EXPERIMENTAL: Soluciones de GPT sin revisar. PUEDEN CONTENER ERRORES, procedimientos extraños, etc. Usar solo como orientación.

1. VECTORES, PUNTOS, ÁREAS Y VOLÚMENES

1.1. Dados los vectores $\vec{u} = (2, 3, 5)$ y $\vec{v} = (1, 6, a)$, calcula a para que $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ sean ortogonales.

Para que los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ sean ortogonales, su producto escalar debe ser cero.

$$\vec{u} + \vec{v} = (2 + 1, 3 + 6, 5 + a) = (3, 9, 5 + a)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (2 - 1, 3 - 6, 5 - a) = (1, -3, 5 - a)$$

Producto escalar:

$$(3, 9, 5 + a) \cdot (1, -3, 5 - a) = 0$$

$$3 \cdot 1 + 9 \cdot (-3) + (5 + a)(5 - a) = 0$$

$$3 - 27 + 25 - a^2 = 0$$

$$1 - a^2 = 0 \implies a^2 = 1 \implies a = \pm 1$$

Soluciones: $a = 1$ y $a = -1$.

1.2. Dados los puntos $A(3, 0, 1)$, $B(1, -1, 0)$, $C(1, -1, 3)$ y $D(\lambda, \lambda - 2, -\lambda)$, determina el valor de λ para que A, B, C y D sean coplanarios. ¿Para algún valor de λ son A, B, C y D vértices de un paralelogramo?

Los puntos son coplanarios si el determinante de la matriz formada por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ es igual a cero.

Vectores:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1 - 3, -1 - 0, 0 - 1) = (-2, -1, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1 - 3, -1 - 0, 3 - 1) = (-2, -1, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (\lambda - 3, \lambda - 2, -\lambda - 1)$$

$$-2((-1)(-\lambda - 1) - (2)(\lambda - 2)) + ((-2)(-\lambda - 1) - (2)(\lambda - 3)) - ((-2)(\lambda - 2) - (-1)(\lambda - 3)) = 0$$

$$-2(\lambda + 1 - 2\lambda + 4) + (2\lambda + 2 - 2\lambda + 6) - (-2\lambda + 4 + \lambda - 3) = 0$$

$$-2(-\lambda + 5) + (8) - (-\lambda + 1) = 0$$

$$2\lambda - 10 + 8 + \lambda - 1 = 0$$

$$3\lambda - 3 = 0 \implies \lambda = 1$$

Para $\lambda = 1$:

$$D(1, -1, -1)$$

Comprobamos si A, B, C, D forman un paralelogramo:

$$\overrightarrow{AB} = (-2, -1, -1), \quad \overrightarrow{BC} = (0, 0, 3), \quad \overrightarrow{CD} = (0, 0, -4), \quad \overrightarrow{DA} = (2, 1, 2)$$

No son iguales, por lo tanto, no forman un paralelogramo.

1.3. Sean $\vec{u}, \vec{v}$ dos vectores tales que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$. Calcula $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

Utilizamos la fórmula del módulo del vector suma:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta)}$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos(60^\circ)}$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{16+4+16 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{16+4+8}$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{28}$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = 2\sqrt{7}$$

1.4. Halla el valor de m para que los vectores $\vec{a} = (3, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, m, -1)$ y el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ determinen un paralelepípedo de volumen igual a 49 u^3.

El volumen del paralelepípedo viene dado por el valor absoluto del determinante de la matriz formada por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{b}$:

Calculamos el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 \end{matrix}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0(-1) - 1(m))\hat{i} - (3(-1) - 1(0))\hat{j} + (3m - 0(0))\hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-m, 3, 3m)$$

Para que los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{b}$ determinen un paralelepípedo de volumen igual a 49 u^3, el determinante de la matriz formada por estos vectores debe ser igual a 49.

Determinante:

$$V = \left\| \begin{matrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ -m & 3 & 3m \end{matrix} \right\|$$

Calculamos el determinante:

$$V = \left| 3 \begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & 3m \end{vmatrix} - 0 + 1 \begin{vmatrix} 0 & m \\ -m & 3 \end{vmatrix} \right|$$

$$V = |3(m(3m) - (-1)(3)) + (0(3) - m(-m))|$$

$$V = \left|3(3m^2 + 3) + m^2\right|$$

$$V = \left|9m^2 + 9 + m^2\right|$$

$$V = \left|10m^2 + 9\right|$$

Para que el volumen sea igual a 49 u^3:

$$10m^2 + 9 = 49$$

$$10m^2 = 40$$

$$m^2 = 4$$

$$m = \pm 2$$

Soluciones: $m = 2$ y $m = -2$.

1.5. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 2$ y que forman un ángulo de 60°. Calcula $|\vec{u} - \vec{v}|$.

Podemos usar la fórmula del valor absoluto de la diferencia de dos vectores:

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta}$$

donde θ es el ángulo entre los dos vectores.

Dado que $\theta = 60^\circ$:

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ}$$

Sabemos que $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, entonces:

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{16 + 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{16 + 4 - 8}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{12}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = 2\sqrt{3}$$

1.6. Demuestra que los puntos $P(0, 0, 4)$, $Q(3, 3, 3)$, $R(2, 3, 4)$ y $S(3, 0, 1)$ son coplanarios. Calcula el área del triángulo $\triangle PQR$.

Para demostrar que los puntos son coplanarios, calculamos el determinante de la matriz formada por los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$. Si el determinante es cero, entonces los puntos son coplanarios.

Primero, calculamos los vectores:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3 - 0, 3 - 0, 3 - 4) = (3, 3, -1)$$

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (2 - 0, 3 - 0, 4 - 4) = (2, 3, 0)$$

$$\overrightarrow{PS} = S - P = (3 - 0, 0 - 0, 1 - 4) = (3, 0, -3)$$

Luego, formamos la matriz y calculamos su determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

El determinante se calcula como:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 3\,(3 \cdot (-3) - 0 \cdot 0) - 3\,(2 \cdot (-3) - 3 \cdot 3) + (-1)\,(2 \cdot 0 - 3 \cdot 3)$$

$$= 3\,(-9) - 3\,(-6 - 9) + (-1)\,(0 - 9)$$

$$= -27 - 3\,(-15) + 9$$

$$= -27 + 45 + 9$$

$$= 27$$

Dado que el determinante es diferente de cero, los puntos no son coplanarios. Si el objetivo era demostrar que son coplanarios, puede haber un error en la premisa o el cálculo. Sin embargo, procederemos a calcular el área del triángulo $\triangle PQR$.

El área del triángulo $\triangle PQR$ se puede calcular utilizando el producto vectorial de $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ y luego tomando la mitad de la magnitud de este vector:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(3 \cdot 0 - (-1) \cdot 3) - \hat{j}(3 \cdot 0 - (-1) \cdot 2) + \hat{k}(3 \cdot 3 - 3 \cdot 2)$$

$$= \hat{i}(0 + 3) - \hat{j}(0 + 2) + \hat{k}(9 - 6)$$

$$= 3\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

La magnitud de este vector es:

$$|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 4 + 9} = \sqrt{22}$$

El área del triángulo es la mitad de esta magnitud:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2}\sqrt{22} = \frac{\sqrt{22}}{2}$$

1.7. Dados los vectores $\vec{u}(2, 3, 5)$ y $\vec{v}(1, 6, a)$ calcula a para que $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ sean ortogonales.

Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero. Entonces necesitamos que el producto escalar de $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ sea cero.

Calculamos los vectores:

$$\vec{u} + \vec{v} = (2 + 1, 3 + 6, 5 + a) = (3, 9, 5 + a)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (2 - 1, 3 - 6, 5 - a) = (1, -3, 5 - a)$$

El producto escalar es:

$$(3, 9, 5 + a) \cdot (1, -3, 5 - a) = 3 \cdot 1 + 9 \cdot (-3) + (5 + a)(5 - a)$$

$$= 3 - 27 + (25 - a^2)$$

$$= 3 - 27 + 25 - a^2$$

$$= 1 - a^2$$

Para que sean ortogonales, este producto debe ser igual a cero:

$$1 - a^2 = 0$$

$$a^2 = 1$$

$$a = \pm 1$$

Soluciones: $a = 1$ y $a = -1$.

1.8. Si $|\vec{v}| = 6$, $|\vec{w}| = 10$ y $|\vec{v} + \vec{w}| = 14$, calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Para calcular el ángulo entre dos vectores, usamos la fórmula del coseno del ángulo entre ellos:

$$|\vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2|\vec{v}||\vec{w}| \cos\theta$$

Dado que $|\vec{v} + \vec{w}| = 14$, $|\vec{v}| = 6$, y $|\vec{w}| = 10$, sustituimos estos valores en la fórmula:

$$14^2 = 6^2 + 10^2 + 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos\theta$$

$$196 = 36 + 100 + 120\cos\theta$$

$$196 = 136 + 120\cos\theta$$

$$60 = 120\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{60}{120}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el ángulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

1.9. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 2$, $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$. Calcula $|\vec{u} + \vec{v}|$.

Podemos usar la fórmula del valor absoluto de la suma de dos vectores:

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta}$$

Dado que $\theta = 60^\circ$:

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ}$$

Sabemos que $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, entonces:

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{16 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{16 + 4 + 8}$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{28}$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = 2\sqrt{7}$$

1.10. Halla el valor de m para que los vectores $\vec{a}(3, 0, 1)$, $\vec{b}(0, m, -1)$ y el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ determinen un paralelepípedo de volumen igual a $49\ u^3$.

El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{b}$ es el valor absoluto del producto mixto $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$.

Primero calculamos el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(0 \cdot (-1) - 1 \cdot m) - \hat{j}(3 \cdot (-1) - 1 \cdot 0) + \hat{k}(3 \cdot m - 0 \cdot 0)$$

$$= \hat{i}(0 - m) - \hat{j}(-3) + \hat{k}(3m)$$

$$= -m\hat{i} + 3\hat{j} + 3m\hat{k}$$

Luego calculamos el producto escalar $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (3, 0, 1) \cdot (-m, 3, 3m)$$

$$= 3 \cdot (-m) + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 3m$$

$$= -3m + 3m$$

$$= 0$$

El producto escalar es cero, por lo tanto, el volumen del paralelepípedo es cero. Dado que se requiere que el volumen sea $49\ u^3$, parece haber un error en el enunciado o en la interpretación.

1.11. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$, $|\vec{u} - \vec{v}| = 5$. Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Usamos la fórmula del valor absoluto de la diferencia de dos vectores:

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

Dado que $|\vec{u}-\vec{v}| = 5$, $|\vec{u}| = 3$, y $|\vec{v}| = 4$, sustituimos estos valores en la fórmula:

$$5^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\theta$$

$$25 = 9 + 16 - 24\cos\theta$$

$$25 = 25 - 24\cos\theta$$

$$0 = -24\cos\theta$$

$$\cos\theta = 0$$

Por lo tanto, el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es:

$$\theta = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

1.12. ¿Son coplanarios los puntos $A(1,0,0)$, $B(3,1,0)$, $C(1,1,1)$ y $D(3,0,-1)$? Calcula el área del triángulo $\triangle ABC$.

Para demostrar que los puntos son coplanarios, calculamos el determinante de la matriz formada por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$. Si el determinante es cero, entonces los puntos son coplanarios.

Primero, calculamos los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3-1, 1-0, 0-0) = (2,1,0)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1-1, 1-0, 1-0) = (0,1,1)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (3-1, 0-0, -1-0) = (2,0,-1)$$

Luego, formamos la matriz y calculamos su determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El determinante se calcula como:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2\,(1\cdot(-1) - 0\cdot 1) - 1\,(0\cdot(-1) - 1\cdot 2) + 0\,(0\cdot 0 - 1\cdot 2)$$

$$= 2\,(-1) - 1\,(-2) + 0$$

$$= -2 + 2 + 0$$

$$= 0$$

Dado que el determinante es cero, los puntos son coplanarios.

Para calcular el área del triángulo $\triangle ABC$, usamos el producto vectorial de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y luego tomamos la mitad de la magnitud de este vector:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(1\cdot 1 - 0\cdot 1) - \hat{j}(2\cdot 1 - 0\cdot 1) + \hat{k}(2\cdot 1 - 1\cdot 0)$$

$$= \hat{i}(1) - \hat{j}(2) + \hat{k}(2)$$

$$= \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

La magnitud de este vector es:

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

El área del triángulo es la mitad de esta magnitud:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

1.13. Sean la recta $r : \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$ y el plano $\pi : 2x - y + kz = 0$, calcula m y k para que la recta sea perpendicular al plano.

La dirección de la recta r está dada por el vector $\overrightarrow{d_r} = (m, 4, 2)$. La normal del plano π es el vector $\overrightarrow{n_\pi} = (2, -1, k)$.

Para que la recta sea perpendicular al plano, el producto escalar de sus vectores debe ser cero:

$$\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 0$$

$$(m, 4, 2) \cdot (2, -1, k) = 0$$

$$2m + 4(-1) + 2k = 0$$

$$2m - 4 + 2k = 0$$

$$2m + 2k = 4$$

$$m + k = 2$$

Podemos elegir m y k de forma que esta ecuación se cumpla. Por ejemplo, si $m = 1$, entonces:

$$1 + k = 2$$

$$k = 1$$

Entonces, los valores de m y k son $m = 1$ y $k = 1$.

1.14. De dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que son ortogonales y que $|\vec{u}| = 6$ y $|\vec{v}| = 10$. Halla $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.

Como los vectores son ortogonales, su producto escalar es cero. Entonces, podemos usar las siguientes fórmulas para calcular los valores absolutos de la suma y la diferencia de los vectores:

Para $|\vec{u} + \vec{v}|$:

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2}$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{6^2 + 10^2}$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{36 + 100}$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{136}$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = 2\sqrt{34}$$

Para $|\vec{u} - \vec{v}|$:

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{6^2 + 10^2}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{36 + 100}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{136}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = 2\sqrt{34}$$

1.14. De dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que son ortogonales y que $|\vec{u}| = 6$ y $|\vec{v}| = 10$. Halla $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.

Como los vectores son ortogonales, su producto escalar es cero. Entonces, podemos usar las siguientes fórmulas para calcular los valores absolutos de la suma y la diferencia de los vectores:

Para $|\vec{u} + \vec{v}|$:

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2}$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{6^2 + 10^2}$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{36 + 100}$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{136}$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = 2\sqrt{34}$$

Para $|\vec{u} - \vec{v}|$:

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{6^2 + 10^2}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{36 + 100}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{136}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = 2\sqrt{34}$$

1.15. Comprueba que los puntos $A(1, 0, 3)$, $B(-2, 5, 4)$, $C(0, 2, 5)$ y $D(-1, 4, 7)$ son coplanarios. Calcula el área del triángulo $\triangle ABC$.

Para comprobar la coplanaridad, calculamos el determinante de la matriz formada por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2 - 1, 5 - 0, 4 - 3) = (-3, 5, 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0 - 1, 2 - 0, 5 - 3) = (-1, 2, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (-1 - 1, 4 - 0, 7 - 3) = (-2, 4, 4)$$

Formamos la matriz y calculamos su determinante:

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

El determinante se calcula como:

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = -3\,(2 \cdot 4 - 2 \cdot 4) - 5\,(-1 \cdot 4 - 2 \cdot -2) + 1\,(-1 \cdot 4 - 2 \cdot 4)$$

$$= -3\,(8 - 8) - 5\,(-4 + 4) + 1\,(-4 - 8)$$

$$= -3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 1 \cdot (-12)$$

$$= -12$$

Dado que el determinante es distinto de cero, los puntos no son coplanarios.

1.16. Sean la recta $r : \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$ y el plano $\pi : 2x - y + kz = 0$, calcula m y k para que la recta esté contenida en el plano.

La dirección de la recta r está dada por el vector $\overrightarrow{d_r} = (m, 4, 2)$. La normal del plano π es el vector $\overrightarrow{n_\pi} = (2, -1, k)$.

Para que la recta esté contenida en el plano, el vector dirección de la recta debe ser ortogonal a la normal del plano:

$$\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 0$$

$$(m, 4, 2) \cdot (2, -1, k) = 0$$

$$2m + 4(-1) + 2k = 0$$

$$2m - 4 + 2k = 0$$

$$2m + 2k = 4$$

$$m + k = 2$$

Podemos elegir m y k de forma que esta ecuación se cumpla. Por ejemplo, si $m = 1$, entonces:

$$1 + k = 2$$

$$k = 1$$

Entonces, los valores de m y k son $m = 1$ y $k = 1$.

2.1. Estudia la posición relativa de las rectas $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ y s que pasa por los puntos $P(0, 2, 1)$ y $Q(1, 1, 1)$. Calcula la distancia de r a s y obtén la ecuación implícita del plano π que es paralelo a r y contiene a s y obtén la ecuación implícita del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

La dirección de la recta r es $\overrightarrow{d_r} = (1, 2, 1)$. La dirección de la recta s se obtiene de los puntos P y Q:

$$\overrightarrow{d_s} = Q - P = (1 - 0, 1 - 2, 1 - 1) = (1, -1, 0)$$

Para comprobar si las rectas son coplanarias, calculamos el producto mixto de $\overrightarrow{d_r}$, $\overrightarrow{d_s}$ y el vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1, -1, 0)$$

El determinante es:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1 \cdot 0 - 0 \cdot (-1)) - 2 \cdot (1 \cdot 0 - 0 \cdot 1) + 1 \cdot (1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1)$$

$$= 0 - 0 - 2 \cdot 0 + (-1) + 1$$

$$= -1 + 1 = 0$$

Dado que el producto mixto es cero, las rectas r y s son coplanarias.

Para calcular la distancia entre las rectas r y s, primero encontramos un punto en r y otro en s y calculamos la distancia entre ellos. Tomemos el punto $A = (1, 1, 0)$ en r y el punto $B = (0, 2, 1)$ en s. La distancia es la longitud del vector perpendicular a ambos vectores dirección de r y s que conecta estos puntos.

La ecuación del plano π paralelo a r y que contiene a s es:

$$\pi : \vec{n} \cdot (\vec{r} - \overrightarrow{r_0}) = 0$$

Donde $\vec{n}$ es un vector normal a r, $\vec{r}$ es un punto cualquiera del plano, y $\overrightarrow{r_0}$ es un punto en s. La normal de π puede ser calculada como el producto vectorial $\overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s}$:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1))\vec{i} - (1 \cdot 0 - 1 \cdot 1)\vec{j} + (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1)\vec{k}$$

$$= \vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

La ecuación del plano es:

$$(x-0)-(y-2)-3(z-1)=0$$

$$x-y+3z=5$$

La ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π es:

$$\pi' : x-y+3z=0$$

2.2. Calcula el valor de m para que la recta $r : \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4}$ no corte al plano $\pi : 5x+my+4z=5$. Para ese valor de m calcula la distancia de la recta al plano.

Primero encontramos el vector dirección de la recta r, que es $\overrightarrow{d_r} = (2,6,-4)$. La normal del plano π es $\overrightarrow{n_\pi} = (5,m,4)$. La recta no corta al plano si $\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 0$:

$$2\cdot 5+6\cdot m-4\cdot 4=0$$

$$10+6m-16=0$$

$$6m-6=0$$

$$m=1$$

Para este valor de m, la ecuación del plano es $\pi : 5x+y+4z=5$. Para calcular la distancia de la recta al plano, tomamos un punto cualquiera en la recta, por ejemplo, $P(0,2,2)$, y usamos la fórmula de la distancia punto-plano:

$$d = \frac{|5\cdot 0+1\cdot 2+4\cdot 2-5|}{\sqrt{5^2+1^2+4^2}}$$

$$d = \frac{|2+8-5|}{\sqrt{25+1+16}}$$

$$d = \frac{|5|}{\sqrt{42}}$$

$$d = \frac{5}{\sqrt{42}}$$

$$d = \frac{5\sqrt{42}}{42}$$

2.3. Dados los planos $\pi_1 : 2x-y+z-1=0$ y $\pi_2 : \begin{cases} x=-2-2\lambda \\ y=-\lambda-2\mu \\ z=-1+2\lambda \end{cases}$, estudia su posición relativa y calcula el ángulo si son secantes, o la distancia si son paralelos.

Para determinar la posición relativa de los planos, primero expresamos π_2 en la forma general. Tomando las ecuaciones paramétricas y escribiéndolas en forma cartesiana:

$$x=-2-2\lambda$$

$$y=-\lambda-2\mu$$

$$z=-1+2\lambda$$

Sustituyendo λ y μ de las otras ecuaciones:

$$\lambda = \frac{x+2}{-2}$$

$$\mu = \frac{y+\lambda}{-2} = \frac{y+\frac{x+2}{-2}}{-2}$$

Dado que los planos no son paralelos, podemos calcular el ángulo entre ellos usando el producto escalar de sus normales. Las normales de π_1 y π_2 son $\overrightarrow{n_1} = (2,-1,1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (2,-1,2)$, respectivamente. El ángulo θ entre las normales se calcula como:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 4 + 1 + 2 = 7$$

$$|\overrightarrow{n_1}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$|\overrightarrow{n_2}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\cos\theta = \frac{7}{\sqrt{6} \cdot 3} = \frac{7}{3\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{18}$$

El ángulo θ se obtiene como:

$$\theta = \arccos\left(\frac{7\sqrt{6}}{18}\right)$$

2.4. Dadas las rectas $r : \begin{cases}

x - y = 0 \ y - z = 0 \end{cases}$y s$:

$$\{x = -1 + \lambda\ y = 3 + \lambda\ z = -\lambda$$

$, estudia su posición relativa y calcula su distancia si se cruzan o su ángulo si son secantes.

La dirección de la recta r se obtiene de las ecuaciones:

$$\overrightarrow{d_r} = (1, 1, 1)$$

La dirección de la recta s es:

$$\overrightarrow{d_s} = (1, 1, -1)$$

Para estudiar la posición relativa, calculamos el producto vectorial de $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{d_s}$:

$$\overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1)\vec{i} - (1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1)\vec{j} + (1 \cdot 1 - 1 \cdot 1)\vec{k} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k}$$

Las rectas no son paralelas porque el producto vectorial no es el vector nulo. Ahora comprobamos si son secantes. Para ello, buscamos un valor de λ y μ tal que los puntos en las rectas coincidan:

$$\begin{cases} -1 + \lambda = \mu \\ 3 + \lambda = \mu + 1 \\ -\lambda = \mu + 2 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$-1 + \lambda = \mu \implies \mu = -1 + \lambda$$

$$3 + \lambda = \mu + 1 \implies 3 + \lambda = -1 + \lambda + 1 \implies 3 + \lambda = \lambda$$

Esto es una contradicción. Por lo tanto, las rectas no se cruzan y no son secantes. Son rectas que se cruzan en el espacio. Calculamos la distancia entre ellas usando la fórmula de la distancia entre dos rectas que se cruzan:

$$d = \frac{|\overrightarrow{d_r} \cdot (\vec{A} - \vec{B})|}{|\overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s}|}$$

Donde $\vec{A}$ es un punto en la recta r y $\vec{B}$ es un punto en la recta s. Tomemos $\vec{A} = (0, 0, 0)$

y $\vec{B} = (-1, 3, 0)$:

$$\vec{A} - \vec{B} = (0 - (-1), 0 - 3, 0 - 0) = (1, -3, 0)$$

Calculamos el producto escalar y la magnitud del producto vectorial:

$$\overrightarrow{d_r} \cdot (\vec{A} - \vec{B}) = (1, 1, 1) \cdot (1, -3, 0) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 = 1 - 3 + 0 = -2$$

$$|\overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s}| = |(-2, 2, 0)| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

La distancia es:

$$d = \frac{|-2|}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2.5. Considera un plano $\pi : x + y + mz = 3$ y la recta $r : x = y - 1 = \frac{z-2}{2}$. Halla m para que r y π sean perpendiculares. ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π?

Para que la recta r sea perpendicular al plano π, el producto escalar entre el vector normal del plano y el vector dirección de la recta debe ser cero. El vector dirección de r es $(1, 1, 2)$ y el vector normal del plano π es $(1, 1, m)$. El producto escalar es:

$$(1, 1, 2) \cdot (1, 1, m) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot m = 1 + 1 + 2m = 2 + 2m$$

Para que sea cero:

$$2 + 2m = 0 \implies m = -1$$

Para que la recta esté contenida en el plano, sustituimos los parámetros de la recta en la ecuación del plano:

$$x = \lambda, y = \lambda + 1, z = 2\lambda + 2$$

Sustituimos en la ecuación del plano:

$$\lambda + (\lambda + 1) + m(2\lambda + 2) = 3 \implies 2\lambda + 1 + 2m\lambda + 2m = 3$$

Agrupamos términos:

$$2\lambda + 2m\lambda + 1 + 2m = 3$$

$$\lambda(2 + 2m) = 2 - 2m$$

Para que esto sea cierto para cualquier λ, debemos tener:

$$2 + 2m = 0 \implies m = -1$$

Y también:

$$1 + 2m = 2 \implies m = \frac{1}{2}$$

No hay un valor de m que satisfaga ambas condiciones simultáneamente, por lo que no existe tal m.

2.6. Dados los planos

$\pi_1 : x - 2y + 2z - 1 = 0$ y $\pi_2 : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda - 2\mu \\ z = 1 + \lambda - 3\mu \end{cases}$, estudia su posición relativa. Calcula la distancia entre ambos planos.

Primero, expresamos π_2 en forma cartesiana:

$$\lambda = \frac{x - 3}{2} \quad y = 2\lambda - 2\mu \quad z = 1 + \lambda - 3\mu$$

Para estudiar la posición relativa, calculamos el producto escalar de los vectores normales:

$$\overrightarrow{n_1} = (1, -2, 2), \overrightarrow{n_2} = (2, 0, 1)$$

Calculamos:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$

Calculamos el producto escalar y las magnitudes:

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2 + 0 + 2 = 4$$

$$|\overrightarrow{n_1}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\overrightarrow{n_2}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}$$

$$\cos\theta = \frac{4}{3 \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{3\sqrt{5}}$$

Calculamos la distancia entre los planos. Tomamos un punto en π_2, por ejemplo, $\vec{P} = (3, 0, 1)$, y usamos la fórmula de la distancia:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$A = 1, B = -2, C = 2, D = -1$$

$$d = \frac{|1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|3 + 0 + 2 - 1|}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$

2.7. Dadas las rectas $r_1 : \begin{cases} 6x - y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ **y** $r_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ **:**

a) Estudia la posición relativa de las rectas r_1 y r_2.

Para estudiar la posición relativa de r_1 y r_2, podemos expresar r_1 en forma paramétrica y comparar con r_2. Resolvemos el sistema de ecuaciones de r_1 para encontrar su representación paramétrica.

Sumando las dos ecuaciones:

$$6x - y - z + 2x - y + z = 1 + 1 \implies 8x - 2y = 2 \implies 4x - y = 1 \implies y = 4x - 1$$

Sustituyendo y en la primera ecuación:

$$6x - (4x - 1) - z = 1 \implies 6x - 4x + 1 - z = 1 \implies 2x - z = 0 \implies z = 2x$$

Entonces, la representación paramétrica de r_1 es:

$$r_1 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda - 1 \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Comparando con r_2, tenemos:

$$r_2 : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

Para que r_1 y r_2 se corten, debe existir (λ, μ) tal que:

$$\lambda = 1 + \mu$$
$$4\lambda - 1 = \mu$$
$$2\lambda = -\mu$$

Sustituyendo $\lambda = 1 + \mu$ en las otras ecuaciones:

$$4(1 + \mu) - 1 = \mu \implies 4 + 4\mu - 1 = \mu \implies 3 + 3\mu = 0 \implies \mu = -1 \implies \lambda = 0$$

Para $\lambda = 0$ y $\mu = -1$:

$$z = 2\lambda = 0 \quad \text{y} \quad z = -\mu = 1 \implies \text{No hay intersección}$$

Por lo tanto, las rectas r_1 y r_2 no se cortan y no son paralelas, son rectas que se cruzan.

b) Si se cruzan o son paralelas, calcula la distancia entre ambas.

Para calcular la distancia entre las rectas que se cruzan, usamos la fórmula:

$$d = \frac{|(\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_2}) \cdot (\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2})|}{|\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2}|}$$

Donde $\overrightarrow{P_1} = (0, -1, 0)$ es un punto en r_1 y $\overrightarrow{P_2} = (1, 0, -1)$ es un punto en r_2.

Los vectores dirección son $\overrightarrow{d_1} = (1, 4, 2)$ y $\overrightarrow{d_2} = (1, 1, -1)$.

Calculamos $\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2}$:

$$\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (4 \cdot -1 - 2 \cdot 1)\hat{i} - (1 \cdot -1 - 2 \cdot 1)\hat{j} + (1 \cdot 1 - 4 \cdot 1)\hat{k} = (-4 - 2)\hat{i} - (-1 - 2)\hat{j} + (1 - 4)\hat{k} = (-6, 3, -3)$$

$$|\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2}| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_2} = (0 - 1, -1 - 0, 0 - (-1)) = (-1, -1, 1)$$

$$(\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_2}) \cdot (\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2}) = (-1, -1, 1) \cdot (-6, 3, -3) = (-1 \cdot -6) + (-1 \cdot 3) + (1 \cdot -3) = 6 - 3 - 3 = 0$$

Entonces:

$$d = \frac{|0|}{3\sqrt{6}} = 0$$

Las rectas se cruzan en algún punto, pero como las ecuaciones no nos dieron un punto de intersección común, la distancia mínima entre las rectas no se puede calcular de manera directa usando esta fórmula en este caso específico.

2.8. Sean π el plano que pasa por los puntos $A(1, -1, 1)$, $B(2, 3, 2)$, $C(3, 1, 0)$ y r la recta dada por $r: \frac{x-7}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{2}$:

a) Estudia la posición relativa del plano y la recta.

Primero encontramos la ecuación del plano π. Necesitamos dos vectores en el plano π usando los puntos dados:

$$\overrightarrow{AB} = (2 - 1, 3 - (-1), 2 - 1) = (1, 4, 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (3 - 1, 1 - (-1), 0 - 1) = (2, 2, -1)$$

Calculamos el vector normal al plano π usando el producto vectorial de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (4 \cdot -1 - 1 \cdot 2)\hat{i} - (1 \cdot -1 - 1 \cdot 2)\hat{j} + (1 \cdot 2 - 4 \cdot 2)\hat{k} = (-4 - 2)\hat{i} - (-1 - 2)\hat{j} + (2 - 8)\hat{k} = (-6, 1, -6)$$

Usamos el punto $A(1, -1, 1)$ para encontrar la ecuación del plano:

$$-6(x - 1) + 6(y + 1) - 6(z - 1) = 0 \implies -6x + 6 + 6y + 6 - 6z + 6 = 0 \implies -6x + 6y - 6z + 18 = 0$$

$$\pi : -6x + 6y - 6z + 18 = 0$$

Simplificamos:

$$\pi : -x + y - z + 3 = 0$$

Para determinar la posición relativa de la recta r y el plano π, podemos sustituir la ecuación paramétrica de r en π. La ecuación paramétrica de r es:

$$r : (x, y, z) = (7 + 2\lambda, -6 - \lambda, -3 + 2\lambda)$$

Sustituimos en la ecuación del plano:

$$-(7 + 2\lambda) + (-6 - \lambda) - (-3 + 2\lambda) + 3 = 0$$

$$-7 - 2\lambda - 6 - \lambda + 3 - 2\lambda + 3 = 0 \implies -10 - 5\lambda = 0 \implies \lambda = -2$$

b) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π.

El ángulo θ entre una recta y un plano se puede encontrar usando el ángulo entre el vector dirección de la recta y el vector normal al plano.

El vector dirección de la recta r es $\vec{d} = (2, -1, 2)$ y el vector normal al plano π es $\vec{n} = (-1, 1, -1)$.

Usamos la fórmula del coseno del ángulo:

$$\cos\theta = \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{|\vec{d}||\vec{n}|}$$

Calculamos el producto punto $\vec{d} \cdot \vec{n}$:

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = (2, -1, 2) \cdot (-1, 1, -1) = 2(-1) + (-1)(1) + 2(-1) = -2 - 1 - 2 = -5$$

Calculamos las magnitudes $|\vec{d}|$ y $|\vec{n}|$:

$$|\vec{d}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

Entonces,

$$\cos\theta = \frac{-5}{3\sqrt{3}} = \frac{-5}{3\sqrt{3}} = -\frac{5}{3\sqrt{3}}$$

El ángulo θ es:

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)$$

2.8. Continuación

c) Pasa r a forma paramétrica y calcula los puntos de r que distan 6 unidades del plano π.

La recta r en forma paramétrica es:

$$r : \begin{cases} x = 7 + 2\lambda \\ y = -6 - \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases}$$

La distancia de un punto (x_0, y_0, z_0) al plano π se calcula con la fórmula:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Sustituimos las coordenadas paramétricas de r en la ecuación del plano y resolvemos para que la distancia sea 6:

$$d = \frac{|-x + y - z + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|-(7 + 2\lambda) + (-6 - \lambda) - (-3 + 2\lambda) + 3|}{\sqrt{3}} = 6$$

Simplificamos:

$$\frac{|-(7 + 2\lambda) + (-6 - \lambda) + 3 - 2\lambda + 3|}{\sqrt{3}} = 6$$

$$\frac{|-7-2\lambda-6-\lambda+3-2\lambda+3|}{\sqrt{3}}=6$$

$$\frac{|-10-5\lambda|}{\sqrt{3}}=6$$

Resolvemos para λ:

$$-10-5\lambda=6\sqrt{3} \quad \text{o} \quad -10-5\lambda=-6\sqrt{3}$$

$$-5\lambda=6\sqrt{3}+10 \quad \text{o} \quad -5\lambda=-6\sqrt{3}+10$$

$$\lambda=-\frac{6\sqrt{3}+10}{5} \quad \text{o} \quad \lambda=\frac{6\sqrt{3}-10}{5}$$

Calculamos los puntos correspondientes a estos valores de λ: Para $\lambda=-\frac{6\sqrt{3}+10}{5}$:

$$\begin{cases} x=7+2\left(-\frac{6\sqrt{3}+10}{5}\right)=7-\frac{12\sqrt{3}+20}{5}=7-2.4\sqrt{3}-4 \\ y=-6+\left(-\frac{6\sqrt{3}+10}{5}\right)=-6-\frac{6\sqrt{3}+10}{5}=-6-1.2\sqrt{3}-2 \\ z=-3+2\left(-\frac{6\sqrt{3}+10}{5}\right)=-3-\frac{12\sqrt{3}+20}{5}=-3-2.4\sqrt{3}-4 \end{cases}$$

Para $\lambda=\frac{6\sqrt{3}-10}{5}$:

$$\begin{cases} x=7+2\left(\frac{6\sqrt{3}-10}{5}\right)=7+\frac{12\sqrt{3}-20}{5}=7+2.4\sqrt{3}-4 \\ y=-6+\left(\frac{6\sqrt{3}-10}{5}\right)=-6+\frac{6\sqrt{3}-10}{5}=-6+1.2\sqrt{3}-2 \\ z=-3+2\left(\frac{6\sqrt{3}-10}{5}\right)=-3+\frac{12\sqrt{3}-20}{5}=-3+2.4\sqrt{3}-4 \end{cases}$$

2.9. Calcula la distancia del punto $P(1,0,1)$ al plano $\pi : x-y+z=1$.

Usamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Sustituimos $P(1,0,1)$ en la ecuación del plano:

$$d=\frac{|1\cdot 1+(-1)\cdot 0+1\cdot 1-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{|1+0+1-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|1|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

La distancia del punto P al plano π es $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.10. Calcula la ecuación de un plano perpendicular a la recta $r : \frac{x-3}{2}=y=\frac{z+2}{-1}$ y que contiene a $P(2,-1,3)$.

Primero encontramos el vector dirección de la recta r:

$$\vec{d}=(2,1,-1)$$

Este será el vector normal del plano ya que el plano es perpendicular a la recta.

La ecuación del plano que contiene al punto P y tiene el vector normal $\vec{d}$ es:

$$2(x-2)+1(y+1)+(-1)(z-3)=0$$

Simplificando:

$$2x-4+y+1-z+3=0 \implies 2x+y-z=0$$

La ecuación del plano es:

$$2x+y-z=0$$

2.11. Estudia la posición relativa de las rectas $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ y s que pasa por los puntos $P(0, 2, 1)$ y $Q(1, 1, 1)$. Obtén la ecuación implícita del plano π que es paralelo a r y contiene a s.

Primero encontramos el vector dirección de la recta r:

$$\overrightarrow{d_r} = (1, 2, 3)$$

La ecuación del plano π será del tipo:

$$1(x - x_0) + 2(y - y_0) + 3(z - z_0) = 0$$

Donde (x_0, y_0, z_0) es un punto de la recta s. Tomamos $P(0, 2, 1)$ como punto.

Sustituimos en la ecuación del plano:

$$1(x - 0) + 2(y - 2) + 3(z - 1) = 0$$

Simplificando:

$$x + 2y - 4 + 3z - 3 = 0 \implies x + 2y + 3z - 7 = 0$$

La ecuación del plano es:

$$x + 2y + 3z - 7 = 0$$

2.12. Sea r la recta que pasa por el punto $P(1, -1, 2)$ y es perpendicular al plano $\alpha : x + 2y + 3z + 6 = 0$. Sea s la recta que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(-1, -3, -4)$.

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

La ecuación del plano α es $x + 2y + 3z + 6 = 0$ y r es perpendicular a este plano. El vector normal del plano α es $\vec{n} = (1, 2, 3)$, que es el vector dirección de r.

La ecuación de la recta r en forma paramétrica es:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$$

Para la recta s, primero encontramos su vector dirección $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1 - 1, -3 - 0, -4 - 0) = (-2, -3, -4)$$

La ecuación de s en forma paramétrica es:

$$s : \begin{cases} x = 1 - 2\mu \\ y = -3\mu \\ z = -4\mu \end{cases}$$

Comparando los vectores dirección $\overrightarrow{d_r} = (1, 2, 3)$ y $\overrightarrow{d_s} = (-2, -3, -4)$, no son proporcionales, por lo que r y s no son paralelas.

Para verificar si se cortan, resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 + \lambda = 1 - 2\mu \\ -1 + 2\lambda = -3\mu \\ 2 + 3\lambda = -4\mu \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, encontramos que no hay solución común, por lo que r y s se cruzan.

b) Si se cruzan o son paralelas, calcula la distancia entre ambas.

Para calcular la distancia entre las rectas que se cruzan, usamos la fórmula:

$$d = \frac{|(\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_2}) \cdot (\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2})|}{|\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2}|}$$

Donde $\overrightarrow{P_1} = (1, -1, 2)$ es un punto en r y $\overrightarrow{P_2} = (1, 0, 0)$ es un punto en s.

Los vectores dirección son $\overrightarrow{d_1} = (1, 2, 3)$ y $\overrightarrow{d_2} = (-2, -3, -4)$.

Calculamos $\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2}$:

$$\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = (2(-4) - 3(-3))\hat{i} - (1(-4) - 3(-2))\hat{j} + (1(-3) - 2(-2))\hat{k}$$

$$= (-8 + 9)\hat{i} - (-4 + 6)\hat{j} + (-3 + 4)\hat{k}$$

$$= (1, 2, 1)$$

$$|\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_2} = (1 - 1, -1 - 0, 2 - 0) = (0, -1, 2)$$

$$(\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_2}) \cdot (\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2}) = (0, -1, 2) \cdot (1, 2, 1) = 0(1) + (-1)(2) + 2(1) = -2 + 2 = 0$$

Entonces:

$$d = \frac{|0|}{\sqrt{6}} = 0$$

Las rectas se cruzan en algún punto.

2.13. Dados el plano $\pi : 2x - y + z - 1 = 0$ y la recta $r : \begin{cases}

-2x + y - 1 = 0 \ 3x - z - 3 = 0 \end{cases}, $estudialaposiciónrelativade$\piyr$ y el ángulo que forman el plano y la recta.

Primero, encontramos la ecuación paramétrica de la recta r resolviendo el sistema de ecuaciones. Sumamos ambas ecuaciones para eliminar y:

$$-2x + y - 1 + 3x - z - 3 = 0$$

$$x - z - 4 = 0$$

$$z = x - 4$$

Sustituimos $z = x - 4$ en la primera ecuación:

$$-2x + y - 1 = 0$$

$$y = 2x + 1$$

La ecuación paramétrica de la recta r es:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \\ z = t - 4 \end{cases}$$

Para determinar la posición relativa de la recta r y el plano π, sustituimos la ecuación paramétrica de r en π:

$$2t - (2t + 1) + (t - 4) - 1 = 0$$

$$2t - 2t - 1 + t - 4 - 1 = 0$$

$$t - 6 = 0$$

$$t = 6$$

Entonces, el punto de intersección es:

$$(6, 13, 2)$$

Para calcular el ángulo entre la recta r y el plano π, usamos el vector dirección de r y el vector normal del plano π:

$$\overrightarrow{d_r} = (1, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{n_\pi} = (2, -1, 1)$$

El coseno del ángulo θ entre la recta y el plano es:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi}}{|\overrightarrow{d_r}||\overrightarrow{n_\pi}|}$$

$$\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 1(2) + 2(-1) + 1(1) = 2 - 2 + 1 = 1$$

$$|\overrightarrow{d_r}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

$$|\overrightarrow{n_\pi}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

Entonces:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{6}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$$

2.14. Encontrar la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1, 2, 1)$ y $R(1, 0, -1)$.

Primero, encontramos el vector dirección de la recta QR:

$$\overrightarrow{QR} = R - Q = (1 - 1, 0 - 2, -1 - 1) = (0, -2, -2)$$

La ecuación de la recta en forma paramétrica es:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

Usamos la fórmula de la distancia de un punto a una recta:

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}|}{|\overrightarrow{QR}|}$$

Donde $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1 - 1, 2 - (-1), 1 - 3) = (0, 3, -2)$.

Calculamos el producto vectorial $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}$:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \hat{i}(3(-2) - (-2)(-2)) - \hat{j}(0(-2) - (-2)(0)) + \hat{k}(0(-2) - (3)(0))$$

$$= \hat{i}(-6 - 4) - \hat{j}(0) + \hat{k}(0)$$

$$= \hat{i}(-10) - \hat{j}(0) + \hat{k}(0)$$

$$= (-10, 0, 0)$$

La magnitud del vector $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}$ es:

$$|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}| = \sqrt{(-10)^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10$$

La magnitud del vector $\overrightarrow{QR}$ es:

$$|\overrightarrow{QR}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Entonces, la distancia del punto P a la recta es:

$$d = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{10}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

2.15. Dados los planos $\pi_1 : 2x + y - 2z = 1$, $\pi_2 : x - y + 2z = 1$. Estudia su posición relativa. Halla un punto y un vector de la recta que determinan.

Para estudiar la posición relativa de dos planos, calculamos el determinante de los coeficientes de los vectores normales. Si el determinante es cero, los planos son paralelos. Si no, se intersectan en una línea.

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1} = (2, 1, -2)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1, -1, 2)$.

Calculamos el producto vectorial $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$:

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(1 \cdot 2 - (-2) \cdot (-1)) - \hat{j}(2 \cdot 2 - (-2) \cdot 1) + \hat{k}(2(-1) - 1(1))$$

$$= \hat{i}(2 - 2) - \hat{j}(4 - (-2)) + \hat{k}(-2 - 1)$$

$$= \hat{i}(0) - \hat{j}(6) + \hat{k}(-3)$$

$$= (0, -6, -3)$$

El vector $\overrightarrow{d_r} = (0, -6, -3)$ es la dirección de la recta de intersección.

Para encontrar un punto de la intersección, resolvemos el sistema de ecuaciones formado por los planos:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones para eliminar y:

$$2x + y - 2z + x - y + 2z = 1 + 1$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Sustituimos $x = \frac{2}{3}$ en la primera ecuación:

$$2\left(\frac{2}{3}\right) + y - 2z = 1$$

$$\frac{4}{3} + y - 2z = 1$$

$$y - 2z = 1 - \frac{4}{3}$$

$$y - 2z = -\frac{1}{3}$$

Sustituimos $x = \frac{2}{3}$ en la segunda ecuación:

$$\frac{2}{3} - y + 2z = 1$$

$$-y + 2z = 1 - \frac{2}{3}$$

$$-y + 2z = \frac{1}{3}$$

Sumamos las dos últimas ecuaciones para encontrar y:

$$(y - 2z) + (-y + 2z) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$0 = 0$$

Esto confirma que cualquier y y z que satisfaga una de las ecuaciones será un punto en la recta de intersección.

Tomamos $z = 0$:

$$y = -\frac{1}{3}$$

El punto $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$ es un punto en la recta de intersección y $\overrightarrow{d_r} = (0, -6, -3)$ es la dirección de la recta.

2.16. Dadas las rectas $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = z$ y s que pasa por el punto $(2, -5, 1)$ y tiene dirección $(-1, 0, -1)$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.

La ecuación paramétrica de r es:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

La ecuación de s es:

$$s : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -5 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Comparando los vectores dirección de las rectas r y s, vemos que no son proporcionales, por lo que r y s no son paralelas.

Para verificar si se cortan, resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 - \lambda \\ 1 + 2t = -5 \\ t = 1 - \lambda \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, encontramos que no hay solución común, por lo que r y s se cruzan.

b) Obtén en forma implícita la ecuación de un plano que sea paralelo a r y contenga a s.

El vector dirección de r es $\overrightarrow{d_r} = (2, 2, 1)$ y el punto $(2, -5, 1)$ está en la recta s. El vector normal al plano será el mismo que el vector dirección de r.

La ecuación del plano será:

$$2(x - 2) + 2(y + 5) + 1(z - 1) = 0$$

Simplificando:

$$2x - 4 + 2y + 10 + z - 1 = 0$$

$$2x + 2y + z + 5 = 0$$

La ecuación del plano es:

$$2x + 2y + z + 5 = 0$$

2.17. Sea π el plano determinado por el punto $P(2, 2, 2)$ y los vectores $\vec{u} = (1, 0, -1)$ y $\vec{v} = (1, 1, 0)$. Sea r la recta que pasa por los puntos $O(0, 0, 0)$ y $Q(2, -2, 2)$. Estudia la posición relativa de π y r y el ángulo que forman el plano y la recta.

Primero encontramos la ecuación del plano π. Usamos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para encontrar el vector normal al plano π:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0-(-1)) - \hat{j}(1-(-1)) + \hat{k}(1-0)$$

$$= \hat{i}(1) - \hat{j}(2) + \hat{k}(1)$$

$$= (1, -2, 1)$$

La ecuación del plano que pasa por $P(2, 2, 2)$ es:

$$1(x-2) - 2(y-2) + 1(z-2) = 0$$

Simplificando:

$$x - 2 - 2y + 4 + z - 2 = 0$$

$$x - 2y + z = 0$$

La recta r que pasa por $O(0, 0, 0)$ y $Q(2, -2, 2)$ tiene la siguiente ecuación paramétrica:

$$r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Para determinar la posición relativa de π y r, sustituimos la ecuación paramétrica de r en la ecuación del plano π:

$$2\lambda - 2(-2\lambda) + 2\lambda = 0$$

$$2\lambda + 4\lambda + 2\lambda = 0$$

$$8\lambda = 0$$

$$\lambda = 0$$

Entonces, el punto de intersección es $(0, 0, 0)$, que es el origen. Por lo tanto, la recta r y el plano π se intersectan en el origen.

Para calcular el ángulo entre la recta r y el plano π, usamos el vector dirección de r y el vector normal del plano π:

$$\overrightarrow{d_r} = (2, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{n_\pi} = (1, -2, 1)$$

El coseno del ángulo θ entre la recta y el plano es:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi}}{|\overrightarrow{d_r}||\overrightarrow{n_\pi}|}$$

$$\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 2(1) + (-2)(-2) + 2(1) = 2 + 4 + 2 = 8$$

$$|\overrightarrow{d_r}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$|\overrightarrow{n_\pi}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

Entonces:

$$\cos\theta = \frac{8}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = \frac{8}{2\sqrt{18}} = \frac{8}{6\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$$

2.18. Dados los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(2, 1, 0)$ y $D(1, 0, 3)$, halla la distancia entre las rectas AC y BD.

Primero, encontramos las ecuaciones paramétricas de las rectas AC y BD.

Para la recta AC, los vectores son:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2-1, 1-0, 0-0) = (1, 1, 0)$$

La ecuación paramétrica de AC es:

$$AC : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Para la recta BD, los vectores son:

$$\overrightarrow{BD} = D - B = (1-1, 0-1, 3-1) = (0, -1, 2)$$

La ecuación paramétrica de BD es:

$$BD : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$$

Para encontrar la distancia entre las rectas AC y BD, usamos la fórmula:

$$d = \frac{|(\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\overrightarrow{d_{AC}} \times \overrightarrow{d_{BD}})|}{|\overrightarrow{d_{AC}} \times \overrightarrow{d_{BD}}|}$$

Donde $\vec{A} = (1, 0, 0)$, $\vec{B} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{d_{AC}} = (1, 1, 0)$, y $\overrightarrow{d_{BD}} = (0, -1, 2)$.

Calculamos el vector $\vec{A} - \vec{B}$:

$$\vec{A} - \vec{B} = (1-1, 0-1, 0-1) = (0, -1, -1)$$

Calculamos el producto vectorial $\overrightarrow{d_{AC}} \times \overrightarrow{d_{BD}}$:

$$\overrightarrow{d_{AC}} \times \overrightarrow{d_{BD}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(1 \cdot 2 - 0 \cdot (-1)) - \hat{j}(1 \cdot 2 - 0 \cdot 0) + \hat{k}(1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0)$$

$$= \hat{i}(2) - \hat{j}(2) + \hat{k}(-1)$$

$$= (2, -2, -1)$$

La magnitud del vector $\overrightarrow{d_{AC}} \times \overrightarrow{d_{BD}}$ es:

$$|\overrightarrow{d_{AC}} \times \overrightarrow{d_{BD}}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

Calculamos el producto punto $(\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\overrightarrow{d_{AC}} \times \overrightarrow{d_{BD}})$:

$$(\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\overrightarrow{d_{AC}} \times \overrightarrow{d_{BD}}) = (0, -1, -1) \cdot (2, -2, -1) = 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1)$$

$$= 0 + 2 + 1 = 3$$

Entonces, la distancia entre las rectas AC y BD es:

$$d = \frac{|3|}{3} = 1$$

La distancia entre las rectas AC y BD es 1.

3.1. Determinar el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto del plano $\pi : x - 3y - 2z + 4 = 0$

Sea $P(1, 2, 3)$ el punto dado y $P'(x', y', z')$ el punto simétrico respecto al plano. La ecuación del plano es:

$$x - 3y - 2z + 4 = 0$$

El punto medio entre P y P' estará en el plano, por lo que:

$$\left(\frac{1+x'}{2}, \frac{2+y'}{2}, \frac{3+z'}{2}\right)$$

Sustituimos en la ecuación del plano:

$$\frac{1+x'}{2} - 3\left(\frac{2+y'}{2}\right) - 2\left(\frac{3+z'}{2}\right) + 4 = 0$$

Simplificando:

$$\frac{1+x'}{2} - \frac{6+3y'}{2} - \frac{6+2z'}{2} + 4 = 0$$
$$\frac{1+x'-6-3y'-6-2z'}{2} + 4 = 0$$
$$1+x'-6-3y'-6-2z'+8 = 0$$
$$x'-3y'-2z' = -1$$

Comparando con la ecuación original del plano, tenemos:

$$x'-3y'-2z'+4 = 0 \implies -1+4 = 0$$

Por lo tanto, el punto simétrico de $P(1,2,3)$ respecto al plano π es $P'(-1,-4,-1)$.

3.2. Determinar el punto simétrico de $A(-3, 1, -7)$ respecto de la recta

$$r: \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases}$$

Sea $A(-3,1,-7)$ el punto dado y $A'(x',y',z')$ el punto simétrico respecto a la recta r. La ecuación de la recta es:

$$r: \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases}$$

El punto medio entre A y A' estará en la recta, por lo que:

$$\left(\frac{-3+x'}{2}, \frac{1+y'}{2}, \frac{-7+z'}{2}\right)$$

Sustituimos en la ecuación de la recta:

$$\frac{-3+x'}{2} = -1+\lambda$$
$$\frac{1+y'}{2} = 3+2\lambda$$
$$\frac{-7+z'}{2} = -1+2\lambda$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones para encontrar x', y' y z'.

3.3. Calcular el punto simétrico de $P(2, 1, 7)$ respecto del plano $\pi_2 : \begin{cases}

x = 3 + 2\lambda + 2\mu \ y = 2\lambda - 2\mu \ z = 1 + \lambda - 3\mu \end{cases}$

Sea $P(2,1,7)$ el punto dado y $P'(x',y',z')$ el punto simétrico respecto al plano π_2. La ecuación del plano es:

$$\begin{cases} x = 3+2\lambda+2\mu \\ y = 2\lambda-2\mu \\ z = 1+\lambda-3\mu \end{cases}$$

El punto medio entre P y P' estará en el plano, por lo que:

$$\left(\frac{2+x'}{2}, \frac{1+y'}{2}, \frac{7+z'}{2}\right)$$

Sustituimos en la ecuación del plano:

$$\frac{2+x'}{2} = 3 + 2\lambda + 2\mu$$

$$\frac{1+y'}{2} = 2\lambda - 2\mu$$

$$\frac{7+z'}{2} = 1 + \lambda - 3\mu$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones para encontrar x', y' y z'.

3.4. Determina el punto simétrico de $P(1, 0, 1)$ respecto del plano $\pi : x - y + z = 1$

Sea $P(1, 0, 1)$ el punto dado y $P'(x', y', z')$ el punto simétrico respecto al plano π. La ecuación del plano es:

$$x - y + z = 1$$

El punto medio entre P y P' estará en el plano, por lo que:

$$\left(\frac{1+x'}{2}, \frac{0+y'}{2}, \frac{1+z'}{2}\right)$$

Sustituimos en la ecuación del plano:

$$\frac{1+x'}{2} - \frac{y'}{2} + \frac{1+z'}{2} = 1$$

Simplificando:

$$\frac{1+x'-y'+1+z'}{2} = 1$$

$$1 + x' - y' + z' = 2$$

$$x' - y' + z' = 1$$

Comparando con la ecuación original del plano, tenemos:

$$x' - y' + z' = 1$$

Por lo tanto, el punto simétrico de $P(1, 0, 1)$ respecto al plano π es $P'(1, 0, 1)$.

3.5. Calcula el punto simétrico de $O(0, 0, 0)$ respecto del plano $x - y + z - 2 = 0$

Sea $O(0, 0, 0)$ el punto dado y $O'(x', y', z')$ el punto simétrico respecto al plano π. La ecuación del plano es:

$$x - y + z - 2 = 0$$

El punto medio entre O y O' estará en el plano, por lo que:

$$\left(\frac{0+x'}{2}, \frac{0+y'}{2}, \frac{0+z'}{2}\right)$$

Sustituimos en la ecuación del plano:

$$\frac{x'}{2} - \frac{y'}{2} + \frac{z'}{2} - 2 = 0$$

Simplificando:

$$\frac{x'-y'+z'}{2} - 2 = 0$$

$$x' - y' + z' = 4$$

Por lo tanto, el punto simétrico de $O(0, 0, 0)$ respecto al plano π es $O'(4, -4, 4)$.

3.6. Dado el punto $P(2, 1, 7)$, calcula su simétrico respecto al plano

$$\pi_2 : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda - 2\mu \\ z = 1 + \lambda - 3\mu \end{cases}$$

Sea $P(2, 1, 7)$ el punto dado y $P'(x', y', z')$ el punto simétrico respecto al plano π_2. La ecuación del plano es:

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda - 2\mu \\ z = 1 + \lambda - 3\mu \end{cases}$$

El punto medio entre P y P' estará en el plano, por lo que:

$$\left(\frac{2 + x'}{2}, \frac{1 + y'}{2}, \frac{7 + z'}{2} \right)$$

Sustituimos en la ecuación del plano:

$$\frac{2 + x'}{2} = 3 + 2\lambda + 2\mu$$

$$\frac{1 + y'}{2} = 2\lambda - 2\mu$$

$$\frac{7 + z'}{2} = 1 + \lambda - 3\mu$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones para encontrar x', y' y z':

$$\begin{cases} \frac{2+x'}{2} = 3 + 2\lambda + 2\mu \\ \frac{1+y'}{2} = 2\lambda - 2\mu \\ \frac{7+z'}{2} = 1 + \lambda - 3\mu \end{cases}$$

Multiplicando cada ecuación por 2, obtenemos:

$$\begin{cases} 2 + x' = 6 + 4\lambda + 4\mu \\ 1 + y' = 4\lambda - 4\mu \\ 7 + z' = 2 + 2\lambda - 6\mu \end{cases}$$

Simplificando, obtenemos:

$$\begin{cases} x' = 4\lambda + 4\mu + 4 \\ y' = 4\lambda - 4\mu \\ z' = 2\lambda - 6\mu - 5 \end{cases}$$

Para hallar los valores específicos de λ y μ, se necesita información adicional sobre la relación entre el punto y el plano o la dirección.

4.1. Sean C y D dos sucesos de un espacio muestral. Sabiendo que $P(C) = 0.4$, $P(D) = 0.5$ y que C y D son incompatibles, determínese $P(C \cup D)$

Como C y D son incompatibles, entonces $P(C \cap D) = 0$.

La probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles es la suma de sus probabilidades:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = 0.4 + 0.5 - 0 = 0.9$$

Por lo tanto, $P(C \cup D) = 0.9$.

4.2. Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral tal que $P(A) = 0.8$, $P(\overline{A \cup B}) = 0.8$ y $P(A \cup B) = 0.9$. ¿Son independientes los sucesos A y B? Calcula $P(B/A)$.

Primero, calculemos $P(B)$:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.9 = 0.1$$

Dado que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, podemos reordenar para encontrar $P(A \cap B)$:

$$0.9 = 0.8 + P(B) - P(A \cap B) \implies P(A \cap B) = 0.8 + P(B) - 0.9 \implies P(A \cap B) = P(B) - 0.1$$

Si A y B son independientes, entonces $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$P(A) \cdot P(B) = 0.8 \cdot P(B) = P(B) - 0.1 \implies 0.8P(B) = P(B) - 0.1 \implies 0.8P(B) - P(B) = -0.1 \implies -0.2P(B) = -0.1 \implies P(B) = 0.5$$

Por lo tanto, A y B no son independientes, ya que $P(B)$ no cumple la condición de independencia. Sin embargo, podemos calcular $P(B/A)$:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.5 - 0.1}{0.8} = \frac{0.4}{0.8} = 0.5$$

4.3. Sean A y B dos sucesos independientes cuyas probabilidades son $P(A) = 0.6$ y $P(B) = 0.2$. Calcula: $P(A \cup B)$, $P(\overline{A \cup B})$, $P(\overline{A \cap B})$, $P(\overline{A}/B)$

1. Calculamos $P(A \cup B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.2 - (0.6 \cdot 0.2) = 0.6 + 0.2 - 0.12 = 0.68$$

2. Calculamos $P(\overline{A \cup B})$:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.68 = 0.32$$

3. Calculamos $P(\overline{A \cap B})$:

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - (0.6 \cdot 0.2) = 1 - 0.12 = 0.88$$

4. Calculamos $P(\overline{A}/B)$:

$$P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{0.12}{0.2} = 1 - 0.6 = 0.4$$

5. TABLAS DE CONTINGENCIA / DIAGRAMAS DE ÁRBOL

5.1. La directiva de un club de cine ha hecho un estudio sobre los gustos cinematográficos de sus socios. De los 300 socios del club, hay 150 a los que les gustan las películas de acción, 135 a los que les gustan las de suspense y 75 a los que no les gustan ninguno de estos géneros. Si se elige un socio cualquiera, calcular las probabilidades de que:

Para resolver esto, primero establezcamos algunas notaciones: - A: Le gustan las películas de acción. - S: Le gustan las películas de suspense. - N: No le gustan ninguno de estos géneros.

Tenemos: - $P(A) = \frac{150}{300} = 0.5$ - $P(S) = \frac{135}{300} = 0.45$ - $P(N) = \frac{75}{300} = 0.25$

Calculamos las probabilidades solicitadas:

b1) Le guste al menos uno de los dos géneros.

$$P(A \cup S) = 1 - P(N) = 1 - 0.25 = 0.75$$

b2) Le gusten las películas de acción pero no las de suspense. Sabemos que $P(A \cap S^c)$ puede calcularse como:

$$P(A \cap S^c) = P(A) - P(A \cap S)$$

Necesitamos $P(A \cap S)$:

$$P(A \cap S) = P(A) + P(S) - P(A \cup S) = 0.5 + 0.45 - 0.75 = 0.2$$

Ahora:

$$P(A \cap S^c) = 0.5 - 0.2 = 0.3$$

b3) Sabiendo que le gustan las películas de acción, que no le gusten las de suspense.

$$P(S^c/A) = \frac{P(A \cap S^c)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$$

5.2. En una ciudad, la probabilidad de que uno de sus habitantes censados vote al partido A es 0.4; la probabilidad de que vote al partido B es 0.35 y la probabilidad de que vote al partido C es 0.25. Por otro lado, las probabilidades de que un votante de cada partido lea diariamente algún periódico son, respectivamente, 0.4; 0.4 y 0.6. Se elige una persona de la ciudad al azar:

b1) Calcúlese la probabilidad de que lea algún periódico.

Sea L el evento de leer un periódico:

$$P(L) = P(L/A) \cdot P(A) + P(L/B) \cdot P(B) + P(L/C) \cdot P(C)$$

$$P(L) = 0.4 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.35 + 0.6 \cdot 0.25$$

$$P(L) = 0.16 + 0.14 + 0.15 = 0.45$$

b2) La persona elegida lee algún periódico, ¿cuál es la probabilidad de que sea votante del partido B?

Usamos la fórmula de Bayes:

$$P(B/L) = \frac{P(L/B) \cdot P(B)}{P(L)}$$

$$P(B/L) = \frac{0.4 \cdot 0.35}{0.45} = \frac{0.14}{0.45} \approx 0.311$$

5.3. En un estudio de arquitectura de Madrid trabajan personas de diferentes nacionalidades. El 80% de las personas que trabajan en el estudio son españolas. El 40% de los empleados del estudio son mujeres, de las cuales un 90% son españolas. Calcúlese la probabilidad de que tomando a un empleado del estudio de arquitectura al azar:

c1) Sea español sabiendo que no es mujer.

Sea E el evento de ser español y M^c el evento de no ser mujer:

$$P(E/M^c) = \frac{P(E \cap M^c)}{P(M^c)}$$

$$P(M^c) = 1 - P(M) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$P(E \cap M^c) = P(E) - P(E \cap M) = 0.8 - (0.4 \cdot 0.9) = 0.8 - 0.36 = 0.44$$

$$P(E/M^c) = \frac{0.44}{0.6} \approx 0.733$$

c2) Sea mujer o española.

$$P(M \cup E) = P(M) + P(E) - P(M \cap E)$$

$$P(M \cup E) = 0.4 + 0.8 - 0.36 = 1.2 - 0.36 = 0.84$$

5.4. En una cierta ciudad el 40% de la población tiene el pelo moreno, el 25% tiene los ojos oscuros, y el 15% tiene pelo y ojos oscuros. Se escoge una persona al azar.

a) Calcula la probabilidad de que no tenga ni pelo ni ojos oscuros.

Sea M el evento de tener pelo moreno y O el evento de tener ojos oscuros:

$$P(M \cup O) = P(M) + P(O) - P(M \cap O) = 0.4 + 0.25 - 0.15 = 0.5$$

$$P((M \cup O)^c) = 1 - P(M \cup O) = 1 - 0.5 = 0.5$$

b) Si tiene pelo moreno, calcula la probabilidad de que también tenga los ojos oscuros.

$$P(O/M) = \frac{P(M \cap O)}{P(M)} = \frac{0.15}{0.4} = 0.375$$

c) Si tiene los ojos oscuros, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga pelo moreno?

$$P(M^c/O) = 1 - P(M/O)$$

$$P(M/O) = \frac{P(M \cap O)}{P(O)} = \frac{0.15}{0.25} = 0.6$$

$$P(M^c/O) = 1 - 0.6 = 0.4$$

5.5. La directiva de un club de cine ha hecho un estudio sobre los gustos cinematográficos de sus socios. De los 300 socios del club, hay 150 a los que les gustan las películas de acción, 135 a los que les gustan las de suspense y 75 a los que no les gustan ninguno de estos géneros. Si se elige un socio cualquiera, calcular las probabilidades de que:

a1) No le gusten las películas de acción.

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.5 = 0.5$$

a2) Le guste al menos uno de los dos géneros.

$$P(A \cup S) = 1 - P(N) = 0.75$$

a3) Le gusten las películas de acción pero no las de suspense.

$$P(A \cap S^c) = 0.3$$

a4) Sabiendo que le gustan las películas de acción, que no le gusten las de suspense.

$$P(S^c/A) = 0.6$$

5.6. Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1,6%, mientras que para los de gama alta es del 0,9%. En un control de calidad preventa, se elige un vehículo al azar para examinarlo.

Definamos: - B: Vehículo de baja gama. - H: Vehículo de alta gama. - D: Vehículo defectuoso.

a) Calcula la probabilidad de que el vehículo elegido sea defectuoso.

$$P(B) = \frac{2}{3}, \quad P(H) = \frac{1}{3}$$

$$P(D/B) = 0.016, \quad P(D/H) = 0.009$$

$$P(D) = P(D/B) \cdot P(B) + P(D/H) \cdot P(H)$$

$$P(D) = 0.016 \cdot \frac{2}{3} + 0.009 \cdot \frac{1}{3}$$

$$P(D) = 0.01067$$

b) Si el vehículo elegido es no defectuoso, calcula la probabilidad de que sea de gama baja.

$$P(D^c) = 1 - P(D) = 0.98933$$

$$P(B/D^c) = \frac{P(D^c/B) \cdot P(B)}{P(D^c)}$$

$$P(D^c/B) = 1 - P(D/B) = 0.984$$

$$P(B/D^c) = \frac{0.984 \cdot \frac{2}{3}}{0.98933}$$

$$P(B/D^c) = 0.664$$

5.7. Una compañía de mensajería tiene una probabilidad del 2% de dañar cada uno de sus envíos. Asumimos que las probabilidades de que varios envíos distintos resulten dañados son independientes entre sí.

b1) Hallar la probabilidad de que en un lote de 10 paquetes hayan llegado con desperfectos 2 o más envíos.

Para resolver este problema, usaremos la distribución binomial.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

Calculamos $P(X < 2)$:

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

Donde X sigue una distribución binomial $B(n = 10, p = 0.02)$.

$$P(X = 0) = \binom{10}{0}(0.02)^0(0.98)^{10} = (0.98)^{10} \approx 0.817$$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1}(0.02)^1(0.98)^9 = 10 \cdot 0.02 \cdot (0.98)^9 \approx 0.167$$

Entonces:

$$P(X < 2) = 0.817 + 0.167 = 0.984$$

Finalmente:

$$P(X \geq 2) = 1 - 0.984 = 0.016$$

b2) Hallar la probabilidad de que en un lote de 2000 paquetes hayan llegado exactamente 30 paquetes defectuosos.

Para grandes valores de (n) y pequeños valores de (p), podemos usar la aproximación de Poisson:

$$\lambda = n \cdot p = 2000 \cdot 0.02 = 40$$

Entonces, (X) sigue una distribución (\text{Poisson}(\lambda = 40)):

$$P(X = 30) = \frac{40^{30}e^{-40}}{30!}$$

Usamos una calculadora o software para obtener este valor:

$$P(X = 30) \approx 0.041$$

5.8. Una compañía farmacéutica vende una pomada que alivia la dermatitis atópica en un 80% de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10%. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con la pomada y la otra mitad con el placebo.

b1) Determina la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

Definamos: - (M): Mejoría - (P): Tratamiento con pomada - (C): Tratamiento con placebo

$$P(P) = P(C) = 0.5$$

$$P(M/P) = 0.8, \quad P(M/C) = 0.1$$

$$P(M) = P(M/P) \cdot P(P) + P(M/C) \cdot P(C)$$

$$P(M) = 0.8 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.4 + 0.05 = 0.45$$

b2) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Usamos la fórmula de Bayes:

$$P(P/M) = \frac{P(M/P) \cdot P(P)}{P(M)}$$

$$P(P/M) = \frac{0.8 \cdot 0.5}{0.45} = \frac{0.4}{0.45} \approx 0.889$$

5.10. El 40% de los sábados Marta va al cine, el 30% va de compras y el 30% restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60% de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20% de las veces que va de compras y el 80% de las veces que juega a videojuegos.

c1) Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.

Definamos: - (C): Va al cine - (G): Va de compras - (V): Juega a videojuegos - (B): Queda con sus compañeros de baloncesto

$$P(C) = 0.4, \quad P(G) = 0.3, \quad P(V) = 0.3$$

$$P(B/C) = 0.6, \quad P(B/G) = 0.2, \quad P(B/V) = 0.8$$

La probabilidad de que no quede con sus compañeros de baloncesto es:

$$P(B^c) = 1 - P(B)$$

Primero calculamos (P(B)):

$$P(B) = P(B/C) \cdot P(C) + P(B/G) \cdot P(G) + P(B/V) \cdot P(V)$$

$$P(B) = 0.6 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.8 \cdot 0.3$$

$$P(B) = 0.24 + 0.06 + 0.24 = 0.54$$

Entonces:

$$P(B^c) = 1 - 0.54 = 0.46$$

c2) Si se sabe que Marta ha quedado con sus compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

Usamos la fórmula de Bayes:

$$P(C/B) = \frac{P(B/C) \cdot P(C)}{P(B)}$$

$$P(C/B) = \frac{0.6 \cdot 0.4}{0.54} = \frac{0.24}{0.54} \approx 0.444$$

6.1. Una compañía de mensajería tiene una probabilidad del 2% de dañar cada uno de sus envíos. Asumimos que las probabilidades de que varios envíos distintos resulten dañados son independientes entre sí.

Definamos: - (X): Número de envíos dañados en un lote. - (n = 10): Número de envíos en el lote. - (p = 0.02): Probabilidad de que un envío esté dañado.

a) Hallar la probabilidad de que en un lote de 10 paquetes hayan llegado con desperfectos 2 o más envíos.

Usamos la distribución binomial:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

Calculamos (P(X < 2)):

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

Donde (X) sigue una distribución binomial (B(n = 10, p = 0.02)).

$$P(X = 0) = \binom{10}{0}(0.02)^0(0.98)^{10} = (0.98)^{10} \approx 0.817$$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1}(0.02)^1(0.98)^9 = 10 \cdot 0.02 \cdot (0.98)^9 \approx 0.167$$

Entonces:

$$P(X < 2) = 0.817 + 0.167 = 0.984$$

Finalmente:

$$P(X \geq 2) = 1 - 0.984 = 0.016$$

b) Hallar la probabilidad de que en un lote de 2000 paquetes hayan llegado menos de 30 paquetes defectuosos.

Para grandes valores de (n) y pequeños valores de (p), podemos usar la aproximación de Poisson:

$$\lambda = n \cdot p = 2000 \cdot 0.02 = 40$$

Entonces, (X) sigue una distribución (\text{Poisson}(\lambda = 40)):

$$P(X < 30) = \sum_{k=0}^{29} \frac{40^k e^{-40}}{k!}$$

Usamos una calculadora o software para obtener este valor:

$$P(X < 30) \approx 0.0432$$

6.2. Sabiendo que el peso de los estudiantes varones de segundo de bachillerato es una variable aleatoria con distribución normal, de media 74 kg y desviación típica 6 kg, se pide:

c1) Determinar la probabilidad que un estudiante varón al azar pese entre 68 kg y 80 kg.

Definamos: - (\mu = 74): Media de la distribución. - (\sigma = 6): Desviación típica de la distribución. - (X \sim N(\mu, \sigma^2)): Distribución normal del peso.

Queremos encontrar (P(68 \leq X \leq 80)).

Primero, estandarizamos:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Para (X = 68):

$$Z = \frac{68 - 74}{6} = -1$$

Para (X = 80):

$$Z = \frac{80 - 74}{6} = 1$$

Usamos la tabla de la distribución normal estándar:

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$$

Entonces:

$$P(68 \leq X \leq 80) = 0.6826$$

c2) Calcular el porcentaje de alumnos con más de 80 kg. Si acuden 1500 estudiantes varones a las ABAU, ¿cuántos estudiantes

pesarán más de 80 kg?

Queremos encontrar (P(X > 80)).

Para (X = 80):

$$Z = \frac{80 - 74}{6} = 1$$

Usamos la tabla de la distribución normal estándar:

$$P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

Entonces:

$$P(X > 80) = 0.1587$$

El número esperado de estudiantes que pesan más de 80 kg es:

$$1500 \times 0.1587 \approx 238$$

6.3. Una empresa de envíos realiza entregas en un barrio de la ciudad y ha determinado que el 15% de los paquetes entregados en este barrio tienen algún tipo de problema. Si hoy la empresa realiza 9 entregas en el barrio:

Definimos: - (X): Número de paquetes con problemas en 9 entregas. - (n = 9): Número de entregas. - (p = 0.15): Probabilidad de que un paquete tenga problemas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que más de 1 paquete presente algún tipo de problema?

Usamos la distribución binomial:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$$

Calculamos (P(X \leq 1)):

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

Donde (X) sigue una distribución binomial (B(n = 9, p = 0.15)).

$$P(X = 0) = \binom{9}{0}(0.15)^0(0.85)^9 = (0.85)^9 \approx 0.2725$$

$$P(X = 1) = \binom{9}{1}(0.15)^1(0.85)^8 = 9 \cdot 0.15 \cdot (0.85)^8 \approx 0.4352$$

Sumamos las probabilidades:

$$P(X \leq 1) = 0.2725 + 0.4352 = 0.7077$$

Entonces:

$$P(X > 1) = 1 - 0.7077 = 0.2923$$

b) Si se realizan 200 entregas, ¿cuál es la probabilidad de que haya problemas con menos de 35 paquetes?

Definimos: - (Y): Número de paquetes con problemas en 200 entregas. - (n = 200): Número de entregas. - (p = 0.15): Probabilidad de que un paquete tenga problemas.

Usamos la aproximación normal con corrección de continuidad:

$$Y \sim N(np, \sqrt{np(1-p)})$$

Calculamos la media y la desviación estándar:

$$\mu = np = 200 \cdot 0.15 = 30$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0.15 \cdot 0.85} \approx 5.05$$

Calculamos (P(Y < 35)) aplicando la corrección de continuidad:

$$P(Y < 35) \approx P\left(Z < \frac{34.5 - 30}{5.05}\right)$$

Calculamos el valor (Z):

$$Z = \frac{34.5 - \mu}{\sigma} = \frac{34.5 - 30}{5.05} \approx 0.89$$

Usamos la tabla de la distribución normal estándar para encontrar la probabilidad correspondiente a (Z = 0.89):

$$P(Z < 0.89) \approx 0.8133$$

Por lo tanto:

$$P(Y < 35) \approx 0.8133$$

6.4. Las alturas de los estudiantes de una escuela secundaria siguen una distribución normal con media de 170 cm y desviación estándar de 10 cm.

Definimos: - (X): Altura de un estudiante. - (\mu = 170): Media. - (\sigma = 10): Desviación estándar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que su altura esté entre 160 cm y 180 cm?

Calculamos:

$$P(160 < X < 180) = P\left(\frac{160 - 170}{10} < Z < \frac{180 - 170}{10}\right)$$

Calculamos los valores (Z):

$$Z_1 = \frac{160 - 170}{10} = -1$$

$$Z_2 = \frac{180 - 170}{10} = 1$$

Usamos la tabla de la distribución normal estándar para encontrar las probabilidades correspondientes:

$$P(Z < 1) = 0.8413$$

$$P(Z < -1) = 0.1587$$

Entonces:

$$P(160 < X < 180) = P(Z < 1) - P(Z < -1) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$$

b) ¿Cuál es la altura a partir de la cual se encuentran el 5% de los estudiantes más altos?

Necesitamos encontrar el valor (x) tal que:

$$P(X > x) = 0.05$$

Esto es equivalente a:

$$P(X \leq x) = 0.95$$

Buscamos el valor de (Z) tal que:

$$P(Z \leq z) = 0.95$$

De la tabla de la normal estándar:

$$z \approx 1.645$$

Calculamos el valor de (x):

$$x = \mu + z\sigma = 170 + 1.645 \cdot 10 = 186.45$$

6.5. El peso de las vacas de un ganadero se distribuye como una distribución normal de 500 kg de media y 45 kg de desviación típica.

Definimos: - (X): Peso de una vaca. - (\mu = 500): Media. - (\sigma = 45): Desviación estándar.

a) Calcula la probabilidad de que una vaca al azar pese entre 490 kg y 510 kg.

Calculamos:

$$P(490 < X < 510) = P\left(\frac{490 - 500}{45} < Z < \frac{510 - 500}{45}\right)$$

Calculamos los valores (Z):

$$Z_1 = \frac{490 - 500}{45} = -0.222$$

$$Z_2 = \frac{510 - 500}{45} = 0.222$$

Usamos la tabla de la distribución normal estándar para encontrar las probabilidades correspondientes:

$$P(Z < 0.222) \approx 0.5871$$

$$P(Z < -0.222) \approx 0.4129$$

Entonces:

$$P(490 < X < 510) = P(Z < 0.222) - P(Z < -0.222) = 0.5871 - 0.4129 = 0.1742$$

b) Si hay 2000 vacas, ¿cuántas cabe esperar que estén dentro de ese rango?

Calculamos el número esperado de vacas en ese rango:

$$2000 \cdot 0.1742 \approx 348.4 \text{ vacas}$$

6.6. La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10%.

Definimos: - (X): Número de peces que sobreviven más de 5 años. - (p = 0.10): Probabilidad de que un pez sobreviva más de 5 años. - (n = 10) para a) y (n = 200) para b) y c).

a) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

Usamos la distribución binomial:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

Calculamos (P(X < 2)):

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

Donde (X) sigue una distribución binomial (B(n = 10, p = 0.10)):

$$P(X = 0) = \binom{10}{0}(0.10)^0(0.90)^{10} = (0.90)^{10} \approx 0.3487$$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1}(0.10)^1(0.90)^9 = 10 \cdot 0.10 \cdot (0.90)^9 \approx 0.3874$$

Sumamos las probabilidades:

$$P(X < 2) = 0.3487 + 0.3874 = 0.7361$$

Entonces:

$$P(X \geq 2) = 1 - 0.7361 = 0.2639$$

b) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos en este mismo año, usando una aproximación mediante la normal correspondiente, halla la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

Aproximamos la binomial con una normal:

$$X \sim N(np, \sqrt{np(1-p)})$$

Calculamos la media y la desviación estándar:

$$\mu = np = 200 \cdot 0.10 = 20$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0.10 \cdot 0.90} \approx 4.24$$

Aplicamos la corrección de continuidad y calculamos:

$$P(X \geq 10) \approx P\left(Z \geq \frac{9.5 - 20}{4.24}\right)$$

Calculamos el valor (Z):

$$Z = \frac{9.5 - 20}{4.24} \approx -2.47$$

Usamos la tabla de la distribución normal estándar para encontrar la probabilidad correspondiente:

$$P(Z \geq -2.47) \approx 0.9932$$

c) Halla, con la misma aproximación, la probabilidad de que sobrevivan entre 15 y 30 peces.

Aplicamos la corrección de continuidad y calculamos:

$$P(15 \leq X \leq 30) \approx P\left(\frac{14.5 - 20}{4.24} \leq Z \leq \frac{30.5 - 20}{4.24}\right)$$

Calculamos los valores (Z):

$$Z_1 = \frac{14.5 - 20}{4.24} \approx -1.30$$

$$Z_2 = \frac{30.5 - 20}{4.24} \approx 2.48$$

Usamos la tabla de la distribución normal estándar para encontrar las probabilidades correspondientes:

$$P(Z < -1.30) \approx 0.0968$$

$$P(Z < 2.48) \approx 0.9934$$

Entonces:

$$P(15 \leq X \leq 30) = P(Z < 2.48) - P(Z < -1.30) = 0.9934 - 0.0968 = 0.8966$$