todos los ejercicios debes realizar la representación gráfica de cada apartado.

Puedes obtener las soluciones en:

https://shorturl.at/zQsQx

5.1. Dado el triángulo formado por los vértices A(2, 4), B(6, -2), C(-6, -4)
a) Calcula su baricentro. b) Calcula su circuncentro. c) Calcula su ortocentro.
d) Calcula su área utilizando la fórmula usual (base·altura/2). Compruébalo con la fórmula de Herón usando la calculadora.

5.2. Dado el triángulo formado por los vértices A(2, 5), B(–4, –1), C(0, 1)
a) Calcula su baricentro. b) Calcula su circuncentro. c) Calcula su ortocentro.
c) Calcula su área utilizando la fórmula usual (base·altura/2). Compruébalo con la fórmula de Herón usando la calculadora.

5.3. Dado el triángulo formado por los vértices. A(-4, 0), B(–2, 6), C(2, 2)
a) Calcula su baricentro. b) Calcula su circuncentro. c) Calcula su ortocentro.
c) Calcula su área utilizando la fórmula usual (base·altura/2). Compruébalo con la fórmula de Herón usando la calculadora.

5.4. Dado el triángulo formado por los vértices A(-2, 4), B(2, 0), C(2, 2):
a) Calcula su baricentro. b) Calcula su circuncentro. c) Calcula su ortocentro.
d) Calcula el área del triángulo utilizando la fórmula usual (base·altura/2). Compruébalo con la fórmula de Herón usando la calculadora.

5.5. Dado el triángulo formado por los vértices A(–2, 4), B(–4, 0), C(2, 2)
a) Calcula su baricentro. b) Calcula su circuncentro. c) Calcula su ortocentro.
c) Calcula su área utilizando la fórmula usual (base·altura/2). Compruébalo con la fórmula de Herón usando la calculadora.

5.6. Obtén las bisectrices de los pares de rectas: ($dist((x,y), r_1) = dist((x,y), r_2)$)

a) $r: y = 2$ y $s: 3x + 4y + 10 = 0$ Sol: $x + 3y = 0$ $3x - y + 20 = 0$
b) $r: y = 2$ y $s: 4x - 3y + 1 = 0$ Sol: $4x + 2y - 9 = 0$ $4x - 8y + 11 = 0$
c) $r: y = 2$ y $s: 3x - 4y + 14 = 0$ Sol: $3x + y + 4 = 0$ $x - 3y + 8 = 0$
d) $r_1: 2x + y - 8 = 0$ y $r_2: x - 2y + 16 = 0$ Sol: $3x + y - 8 = 0$ $x + 3y + 24 = 0$