0. Introducción a la geometría analítica.

La **geometría analítica une** dos mundos aparentemente distintos: el **álgebra** y la **geometría**. Esta fusión **permite resolver problemas geométricos usando herramientas algebraicas.** Es uno de los desarrollos más importantes en la historia de las matemáticas, con muchas aplicaciones prácticas y teóricas que conectan áreas.

0.1. De la geometría euclídea a la geometría analítica: el plano cartesiano.

La geometría clásica siempre se asocia al mundo griego: os sonarán nombres como **Pitágoras**, **Tales**, **Euclides**, Arquímedes o Apolonio, relacionados con resultados geométricos que conocéis.

Los griegos no poseían un buen sistema de numeración, y eso hizo que se enfrentaran a los retos priorizando la geometría: el dibujo y las propiedades y relaciones de puntos, rectas, polígonos, círculos y otras figuras, dibujadas en un plano, a priori, vacío…[1]

Ese conocimiento se condensó en la obra *Los Elementos* de **Euclides** (≈300 a.C.), una de las más importantes e influyentes de la historia de las matemáticas y de la humanidad. Con el desarrollo y evolución de los sistemas de numeración indoarábigos y la aritmética, y también del álgebra (a partir del *Tratado del Álgebra* del persa **Al-Jwarizmī** (s. IX)), se abrieron nuevos caminos en el desarrollo matemático.

Geometría y álgebra convergen en el siglo XVII, cuando René **Descartes**[2] y Pierre de **Fermat** dan lugar, con sus estudios, al nacimiento de la geometría analítica con el desarrollo del plano cartesiano: el plano dejó de ser un espacio vacío, al introducir un sistema de referencia formado por un punto origen y un unos ejes perpendiculares escalados, apareciendo así las coordenadas para cada punto del plano, y permitiendo utilizar aritmética y el álgebra para realizar cálculos precisos sobre elementos geométricos. Este cambio supuso una revolución que llevó la capacidad de resolución de problemas a un nuevo nivel.

---

[1] *Aunque posteriormente, ya en el siglo III d.C. nacen la aritmética y el álgebra con **Diofanto de Alejandría** (s.III d.C.))*

[2] *Descartes fue un filósofo, matemático y físico francés que revolucionó la historia del conocimiento. En filosofía, rompió con la escolástica medieval para dar lugar al racionalismo: la búsqueda de la verdad a través de la razón. Famoso por su frase "pienso, luego existo". En matemáticas, como se comenta, abrió un nuevo campo, la geometría analítica.*

0.2. Nacen los vectores: magnitudes con dirección y sentido

La idea de que era necesario tener en cuenta la dirección asociada a una magnitud (en una fuerza, por ejemplo), es importante para resolver algunos problemas, ya la manejó **Arquímedes** en el siglo III a.C, estudiando las palancas y el equilibrio.

En el siglo XVII, con el desarrollo de la física moderna, algunos autores como **Galileo** o **Newton** fueron profundizando en ello, y plantearon descomposiciones relacionadas con la suma de vectores. **Newton**, en su segunda ley, $\overrightarrow{F} = m \cdot \vec{a}$, manejaba implícitamente vectores aunque aún no con la notación vectorial actual.

Tras los avances comentados de Descartes, y de otros matemáticos como **Euler** o **Lagrange**, debemos esperar hasta el **siglo XIX**, momento en el que **Grassmann** introduce la definición, las operaciones, y las propiedades actuales de los vectores.

0.3. Utilidad de la geometría analítica

La geometría analítica y los vectores son herramientas universales que han transformado nuestra capacidad de analizar, modelar y resolver problemas. Desde el **diseño de puentes** hasta la **animación de películas y videojuegos** y el desarrollo de **algoritmos de inteligencia artificial**, estas herramientas son una prueba de cómo la abstracción matemática tiene aplicaciones prácticas que impactan nuestra vida cotidiana.

1. Física. Fuerzas y movimientos: los vectores representan magnitudes físicas que tienen dirección y sentido, como fuerza, velocidad, aceleración o momentum.

Trayectorias y proyecciones. En el análisis de trayectorias de proyectiles, los vectores permiten descomponer el movimiento en componentes horizontal y vertical, lo que facilita los cálculos. **Campos eléctricos y magnéticos**: los campos vectoriales representan fuerzas que varían en el espacio, como el campo eléctrico o el campo magnético.+

2. Ingeniería. **Diseño estructural**: vectores para analizar fuerzas aplicadas a **estructuras** como edificios o puentes, asegurando su estabilidad (vigas y columnas). **Robótica**:los vectores permiten describir la posición, orientación y movimientos de robots en un espacio tridimensional. **Simulación y modelado**: en simulaciones por computadora, los vectores ayudan a modelar el movimiento de **fluidos**, **automóviles**, **aviones**, etc.

3. Biología y **ecología.** Modelos de dispersión de poblaciones o trayectorias de animales en ecosistemas suelen representarse mediante vectores. En **biomecánica**, los vectores representan f**uerzas internas y externas en el movimiento humano y animal**. En **geología**, los vectores se usan para describir las tensiones en la corteza terrestre. En **meteorología**, los vectores representan la **dirección y velocidad del viento** o las corrientes oceánicas.

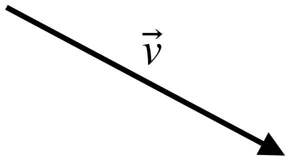
4. Computación gráfica y diseño 2D y 3D. Los vectores son esenciales para describir objetos y sus movimientos en entornos tridimensionales, como en **videojuegos** o simulaciones, y su representación en **pantallas**. **Transformaciones geométricas**: las rotaciones, traslaciones y escalados de objetos se representan mediante operaciones con vectores y matrices en gráficos por computadora. **Animación**: los vectores permiten describir trayectorias y movimientos suaves de personajes u objetos en una animación.

5. Economía y ciencias sociales. **Optimización**: en programación lineal, los vectores representan restricciones y soluciones para maximizar beneficios o reducir costes. En **economía**, los vectores permiten visualizar tendencias en gráficos tridimensionales o interpretar relaciones entre variables.

6. Matemáticas puras y aplicadas. La **geometría analítica** permite estudiar figuras y **relaciones geométricas** mediante ecuaciones algebraicas. En **álgebra lineal:** los vectores son la base para resolver sistemas de ecuaciones lineales, encontrar autovalores y estudiar **transformaciones lineales**.

7. Inteligencia artificial y ciencia de datos, donde los datos se representan como vectores y sus propiedades permiten manejarlos y manipularlos

1. Vectores en el plano $\mathbb{R}^2$.



Un vector $\vec{v}$ en el plano es un segmento orientado que tiene:

• **Módulo**: Longitud del vector $|\vec{v}|$

• **Dirección**: La orientación de la línea que contiene al vector.

• **Sentido**: Hacia dónde apunta, hay dos posibles sentidos para cada dirección.

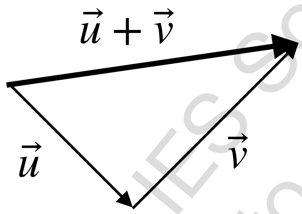
Cuando hablamos de vectores, a los números no vectoriales les llamaremos escalares.

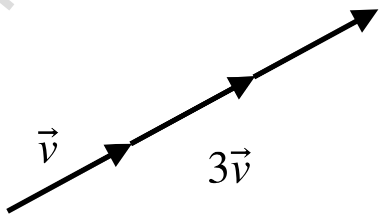
1.1. Operaciones con vectores y espacio vectorial.

Gráficamente, podemos definir dos operaciones sobre los vectores:

• **Suma** $\vec{u} + \vec{v}$: se dibujan los vectores consecutivamente, cada uno desde el extremo del anterior. La suma es el vector que une el origen con el extremo final.

• **Producto por un escalar** $k \cdot \vec{v}$: consiste el prolongar o acortar el módulo del vector según el valor del escalar, cambiando de sentido si es negativo.

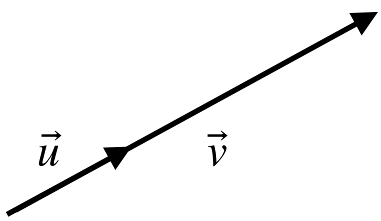




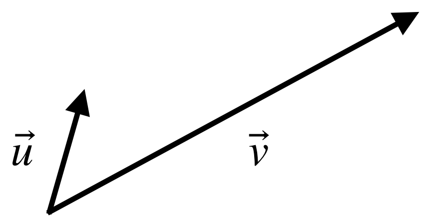
El conjunto de vectores, con estas dos operaciones, se llama **espacio vectorial**.

A partir del producto de un vector por un escalar, surge la idea de dependencia lineal:

Dos vectores de $\mathbb{R}^2$ son **linealmente dependientes** si uno se puede obtener como un producto del otro por un escalar. En caso contrario son **linealmente independientes**.



LINEALMENTE DEPENDIENTES



LINEALMENTE INDEPENDIENTES

1.2. Sistema de referencia. Base. Coordenadas.

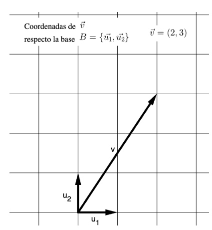
Para trabajar algebraicamente con vectores en el plano (de momento un plano vacío y sin referencias), necesitamos un sistema de referencia formado por un punto llamado origen y una base de vectores.

Se llama **base** en un espacio vectorial a un conjunto de vectores linealmente independientes ($\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$) que permiten escribir cualquier otro vector como una **combinación lineal**[3] de ellos:

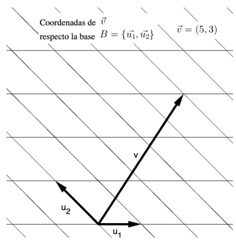
https://www.geogebra.org/m/pbjyh8uj

($\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \exists a, b \in \mathbb{R} \setminus \boxed{\mathbf{\vec{v} = a \cdot \vec{u_1} + b \cdot \vec{u_2}}}$).

Aparecen así las **coordenadas**: $\vec{v} = (a, b)$ en la base $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$



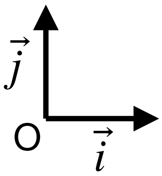
EJEMPLO BASE CANÓNICA (PERPENDICULARES UNITAROS)



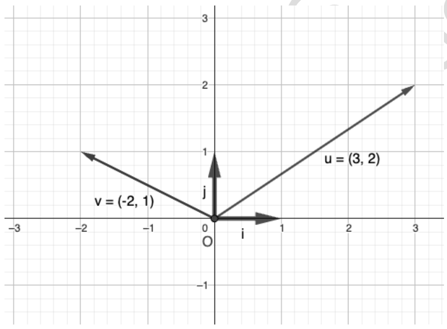
EJEMPLO BASE NO CANÓNICA (NO PERPENDICULARES/ UNITARIOS)

Aunque trabajar en bases no canónicas tiene diversas utilidades, nos centraremos solo en la canónica.

•Base canónica: $\begin{cases} \text{Origen } O(0{,}0) \\ \text{Vectores } \vec{i}, \vec{j} \ / \begin{cases} |\vec{i}| = 1, |\vec{j}| = 1 \\ \vec{i} \perp \vec{j} \end{cases} \end{cases}$



Con la base canónica, se forma el sistema de coordenadas cartesiano que ya conocéis:



$$\vec{u}(u_1, u_2) \implies \begin{cases} \boxed{\text{Modulo } |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \\ \text{Ángulo } \alpha = \arctan \dfrac{u_2}{u_1} \end{cases}$$

Operaciones en base canónica con $\vec{u}(x_1, y_1)$, $\vec{v}(x_2, y_2)$ y $k \in \mathbb{R}$:

• Suma $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

•Producto por escalar: $k \cdot \vec{u} = (kx_1, kx_2)$

---

[3] *El adjetivo **lineal** se aplica a todo aquello que "funciona bien" con **sumas**, **restas**, y **multiplicaciones por coeficientes**. Ya conocéis los sistemas de ecuaciones **lineales**, la función **lineal**, ahora combinación **lineal**, y veréis **linealidad** en derivadas, integrales, matrices, y multi**linealidad** en determinantes. Es "buena noticia"; implica que podemos trabajar con naturalidad con menos posibilidad de cometer errores.*

***Ejemplos no lineales**: logaritmos $\log(A + B) \neq \log A + \log B$ y $\log(kA) \neq k \log A$, potencias $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ y $(3x)^2 \neq 3x^2$… Lo no lineal obliga a estar más pendiente de propiedades específicas para operar, nos obliga a tener más cuidado. Lo lineal es más familiar e intuitivo para estudiantes, menos dado a fallos. Ya tenéis experiencia con los errores comunes que se cometen en igualdades notables, aplicando propiedades de logaritmos, etc.*

1.3. Producto escalar.

1.3.1. Producto escalar: definición y cálculo.

El producto escalar es una operación entre dos vectores cuyo resultado es un escalar. Es muy importante, porque permite calcular ángulos entre vectores, y estudiar perpendicularidad y proyecciones.

Definición. Dados dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, se define su **producto escalar** como:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})}$$

Como consecuencia:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = |\vec{u}||\vec{u}| \cdot \cos((\widehat{\vec{u}, \vec{u}})) = |\vec{\mathbf{u}}|^2$$

Esta propiedad se usa usa en ejercicios cuando preguntan $|\vec{u} + \vec{v}|$ o $|\vec{u} - \vec{v}|$ conocidos los módulos de los vectores y el ángulo que forman, por ejemplo:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}\vec{u} - \vec{u}\vec{v} - \vec{v}\vec{u} + \vec{v}\vec{v} =$$
$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}| - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$$

Y calculamos $|\vec{u} - \vec{v}|$ como la raíz cuadrada del resultado.

1.3.2. Producto escalar en la base canónica. Cálculo con coordenadas.

En la base canónica, si consideramos las coordenadas de $\vec{u}(u_1, u_2)$ y $\vec{v}(v_1, v_2)$, queda:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j}) \cdot (v_1\vec{i} + v_2\vec{j}) = u_1v_1(\vec{i} \cdot \vec{i}) + u_1v_2\cancel{(\vec{i} \cdot \vec{j})} + u_2v_1\cancel{(\vec{j} \cdot \vec{i})} + u_2v_2(\vec{j} \cdot \vec{j}) \implies$$

$$\implies \begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \quad (\vec{i} \parallel \vec{i} \implies \cos 0 = 1 \ y \ |\vec{i}| = 1) \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0 \quad (\vec{i} \perp \vec{j} \implies \cos 90^\circ = 0) \end{cases} \implies$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2}$$

1.3.2. Producto escalar: aplicaciones

- **Ángulo de vectores**: de $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$, **despejando**:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}}$$

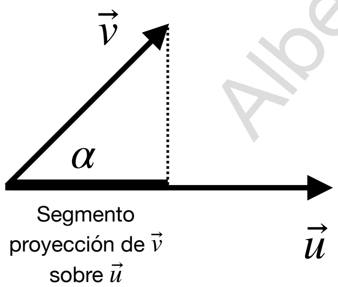
- **Perpendicularidad**[4]: (como consecuencia de que el coseno de 90º es 0)

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

- **Obtener vector perpendicular** a $\vec{u}(a, b)$: [5]

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{u_\perp}(-b,\ a) \\ \overrightarrow{u_\perp}(b,\ -a) \end{cases}}$$

- **Interpretación geométrica (proyección)**:



$\boxed{\text{• Proyección de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u} = |\vec{v}| \cdot \cos\alpha}$

• $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot \boxed{|\vec{v}| \cdot \cos\alpha} = \vec{u} \cdot \boxed{proy_{\vec{u}}\vec{v}}$

La proyección es la "sombra" que proyecta un vector sobre otro, suponiendo una luz que cae perpendicularmente sobre el segundo (imagina, en el dibujo, una luz que cae verticalmente desde arriba)

[4] *Son sinónimos: **perpendicular, ortogonal, normal, hacer 90º**, $\perp$, **ángulo recto**.*

[5] *Basta **intercambiar las coordenadas y cambiar uno de los signos.** Hay dos posibles vectores perpendiculares a otro dado, porque así* $\vec{u} \cdot \overrightarrow{u_\perp} = a \cdot (-b) + b \cdot a = a \cdot b + b \cdot (-a) = 0$