Ejercicio 1. DERIVADAS

Calcula las siguientes derivadas simplificando cuando proceda:

$a)\ f_1(x) = \arctan \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ $\quad b)\ f_2(x) = 5^{\cos \frac{1}{x^4}}$ $\quad c)\ f_3(x) = \dfrac{e^{x^2}}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad d)\ f_4(x) = 2x \cdot \ln \sqrt{\dfrac{x^2}{1-x}}$

$a)\ f_1'(x) = \dfrac{-2x}{x^4+1}$ $\quad b)\ f_2'(x) = \dfrac{4 \ln 5 \cdot 5^{\cos \frac{1}{x^4}} \sin \frac{1}{x^4}}{x^5}$ $\quad c)\ f_3'(x) = \dfrac{e^{x^2}\left(6x^2-1\right)}{3x\sqrt[3]{x}}$ $\quad d)\ f_4'(x) = \ln \dfrac{x^2}{1-x} + \dfrac{2-x}{1-x}$

$e)\ f_5(x) = \ln \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ $\quad f)\ f_6(x) = 2^{\cos \frac{1}{x^2}}$ $\quad g)\ f_7(x) = \dfrac{e^x}{\sin^2 x}$ $\quad h)\ f_8(x) = \arctan \sqrt{x^2-1}$

$e)\ f_5'(x) = \dfrac{-2x}{x^4-1}$ $\quad f)\ f_6'(x) = \dfrac{2 \ln 2 \cdot 2^{\cos \frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x^2}}{x^3}$ $\quad g)\ f_7'(x) = \dfrac{e^x(\sin x - 2\cos x)}{\sin^3 x}$ $\quad h)\ f_8'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$i)\ f_9(x) = 5^{\sin(\tan x)}$ $\quad j)\ f_{10}(x) = \ln \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ $\quad k)\ f_{11}(x) = \ln(\sin \sqrt[3]{x})$ $\quad l)\ f_{12}(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \tan x$

$i)\ f_9'(x) = \ln 5 \cdot 5^{\sin(\tan x)} \cdot \cos \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad j)\ f_{10}'(x) = \frac{1}{x-1}$ $\quad k)\ f_{11}'(x) = \frac{\sqrt[3]{x}\cos\sqrt[3]{x}}{3x} = \frac{\cot\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}\sin\sqrt[3]{x}}$ $\quad l)\ f_{12}'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{cos^2 x} - \frac{\tan x}{x^2}\right)$

$m)\ f_{13}(x) = \arctan \dfrac{1+x}{1-x}$ $\quad n)\ f_{14}(x) = \ln(\sin(\frac{1}{x}))$ $\quad o)\ f_{15}(x) = \dfrac{2e^{x^2}}{\sqrt{x}}$ $\quad p)\ f_{16}(x) = 2^x \cdot \arcsin x$

$m)\ f_{13}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad n)\ f_{14}(x) = \dfrac{-\cot \frac{1}{x}}{x^2}$ $\quad o)\ f_{15}(x) = \dfrac{e^{x^2}(4x^2-1)}{x\sqrt{x}}$ $\quad p)\ f_{16}(x) = 2^x \ln 2 \cdot \arcsin x + \dfrac{2^x}{\sqrt{1-x^2}}$

$q)\ f_{17}(x) = \ln \sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}$ $\quad r)\ f_{18}(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ $\quad s)\ f_{19}(x) = 5^{\cos \frac{1}{x^2}}$ $\quad t)\ f_{20}(x) = e^{-x^2} \cdot \sqrt[3]{2x}$

$q)\ f_{17}(x) = \dfrac{1}{2x(x+1)}$ $\quad r)\ f_{18}(x) = \dfrac{2x}{1-x^4}$ $\quad s)\ f_{19}(x) = \dfrac{2 \ln 5 \cdot 5^{\cos \frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x^2}}{x^3}$ $\quad t)\ f_{20}(x) = 2e^{-x^2}\left(\dfrac{1-6x^2}{3\sqrt[3]{4x^2}}\right)$

$u)\ f_{21}(x) = \arctan \dfrac{x}{x+2}$ $\quad v)\ f_{22}(x) = \ln(\cos \frac{1}{x})$ $\quad w)\ f_{23}(x) = e^{x^2} \cdot \sqrt{x}$

$u)\ f_{21}'(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$ $\quad v)\ f_{22}'(x) = \dfrac{\tan \frac{1}{x}}{x^2}$ $\quad w)\ f_{23}(x) = e^{x^2}\left(\dfrac{4x^2+1}{2\sqrt{x}}\right)$

Ejercicio 2. ESTUDIO DE CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD.

2.1. Calcula a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + bx + 1 & si \quad x \le 1 \\ ax^2 - 5x + 2a & si \quad x > 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a - 5 = b \\ 2a - 3 = b \end{cases} \qquad sols: a = 2\ ,\ b = 1$$

2.2. Calcula a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & si \quad x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & si \quad x > 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a + 3 = b \\ 4a - 1 = -b \end{cases} \qquad sols: a = 2\ ,\ b = -7$$

2.3. Calcula a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & si \quad x \le 1 \\ 2x - 2 & si \quad x > 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \qquad sols: a = 1\ ,\ b = 0$$

Ejercicio 3. OPTIMIZACIÓN

3.1. Se desea construir una caja con forma de paralelepípedo rectangular de 9 litros de volumen y tal que un lado de la base sea doble que el otro. Determinar las longitudes de sus lados para que el área total de sus 6 caras sea mínima.

a) Obtén la función S(x) (superficie total de la caja en función del lado menor de la base). (0,5) $S(x) = 4x^2 + \dfrac{27}{x} \implies S'(x) = 8x - \dfrac{27}{x^2}$
b) Obtén el valor mínimo de la función S(x) $x = 3/2 = 1'5\ dm$
c) Indica las dimensiones que minimizan el coste de construcción de la caja. $1'5x3x2\ dm$
d) Indica cuál será la superficie de la caja con esas dimensiones. $27\ dm^2$

3.2. Se quiere construir un depósito de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13,5 m³, sin cubierta superior. El material será una chapa de grosor uniforme. El objetivo es calcular las dimensiones del depósito para que el gasto sea el menor posible.

a) Obtén la función S(x) (superficie de chapa necesaria para la construcción del depósito en función del lado de la base).$S(x) = x^2 + \dfrac{54}{x} \implies S'(x) = 2x - \dfrac{54}{x^2}$
b) Obtén los máximos o mínimos necesarios de la función S(x).
c) Calcula las dimensiones que minimizan el coste de construcción del depósito. $3x3x1'5\ m \implies 27\ m^2$
d) Calcula el precio del depósito si la chapa cuesta 15 €/m².405€

3.3. Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m² de superficie de modo que sea lo más barato posible. Los tramos horizontales del marco cuestan 2,5 €/m y los tramos verticales 3 €/m.

a) Obtén la función C(x) (coste del marco en función de la longitud de la base).
b) Obtén el valor mínimo de la función C(x) $C(x) = 5x + \dfrac{36}{x} \implies S'(x) = 5 - \dfrac{36}{x^2}$
c) Indica las dimensiones que minimizan el coste de construcción del marco. $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}x\sqrt{5} = 2'68x2'24m$
d) Indica cuál será el coste del marco con esas dimensiones. $12\sqrt{5} = 26{,}83€$

Ejercicio 4. APLICACIÓN DERIVADAS.

4.1. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$: $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

a) Calcula los puntos, en el que las tangentes a la función son paralelas a la recta de ecuación: $r: x + 2y - 4 = 0$ $x = 3$ $x = -1$

b) Obtén las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x-3) \implies x + 2y - 9 = 0$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x+1) \implies x + 2y - 1 = 0$$

4.2. Dada la función $f(x) = x^2 + 5x - 6$: $f'(x) = 2x + 5$

a) Calcula el punto en el que la tangente a la función es paralela a la recta de ecuación: $r: 2x - 2y - 5 = 0$. $x = -2$ $y = -12$

b) Obtén la ecuación de la recta tangente en ese punto.

$$y + 12 = x + 2 \implies x - y - 10 = 0$$

$$y = -2x$$

4.3. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$: $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

a) Calcula los puntos, en el que las tangentes a la función son paralelas a la recta de ecuación: $r: 2x + y = 0$ (2,4) (0,0)

b) Obtén las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.

$$y - 4 = -2(x-2) \implies y = -2x + 8$$

Ejercicio 5. CÁLCULO DE LÍMITES

Obtén el valor de los siguientes límites, resolviendo las indeterminaciones si es necesario:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{1-e^x}$=0

b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - \ln x}{x^3 + x^2}$=1/2

c) $\lim_{x\to -1} \dfrac{\tan(x^2-1)}{\ln(x^4)}$=1/2

d) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{4x^3 - 2x^2 + x}{2x^3 - 5x + 4}$=2

e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{e^x - 1}$=0

f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sin x + x^2}{2x^2}$=inf

g) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2 - 3x - 4}$=-3/5

h) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 1}{2x^3 + x^2 - 5x + 10}$=1/2

i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sin x}{e^x}$=1

j) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$=1/6

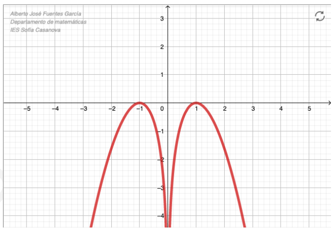
k) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)}$=4

l) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x^3 - 2x + 1}{x^3 + x^2 - 5x + 10}$=2

m) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x}$=1/2

Ejercicio 6. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

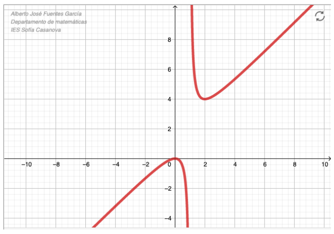
6.1 Realiza una representación gráfica de la siguiente función estudiando las características básicas necesarias que se indican en el resumen de puntuación:



$$f(x) = 1 - x^2 + \ln x^2$$

(reparto de puntuación: dominio/continuidad (0,25), simetría (0,5), periodicidad (0,25) puntos de corte (0,25), asíntotas (0,75), monotonía, máximos y mínimos (0,5), curvatura/puntos de inflexión (0,5), representación gráfica 0,75)

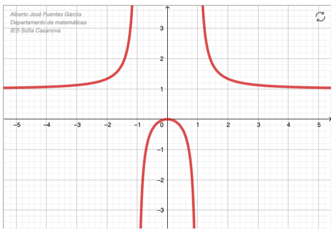
6.2. Realiza una representación gráfica de la siguiente función estudiando las características básicas necesarias que se indican en el resumen de puntuación:



$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

(reparto de puntuación: dominio/continuidad (0,25), simetría (0,5), periodicidad (0,25) puntos de corte (0,5), asíntotas (0,75), monotonía, máximos y mínimos (0,75), representación gráfica 0,75)

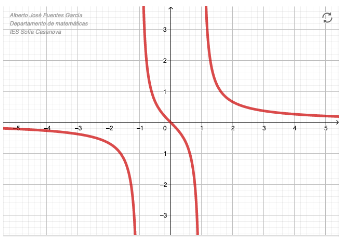
6.3. Realiza una representación gráfica de la siguiente función estudiando las características básicas necesarias que se indican en el resumen de puntuación:



$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$

(reparto de puntuación: dominio/continuidad (0,25), simetría (0,5), periodicidad (0,25) puntos de corte (0,5), asíntotas (0,75), monotonía, máximos y mínimos (0,75), representación gráfica 0,75)

6.4. Realiza una representación gráfica de la siguiente función estudiando las características básicas necesarias que se indican en el resumen de puntuación:



$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

(reparto de puntuación: dominio, simetría y puntos de corte (0,2), asíntotas (0,35), monotonía, máximos y mínimos (0,35), representación gráfica 0,35)