2. Geometría analítica.

2.1. Puntos en el plano. Vector de posición. Distancia entre dos puntos.

Asumido el sistema de referencia en la base canónica, tenemos nuestro plano cartesiano, donde cada punto P tiene una coordenada horizontal x_p y una coordenada vertical y_p. Pero este enfoque es limitado, ya que no tenemos ningún tipo de operación definida para puntos, sino para vectores. Esto lo solucionamos a través del llamado vector de posición.

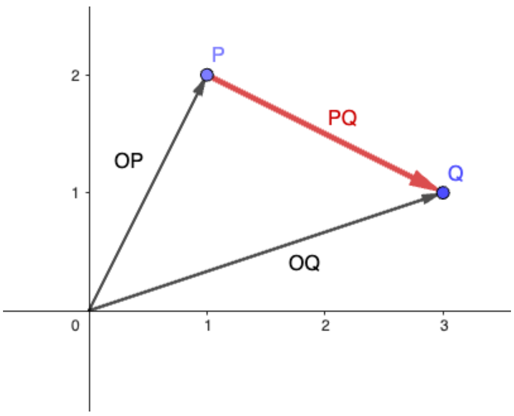
Dado un punto $P(x_p, y_p)$, llamamos **vector de posición asociado a** P al vector $\overrightarrow{OP}$, que une el origen $O(0,0)$ con el punto P. Sus coordenadas son las mismas: $\overrightarrow{OP}(x_p, y_p)$

Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, podemos calcular la distancia con vectores:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$dist(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ (módulo del vector que los une)



2.2. Puntos alineados, punto medio, punto simétrico

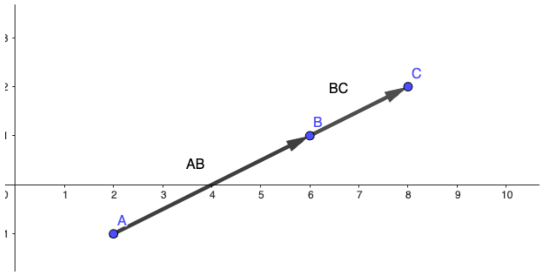
Puntos alineados. Tres puntos están alineados si las **coordenadas** de los vectores que los unen son **proporcionales.**

Nota: Equivale a decir que son linealmente dependientes, se mantienen en una dimensión sin abrir a dos.

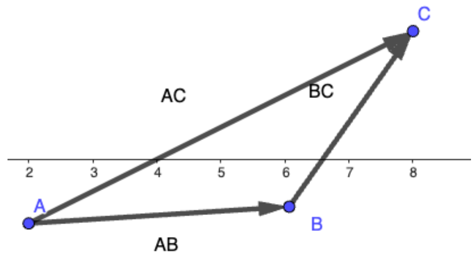
Ejemplo: $A(2,-1),\ B(6,1)\ y\ C(8,2)$ ¿están alineados?

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = B - A = (6-2, 1-(-1)) = (4,2) \\ \overrightarrow{BC} = C - B = (8-6, 2-1) = (2,1) \end{cases} \Longrightarrow \frac{4}{2} = \frac{2}{1}, \text{ sí, se cumple.}$$

Coordenadas proporcionales $\Longrightarrow$ **A, B y C son puntos alineados**



ALINEADOS (EJEMPLO, 1 DIMENSIÓN)
LINEALMENTE DEPENDIENTES



NO ALINEADOS (ABRE 2 DIMENSIONES)
LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Punto medio. Con un sencillo planteamiento vectorial, conseguimos una fórmula cómoda para calcular el punto medio (**media de las coordenadas**)

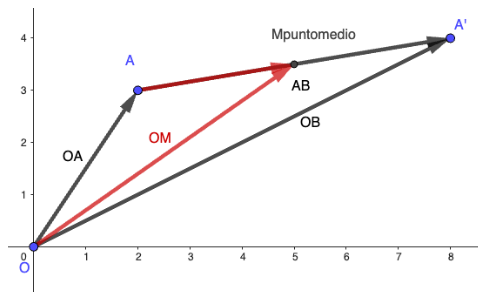
Punto medio: $M(x, y)$ entre $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$. Se cumple que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1) + \frac{1}{2}\big((x_2 - x_1), (y_2 - y_1)\big)$$

Simplificando:

$$\overrightarrow{OM} = \left(x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2}, y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

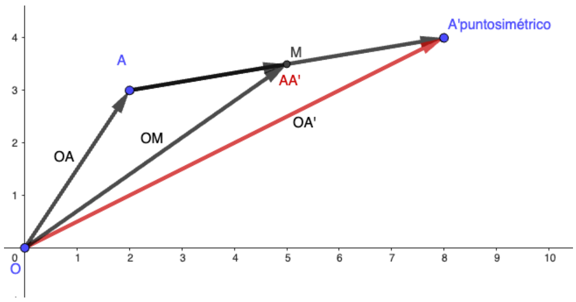


Por lo tanto, la fórmula para el punto medio es:

PUNTO MEDIO: $M(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Punto simétrico. El punto simétrico de $A(x_1, y_1)$ respecto de $M(x_m, y_m)$ es el punto $A'(x, y)$, que cumple que M es punto medio entre A y A'.

Vale la misma fórmula que usamos para el punto medio. Tenemos que despejar en ella las coordenadas x e y del punto A':



PUNTO SIMÉTRICO: $M(x_m, y_m) = \left(\dfrac{x_1 + \mathbf{x}}{2}, \dfrac{y_1 + \mathbf{y}}{2}\right)$ (despejar **x** e **y**).

Ejemplo: Calcular el simétrico de $A(7,4)$ respecto a $P(3, -11)$.

P será el punto medio entre A y su simétrico A'. Con la fórmula:

$P\,(3, -11) = \left(\dfrac{7 + \mathbf{x}}{2}, \dfrac{4 + \mathbf{y}}{2}\right)$. Despejamos **x** e **y**:

Despejamos x: $3 = \dfrac{7 + x}{2} \implies 6 = 7 + x \implies x = -1.$

Despejamos y: $-11 = \dfrac{4 + y}{2} \implies -22 = 4 + y \implies y = -26.$

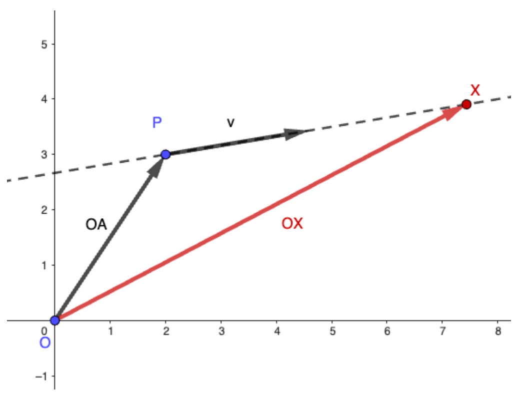
Por lo tanto, el simétrico es: $A'(-1, -26)$.

2.3. Ecuaciones de la recta. RECTA : PUNTO Y VECTOR DIRECTOR.

Partíamos del plano vacío, y hemos logrado resolver problemas métricos con puntos y vectores. Veremos ahora como se consiguen, partiendo de una interpretación vectorial, todas las ecuaciones de la recta.

Toda recta se construye a partir de un punto y una dirección (vector). *Esa asociación es esencial.*

Ecuación vectorial. Dados $\begin{cases} punto\ P(p_1, p_2) \\ vector\ \vec{v}(v_1, v_2) \end{cases}$



Un punto $X(x, y)$ sobre la recta X se obtiene prolongando el vector t veces desde P. Vectorialmente:

ECUACIÓN VECTORIAL $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v},\ t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas. Desde la expresión vectorial, introduciendo coordenadas y operando obtenemos:

$$(x, y) = (p_1, p_2) + t \cdot (v_1, v_2) \implies \begin{cases} x = p_1 + t \cdot v_1 \\ y = p_2 + t \cdot v_2 \end{cases}$$ ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Cada coordenada se obtiene a través del punto, el vector y un parámetro $t \in \mathbb{R}$

Se usará más en segundo de bachillerato, en geometría del espacio.

Ecuación continua. Despejando t e igualando, desaparece el parámetro y queda:

ECUACIÓN CONTINUA $\dfrac{x - p_1}{v_1} = \dfrac{y - p_2}{v_2}$ (*)

Útil para conseguir cualquier otra ecuación si los datos son punto y vector.

Desde la ecuación continua, obtenemos la punto pendiente, la explícita y la implícita:

Ecuación punto pendiente. Pasando v_2 al otro lado queda $y - p_2 = \dfrac{v_2}{v_1}(x - p_1)$

Sustituyendo por la pendiente: $m = \dfrac{v_2}{v_1}$ (detallaremos más adelante), la ecuación queda:

ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE $y - p_2 = m(x - p_1)$

Útil cuando los datos son un punto y la pendiente

Ecuación explícita. Operando para despejar y obtenemos $y = mx \overbrace{-mp_1 + p_2}^{n}$.

ECUACIÓN EXPLÍCITA $y = mx + n$ donde

$$\begin{cases} m \ pendiente \\ n \ ordenada \ en \ el \ origen \ (punto \ (0,n)) \end{cases}$$

Es la más usada en análisis, como función. Permite representación rápida y sencilla.

Ecuación implícita. Desde (*), pasando todo a un lado: $\overbrace{v_2}^{A} x \overbrace{-v_1}^{B} y \overbrace{+p_2v_1 - p_1v_2}^{C} = 0$

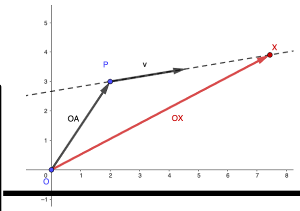
ECUACIÓN IMPLÍCITA: $Ax + By + C = 0$

La más usada en geometría y álgebra. También llamada GENERAL.

ESQUEMA DE LAS ECUACIONES DE LA RECTA (punto y dirección)

Recta r: $\begin{cases} punto\ P(p_1, p_2) \\ vector\ \vec{v}(v_1, v_2) \end{cases}$ **Dirección:** $\begin{cases} vector:\ \vec{v}(v_1, v_2) \equiv (1,m) \equiv (-B, A) \\ \quad o \\ pendiente\ m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{m}{1} = -\frac{A}{B} \end{cases}$

Un punto $X(x, y)$ de la recta, satisface cualquiera de las siguientes ecuaciones:



ECUACIÓN VECTORIAL

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

→

ECUACIONES PARAMÉTRICAS

$$\begin{cases} x = p_1 + t \cdot v_1 \\ y = p_2 + t \cdot v_2 \end{cases}$$

despejar t

ECUACIÓN CONTINUA

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$$

mover v_2

ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE

$$y - p_2 = m(x - p_1)$$

despejar y

ECUACIÓN EXPLÍCITA

$$y = mx + n$$

$$\begin{cases} m\ pendiente \\ n\ ordenada\ en\ el\ origen\ (0,n) \end{cases}$$

todo a un lado

ECUACIÓN GENERAL O IMPLÍCITA

$$Ax + By + C = 0$$

Vector normal: $\overrightarrow{v_\perp}(A, B)$

Vector: $\vec{v}(-B, A) \equiv (B, -A)$

PASO DE UNAS ECUACIONES A OTRAS + COMBINACIONES DE DATOS

Con las siguientes combinaciones de datos podemos obtener las ecuaciones de la recta:

$'' \Rightarrow '' \ Q(p_1 + v_1, p_2 + v_2)$
$'' \Leftarrow '' \ \vec{v}(q_1 - p_1, q_2 - p_2)$

Datos:
$$\begin{cases} punto \ P(p_1, p_2) \\ vector \ \vec{v}(v_1, v_2) \end{cases}$$

Datos:
$$\begin{cases} punto \ P(p_1, p_2) \\ pendiente \ m \end{cases}$$

Datos:
$$\begin{cases} punto \ P(p_1, p_2) \\ punto \ Q(q_1, q_2) \end{cases}$$

$'' \Rightarrow '' \ m = \frac{v_2}{v_1}$ $\quad '' \Leftarrow '' \ \vec{v}(1, m)$

$'' \Leftarrow '' \ m = \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1} = \frac{\text{"lo que sube"}}{\text{"lo que avanza"}}$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS
$$\begin{cases} x = p_1 + t \cdot v_1 \\ y = p_2 + t \cdot v_2 \end{cases}$$

ECUACIÓN CONTINUA
$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$$

ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE
$$y - p_2 = m(x - p_1)$$

ECUACIÓN EXPLÍCITA
$$y = mx + n$$
$$\begin{cases} m \ pendiente \\ n \ ordenada \ en \ el \ origen \ (punto \ (0,n)) \end{cases}$$

ECUACIÓN GENERAL O IMPLÍCITA
$$Ax + By + C = 0$$
Vector normal: $\vec{v_\perp}(A, B)$

PASO A IMPLÍCITA: A esta ecuación se puede llegar:

a) Despejando e "=0" desde la continua, pto-pte o explícita

b) Del vector $\vec{v}(v_1, v_2)$ sabemos $A = v_2$, B=$-v_1$.

Calculamos C sustituyendo el punto y despejando:

$Ap_1 + Bp_2 + C = 0$ (sabemos todo menos C)

PASO A OTRAS ECUACIONES DESDE IMPLÍCITA:

Desde esta ecuación sabemos: $\begin{cases} vector \ \vec{v}(-B, A) \\ punto: \ dar \ cualquier \ valor \ a \ x \ y \ despejar \ y \end{cases}$

Y con punto y vector, podemos obtener cualquiera de las otras. También podemos despejar y para obtener explícita.

2.4. La pendiente en las ecuaciones de la recta. Vector director.

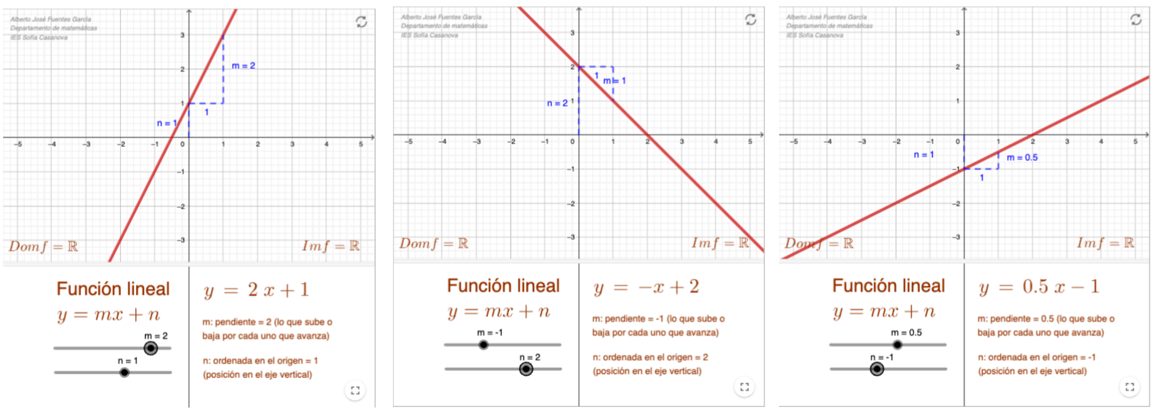
La pendiente es una medida de la inclinación de una recta (o vector). Es un concepto fundamental y os acompañará durante todo el bachillerato en distintos temas.

Definición. Dado un vector $\vec{v}(v_1, v_2)$ se define pendiente del vector como el cociente:

$$\boxed{m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\text{"lo que sube (o baja)"}}{\text{"lo que avanza"}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{"lo que sube (o baja)"}}{\text{"por unidad que anavza"}} = \frac{m}{1}}$$

Equivalentemente, la pendiente es lo que sube (o baja) por cada unidad que avanza en horizontal. La pendiente de una recta, es la pendiente de cualquier vector sobre ella.

ECUACIÓN EXPLÍCITA: nos permite representar una recta de forma intuitiva y rápida. Basta situarse en la ordenada en el origen (altura en el eje X, dada por la n) y utilizar la pendiente m (avanzamos una unidad en X y subimos o bajamos lo que indique m):



VARIOS EJEMPLOS DE REPRESENTACIÓN DE RECTAS EN EXPLÍCITA.
PUEDES EXPERIMENTAR DESDE: [HTTPS://SHORTURL.AT/XLWCB](https://shorturl.at/xlwcb)

ECUACIÓN IMPLÍCITA: Como $\overbrace{v_2}^{A}\, x \overbrace{-v_1}^{B}\, y \overbrace{+p_2v_1 - p_1v_2}^{C} = 0$, tenemos:

$v_2 = A$, $-v_1 = B$. Entonces el vector director será $\vec{v}(v_1, v_2) = (-B, A)$ y $m = -\frac{B}{A}$

Observamos entonces que (A, B) es un vector perpendicular a la recta (los coeficientes A y B nos dan directamente un vector perpendicular, útil para obtener el vector director).

Resumiendo, la dirección de una recta es: $\begin{cases} vector: \ \vec{v}(v_1, v_2) \ \equiv \ (1,m) \equiv (-B, A) \\ pendiente \ m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{m}{1} = -\frac{A}{B} \end{cases}$

Así, podemos obtener el vector si sabemos la pendiente, la pendiente si sabemos el vector, u obtener la dirección desde la ecuación implícita.

2.5. Ecuación normal.

Ecuación normal (perpendicular, ortogonal…). Para obtener la ecuación de una recta perpendicular a otra dada, basta tener un punto y obtener la dirección perpendicular:

Recta original: $\begin{cases} vector: \ \vec{v}(v_1, v_2) \ \equiv \ (1,m) \equiv (-B, A) \\ pendiente \ m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{m}{1} = -\frac{A}{B} \end{cases}$

Recta perpendicular: $\begin{cases} vector \perp: \ \overrightarrow{v_\perp}(-v_2, v_1) \ \equiv (A, B) \\ pendiente \perp: \ m_\perp = -\frac{v_1}{v_2} = -\frac{1}{m} = \frac{B}{A} \end{cases}$

LA ECUACIÓN IMPLÍCITA PERMITE OBTENER DIRECTAMENTE EL VECTOR NORMAL:

$$Ax + By + C = 0 \Longrightarrow \text{vector normal } \overrightarrow{v_\perp}(A, B)$$

2.6. Distancia de un punto a una recta.

Dada una recta en forma general: r: Ax + By + C = 0, y un punto $P(a, b)$, queremos obtener la distancia de P a r. Se podría resolver con los siguientes pasos:

1. Construir recta $r_{\perp P}$ perpendicular a r pasando por P.
2. Obtener intersección $P' = r \cap r_{\perp P}$.
3. Calcular la distancia $dist(P, P') = |\ \overrightarrow{PP'}\ | = \sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2}$

Es un proceso algo laborioso. Existe una fórmula sencilla y útil para ahorrar esfuerzo:

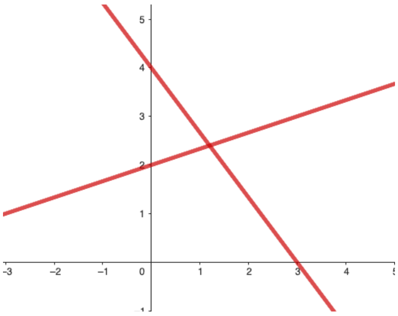
DISTANCIA PUNTO RECTA dist$(P, r) = \dfrac{|A \cdot a + B \cdot b + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Ejemplo. Calcular la distancia del punto $P(-2,7)$ a la recta $r: 5x - 8y + 4 = 0$.

Usamos la fórmula: $\text{dist}(P, r) = \dfrac{|5 \cdot (-2) + (-8) \cdot 7 + 4|}{\sqrt{5^2 + (-8)^2}} = \dfrac{62}{\sqrt{89}} \approx 7{,}1$

2.7. Posiciones relativas. Paralelismo. Ángulo entre rectas.

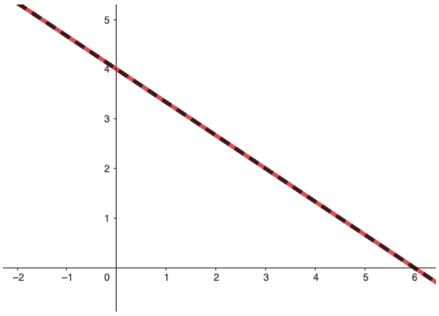
Las rectas ya se conocen y manejan desde la ESO. Resolver sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas tiene una interpretación gráfica, dependiendo de las soluciones que se obtengan:



- RECTAS SECANTES.
- SOLUCIÓN ÚNICA
- SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (SCD)

EJ. $\begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ 2x + 3y - 12 = 0 \end{cases}$

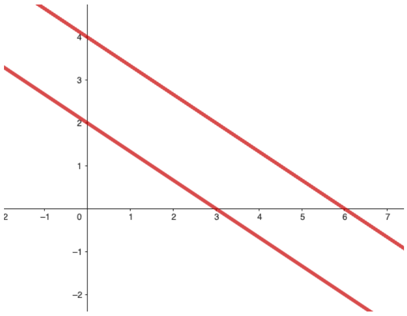
SOL: $(2, \frac{7}{3})$



- RECTAS COINCIDENTES.
- INFINITAS SOLUCIONES
- SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (SCI)

EJ. $\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0 \\ 4x + 6y - 24 = 0 \end{cases}$

SOL: $0 = 0 (\infty)$



- RECTAS PARALELAS.
- NO HAY SOLUCIÓN
- SISTEMA INCOMPATIBLE (SI)

EJ. $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ 2x + 3y - 12 = 0 \end{cases}$

SOL: $-$

Para **estudiar posiciones relativas**, se puede:

1. **Resolver sistema de ecuaciones** implícitas o explícitas y decidir según las soluciones (SCD - solución única - secantes; SCI - infinitas - coincidente; SI - no hay - paralelas).

2. Comparar vectores de dirección

1. $\overrightarrow{v_r} \nparallel \overrightarrow{v_r}\ (m_s \neq m_r) \implies secantes$ (SCD, solución única)
2. $\overrightarrow{v_r} \parallel \overrightarrow{v_s}\ (m_r = m_s) \implies \begin{cases} paralelas.\ P \in r \implies P \in s \\ coincidentes.\ P \in r\ pero\ P \not\in s \end{cases}$

(distinguimos paralelas de coincidentes usando un punto de r; si también está en s (cumple la ecuación al sustituir), serán coincidentes, pero si no está en s, serán paralelas)

Ejemplo 1: En las gráficas anteriores:

Primera: $\overrightarrow{v_r}(3,1) \nparallel \overrightarrow{v_s}(-3,2)$ (secantes)

Segunda: $\overrightarrow{v_r}(-3,2) \parallel \overrightarrow{v_s}(-6,4)$ (paralelas o coincidentes).$(0,4) \in r, s$ (coincidentes)

Tercera: $\overrightarrow{v_r}(-3,2) \parallel \overrightarrow{v_s}(-6,4)$ (paralelas o coincidentes). $(0,2) \in r$ pero $\not\in s$ (paralelas)

Ejemplo 2. Comprobar paralelismo de vectores.

¿Son paralelos $\vec{u} = (6,12)\ y\ \vec{v} = (-4, -8)$?

Opción 1: Comprobar $\vec{u} \perp \vec{v}_\perp$

(un vector paralelo a otro, es perpendicular de su perpendicular; $\vec{v}_\perp = (8, -4)$).

$\vec{u} \cdot \vec{v}_\perp = (6 \cdot 8) + (12 \cdot -4) = 48 - 48 = 0 \Longrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}_\perp \Longrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$

Opción 2: Comprobar coordenadas proporcionales.

$$\frac{6}{-4} = \frac{12}{-8} \Longrightarrow -48 = -48 \Longrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}_\perp \Longrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$$

Opción 3. Buscar k tal que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$

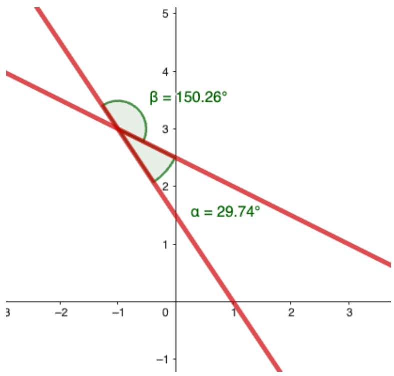
$$(6,12) = k \cdot (-4, -8) \Longrightarrow \begin{cases} 6 = -4k \Longrightarrow k = -\frac{3}{2} \\ 12 = -8k \Longrightarrow k = -\frac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$$

Ejemplo 3. Calcular el **ángulo entre las rectas** $r_1 : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$ y $r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \end{cases}$

Obtenemos los vectores directores: $\vec{v}_1 = (-2,1)$ y $\vec{v}_2 = (2, -3)$

Utilizamos el producto escalar para despejar el coseno:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|} = \frac{-7}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{-7}{\sqrt{65}} \Longrightarrow$$



$$\alpha = \arccos\left(\frac{-7}{\sqrt{65}}\right)$$

$\alpha \approx 150°15'18''43$ pero damos el agudo: $\alpha = 29°44'41''$

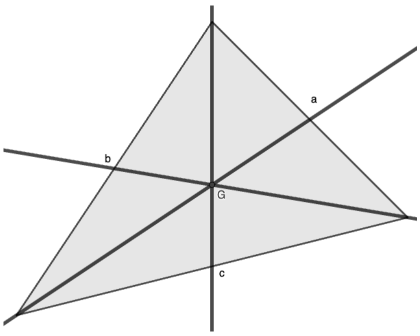
Ejemplo 4. Calcular el ángulo entre $r_1 : 5x - y + 4 = 0\quad r_2 : y = 7$

Obtenemos los vectores directores: $\vec{v}_1 = (1,5)$ $\qquad \vec{v}_2 = (1,0)$

Con el producto escalar: $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{26} \cdot 1} = \dfrac{1}{\sqrt{26}} \Longrightarrow \alpha = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{26}}\right)$

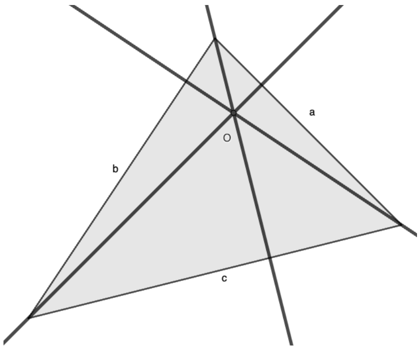
$$\alpha \approx 78°41'24''$$

2.8. Centros de un triángulo



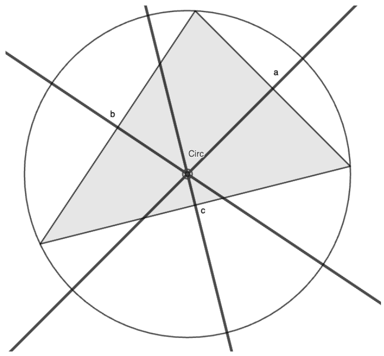
Las **medianas** son las rectas que pasan por un vértice y el punto medio del lado opuesto.

Se cortan en el **baricentro** (G) (es el centro de gravedad, y está situado a 2/3 partes del vértice y a 1/3 del lado opuesto). $G = \left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3}\right)$



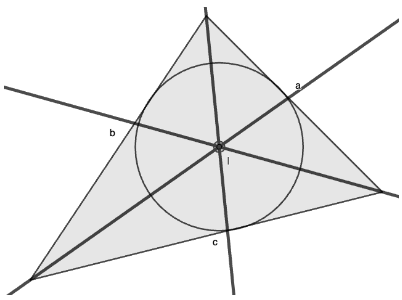
Las **alturas** son las rectas que pasan por un vértice y son ortogonales al lado opuesto.

Se cortan en el **ortocentro** (O). Puede estar fuera del triángulo.



Las **mediatrices** son las rectas que pasan por el punto medio de un lado y son ortogonales a ese lado.

Se cortan en el **circuncentro** (C) (centro de la circunferencia circunscrita).



Las **bisectrices** son las rectas que pasan por un vértice y dividen en dos partes iguales al ángulo presente en ese vértice. Cumplen que los puntos de la bisectriz equidistan de las rectas que forman el ángulo (útil para calcularlas sin ángulos, $dist(b, r_1) = dist(b, r_2)$)

Se cortan en el **incentro** (I) (centro de la circunferencia inscrita).

Dispondréis de ejemplos totalmente resueltos para su cálculo.