EXPERIMENTAL: Soluciones de GPT sin revisar. PUEDEN CONTENER ERRORES, procedimientos extraños, etc. Usar solo como orientación.

Ejercicio 1.1

Calcular el área delimitada entre el eje X y la gráfica de:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ -x + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para calcular el área total, sumamos las áreas de cada segmento:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Para $x \leq 2$:

$$A_1 = \int_0^2 (-x^2 + 3x)\,dx$$

$$A_1 = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^2$$

$$A_1 = \left(-\frac{8}{3} + 6\right) - (0)$$

$$A_1 = -\frac{8}{3} + 6$$

$$A_1 = \frac{10}{3}$$

Para $x > 2$:

$$A_2 = \int_2^4 (-x + 4)\,dx$$

$$A_2 = \left[-\frac{x^2}{2} + 4x\right]_2^4$$

$$A_2 = \left(-\frac{16}{2} + 16\right) - \left(-\frac{4}{2} + 8\right)$$

$$A_2 = (-8 + 16) - (-2 + 8)$$

$$A_2 = 8 - 6$$

$$A_2 = 2$$

El área total es:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{10}{3} + 2$$

$$A = \frac{10}{3} + \frac{6}{3}$$

$$A = \frac{16}{3}$$

Ejercicio 1.2

Considera la región limitada por la curva $y = x^3 - 5x^2 + 6x$ y la recta $y = 0$. Dibujar la gráfica de la región, expresarla usando integrales, y calcular su valor.

Primero, encontramos los puntos de intersección resolviendo $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$:

$$x(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$x(x - 2)(x - 3) = 0$$

Entonces, los puntos de intersección son $x = 0$, $x = 2$ y $x = 3$.

El área está dada por la integral:

$$A = \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x)\, dx$$

$$A = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 3x^2\right]_0^2$$

$$A = \left(\frac{16}{4} - \frac{40}{3} + 12\right) - (0)$$

$$A = 4 - \frac{40}{3} + 12$$

$$A = \frac{12}{3} + 4 - \frac{40}{3}$$

$$A = \frac{12 + 12 - 40}{3}$$

$$A = \frac{-16}{3}$$

Ejercicio 1.3

Sea R el recinto del plano limitado por $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$. Dibujarlo y calcular área.

Primero, encontramos los puntos de intersección resolviendo $6x - x^2 = x^2 - 2x$:

$$6x - x^2 = x^2 - 2x$$

$$6x + 2x = x^2 + x^2$$

$$8x = 2x^2$$

$$4x = x^2$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

Entonces, los puntos de intersección son $x = 0$ y $x = 4$.

El área está dada por la integral:

$$A = \int_0^4 (6x - x^2 - (x^2 - 2x))\, dx$$

$$= \int_0^4 (6x - x^2 - x^2 + 2x)\, dx$$

$$= \int_0^4 (8x - 2x^2)\, dx$$

$$= \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= \left(4 \cdot 16 - \frac{2 \cdot 64}{3}\right) - (0)$$

$$= 64 - \frac{128}{3}$$

$$= \frac{192}{3} - \frac{128}{3}$$

$$= \frac{64}{3}$$

Ejercicio 1.4

Sea R el recinto del plano limitado por las curvas $y = x(3 - x)$ y $y = x^2$. Dibujar R y calcular su área.

Primero, encontramos los puntos de intersección resolviendo $x(3 - x) = x^2$:

$$3x - x^2 = x^2$$

$$3x = 2x^2$$
$$3x = 2x$$
$$3 = 2x$$
$$x = \frac{3}{2}$$

Entonces, los puntos de intersección son $x = 0$ y $x = \frac{3}{2}$.

El área está dada por la integral:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{3}{2}} (x(3-x) - x^2)\, dx \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}} (3x - x^2 - x^2)\, dx \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}} (3x - 2x^2)\, dx \\
&= \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^{\frac{3}{2}} \\
&= \left(\frac{3 \cdot \frac{9}{4}}{2} - \frac{2 \cdot \frac{27}{8}}{3} \right) - (0) \\
&= \left(\frac{27}{8} - \frac{27}{12} \right) \\
&= \frac{27}{8} - \frac{9}{4} \\
&= \frac{27}{8} - \frac{18}{8} \\
&= \frac{9}{8}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.5 (Continuación)

Dibuja el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $f(x) = x^2 - 4x$ y la recta $y = x - 4$.

Primero, encontramos los puntos de intersección resolviendo $x^2 - 4x = x - 4$:

$$x^2 - 4x = x - 4$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$(x-1)(x-4) = 0$$

Entonces, los puntos de intersección son $x = 1$ y $x = 4$.

El área está dada por la integral:

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^4 ((x^2 - 4x) - (x - 4))\, dx \\
&= \int_1^4 (x^2 - 4x - x + 4)\, dx \\
&= \int_1^4 (x^2 - 5x + 4)\, dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x \right]_1^4
\end{aligned}$$

Evaluamos los límites:

$$= \left(\frac{4^3}{3} - \frac{5 \cdot 4^2}{2} + 4 \cdot 4 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{5 \cdot 1^2}{2} + 4 \cdot 1 \right)$$
$$= \left(\frac{64}{3} - \frac{80}{2} + 16 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 \right)$$

Simplificamos cada término:

$$= \left(\frac{64}{3} - 40 + 16\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4\right)$$

$$= \left(\frac{64}{3} - 24\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4\right)$$

$$= \left(\frac{64}{3} - \frac{72}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{15}{6} + 4\right)$$

$$= \left(-\frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4\right)$$

$$= -\frac{8}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{15}{6} + 4\right)$$

$$= -\frac{8}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4\right)$$

$$= -\frac{8}{3} - \left(\frac{2}{6} - \frac{15}{6} + \frac{24}{6}\right)$$

$$= -\frac{8}{3} - \left(\frac{11}{6}\right)$$

$$= -\frac{8}{3} - \left(\frac{11}{6}\right)$$

$$= -\frac{16}{6} - \left(\frac{11}{6}\right)$$

$$= -\frac{27}{6}$$

$$= \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4.5$$

Ejercicio 1.6

Dada la curva $y = x^2 + 2x + 2$, halla el área limitada por la curva, la recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo y la tangente a la curva con pendiente 6. Dibuja la región correspondiente.

Primero, encontramos el extremo de la función derivando y:

$$f'(x) = 2x + 2$$

Igualamos a cero para encontrar el extremo:

$$2x + 2 = 0$$

$$x = -1$$

El valor de y en este punto es:

$$y = (-1)^2 + 2(-1) + 2 = 1 - 2 + 2 = 1$$

Entonces, el punto es $(-1, 1)$.

La recta tangente en este punto es $y = 1$.

Ahora encontramos la tangente a la curva con pendiente 6. Derivamos la función:

$$f'(x) = 2x + 2$$

Igualamos a 6:

$$2x + 2 = 6$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

El valor de y en este punto es:

$$y = 2^2 + 2 \cdot 2 + 2 = 4 + 4 + 2 = 10$$

Entonces, la recta tangente en $x = 2$ es $y = 6(x - 2) + 10$.

$$y = 6x - 12 + 10$$

$$y = 6x - 2$$

El área está dada por la integral:

$$A = \int_{-1}^{2} (x^2 + 2x + 2)\, dx - \int_{-1}^{2} (6x - 2)\, dx$$

Evaluamos cada integral por separado:

$$\int_{-1}^{2} (x^2 + 2x + 2)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} + 2^2 + 2 \cdot 2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 2(-1)\right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 4 + 4\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 - 2\right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 8\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} + \frac{24}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{3}\right)$$

$$= \frac{32}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{32}{3} + \frac{4}{3}$$

$$= \frac{36}{3}$$

$$= 12$$

Evaluamos la segunda integral:

$$\int_{-1}^{2} (6x - 2)\, dx = \left[3x^2 - 2x\right]_{-1}^{2}$$

Evaluamos los límites:

$$= \left(3(2)^2 - 2(2)\right) - \left(3(-1)^2 - 2(-1)\right)$$

$$= (3 \cdot 4 - 4) - (3 \cdot 1 + 2)$$

$$= (12 - 4) - (3 + 2)$$

$$= 8 - 5$$

$$= 3$$

Entonces, el área total es:

$$A = 12 - 3$$

$$A = 9$$

Por lo tanto, el área limitada por la curva, la recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo y la tangente a la curva con pendiente 6 es 9 unidades cuadradas.

Ejercicio 1.7

Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $f(x) = -x^2 + 9x$ y las rectas $y = 20$; $x = 0$ y $y + 15 = 0$.

Primero, encontramos los puntos de intersección resolviendo $-x^2 + 9x = 20$:

$$-x^2 + 9x - 20 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 80}}{-2}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{161}}{-2}$$

Entonces, los puntos de intersección son $x = 5$ y $x = 4$.

El área está dada por la integral:

$$A = \int_4^5 (-x^2 + 9x - 20)\,dx$$

Evaluamos la integral:

$$A = \int_4^5 (-x^2 + 9x - 20)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} - 20x\right]_4^5$$

$$= \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{9 \cdot 5^2}{2} - 20 \cdot 5\right) - \left(-\frac{4^3}{3} + \frac{9 \cdot 4^2}{2} - 20 \cdot 4\right)$$

$$= \left(-\frac{125}{3} + \frac{225}{2} - 100\right) - \left(-\frac{64}{3} + \frac{144}{2} - 80\right)$$

Simplificamos cada término:

$$= \left(-\frac{125}{3} + \frac{225}{2} - 100\right) - \left(-\frac{64}{3} + \frac{144}{2} - 80\right)$$

$$= \left(-\frac{125}{3} + \frac{225}{2} - 100\right) - \left(-\frac{64}{3} + \frac{144}{2} - 80\right)$$

$$= \left(-\frac{125}{3} + \frac{225}{2} - 100\right) - \left(-\frac{64}{3} + \frac{144}{2} - 80\right)$$

Ejercicio 1.8

Dada la parábola $y = 4 - x^2$, representa y calcula el área de la región delimitada por la parábola y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$, entre el eje de ordenadas, y la recta $x = a$, donde a es la abscisa del punto de corte entre la tangente y el eje OX.

Primero, encontramos la recta tangente a la parábola en el punto $x = 1$:

$$y = 4 - x^2$$

Derivamos:

$$y' = -2x$$

Evaluamos en $x = 1$:

$$y' = -2(1) = -2$$

La tangente en $x = 1$ es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = -2(x - 1)$$

$$y = -2x + 5$$

Ahora encontramos el punto a donde la tangente corta al eje OX:

$$0 = -2a + 5$$

$$2a = 5$$

$$a = \frac{5}{2}$$

El área está dada por la integral:

$$A = \int_0^{\frac{5}{2}} (4 - x^2 - (-2x + 5))\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{5}{2}} (4 - x^2 + 2x - 5)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{5}{2}} (-x^2 + 2x - 1)\,dx$$

Evaluamos la integral:

$$A = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 - x \right]_0^{\frac{5}{2}}$$

$$= \left(-\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^3}{3} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right) \right) - (0)$$

$$= \left(-\frac{125}{24} + \frac{25}{4} - \frac{5}{2} \right)$$

$$= -\frac{125}{24} + \frac{150}{24} - \frac{60}{24}$$

$$= \frac{150 - 125 - 60}{24}$$

$$= \frac{-35}{24}$$

Ejercicio 1.9

Calcula el área de la región delimitada por las gráficas de $f(x) = xe^x$, $y = 0$ y $x = 1$.

El área está dada por la integral:

$$A = \int_0^1 xe^x \, dx$$

Usamos integración por partes. Sea $u = x$ y $dv = e^x \, dx$.

Entonces, $du = dx$ y $v = e^x$.

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx$$

$$= xe^x - e^x + C$$

Evaluamos la integral en los límites:

$$A = \left[xe^x - e^x \right]_0^1$$

$$= (1e^1 - e^1) - (0 - 1)$$

$$= (e - e) - (-1)$$

$$= 1$$

Ejercicio 1.10

Dada la parábola $y = x^2 - 4$, calcula el área de la región limitada por esa parábola, su tangente en el punto $x = 1$, y el eje vertical. Nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad.

Primero, encontramos la tangente en el punto $x = 1$:

$$y = x^2 - 4$$

Derivamos:

$$y' = 2x$$

Evaluamos en $x = 1$:

$$y' = 2(1) = 2$$

La tangente en $x = 1$ es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-3) = 2(x - 1)$$

$$y + 3 = 2x - 2$$

$$y = 2x - 5$$

El área está dada por la integral:

$$A = \int_{-2}^{1} (x^2 - 4 - (2x - 5))\, dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (x^2 - 4 - 2x + 5)\, dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (x^2 - 2x + 1)\, dx$$

Evaluamos la integral:

$$A = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 + (-2) \right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 1 + 1 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 4 - 2 \right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{8}{3} - 6 \right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{8}{3} + 6$$

$$= \frac{9}{3} + 6$$

$$= 3 + 6$$

$$= 9$$

Ejercicio 1.11

Dibuja y calcula el área del recinto limitado por las parábolas $y = x^2 - 4x$ y $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$.

Primero, encontramos los puntos de intersección resolviendo $x^2 - 4x = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$:

$$x^2 - 4x = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$$

Multiplicamos todo por 2 para eliminar el denominador:

$$2x^2 - 8x = -x^2 + 4x$$

Reordenamos para obtener una ecuación cuadrática estándar:

$$3x^2 - 12x = 0$$

Factorizamos:

$$3x(x - 4) = 0$$

Entonces, los puntos de intersección son $x = 0$ y $x = 4$.

El área está dada por la integral:

$$A = \int_{0}^{4} \left(\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right) - (x^2 - 4x) \right)\, dx$$

$$= \int_{0}^{4} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - x^2 + 4x \right)\, dx$$

$$= \int_{0}^{4} \left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x \right)\, dx$$

Evaluamos la integral:

$$A = \left[-\frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + 6 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{0}^{4}$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^3 + 3x^2\right]_0^4$$

Evaluamos los límites:

$$= \left(-\frac{1}{2} \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2\right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \cdot 64 + 3 \cdot 16\right)$$

$$= (-32 + 48)$$

$$= 16$$

Por lo tanto, el área del recinto limitado por las parábolas es 16 unidades cuadradas.

Ejercicio 1.12

Calcula el área entre la gráfica de $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1 + \ln x & \text{si } x \in [1, e] \end{cases}$ y el eje en $(0, e)$.

El área está dada por la suma de dos integrales:

$$A = \int_0^1 x\,dx + \int_1^e (1 + \ln x)\,dx$$

Evaluamos cada integral por separado:

$$A_1 = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_1^e (1 + \ln x)\,dx$$

Para esta integral, usamos la propiedad lineal de la integral:

$$A_2 = \int_1^e 1\,dx + \int_1^e \ln x\,dx$$

La primera parte es:

$$\int_1^e 1\,dx = [x]_1^e = e - 1$$

Para la segunda parte, usamos integración por partes. Sea $u = \ln x$ y $dv = dx$. Entonces, $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = x$:

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x \ln x - \int 1\,dx = x \ln x - x$$

Evaluamos en los límites de integración:

$$\int_1^e \ln x\,dx = [x \ln x - x]_1^e = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1)$$

$$= (e \cdot 1 - e) - (0 - 1) = e - e + 1 = 1$$

Entonces,

$$A_2 = e - 1 + 1 = e$$

El área total es:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} + e$$

Ejercicio 1.13

Dibuja y calcula el área de la región del primer cuadrante limitada por la gráfica de la parábola $y = \frac{x^2}{2} + 1$, su recta normal en el punto de abscisa $x = 1$, y los ejes.

Primero, derivamos la parábola para encontrar la pendiente de la tangente en $x = 1$:

$$y = \frac{x^2}{2} + 1$$

$$y' = x$$

En $x = 1, y' = 1$. La pendiente de la tangente es 1, por lo que la pendiente de la normal es -1 (perpendicular).

La ecuación de la recta normal es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Con $m = -1$, $x_1 = 1$, y $y_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$:

$$y - \frac{3}{2} = -1(x - 1)$$

$$y = -x + 1 + \frac{3}{2}$$

$$y = -x + \frac{5}{2}$$

Para encontrar los puntos de intersección entre la parábola y la normal:

$$\frac{x^2}{2} + 1 = -x + \frac{5}{2}$$

Multiplicamos todo por 2 para eliminar el denominador:

$$x^2 + 2 = -2x + 5$$

Reordenamos para obtener una ecuación cuadrática estándar:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x = 1 \text{ o } x = -3$$

Dado que estamos en el primer cuadrante, tomamos $x = 1$.

El área está dada por la integral:

$$A = \int_0^1 \left(-x + \frac{5}{2}\right) - \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(-x + \frac{5}{2} - \frac{x^2}{2} - 1\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(-x - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\right) dx$$

Evaluamos la integral:

$$A = \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{2}\right]_0^1$$

$$= \left(-\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{6} + \frac{3 \cdot 1}{2}\right) - (0)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{-3}{6} - \frac{1}{6} + \frac{9}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{-3 - 1 + 9}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)$$

Por lo tanto, el área de la región es $\frac{5}{6}$ unidades cuadradas.

Ejercicio 1.14

Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $y = 2 - \frac{x^2}{2}$, su recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$, y el eje OX.

Primero, derivamos la parábola para encontrar la pendiente de la tangente en $x = 1$:

$$y = 2 - \frac{x^2}{2}$$

$$y' = -x$$

En $x = 1$, $y' = -1$.

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Con $m = -1$, $x_1 = 1$, y $y_1 = 2 - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}$:

$$y - \frac{3}{2} = -1(x - 1)$$

$$y = -x + 1 + \frac{3}{2}$$

$$y = -x + \frac{5}{2}$$

La intersección de la tangente con el eje OX es donde $y = 0$:

$$0 = -x + \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Entonces, los límites de integración son de $x = 0$ a $x = \frac{5}{2}$.

El área está dada por la integral:

$$A = \int_0^{\frac{5}{2}} \left(2 - \frac{x^2}{2} - 0\right) dx - \int_1^{\frac{5}{2}} \left(-x + \frac{5}{2}\right) dx$$

Evaluamos cada integral por separado:

$$A_1 = \int_0^1 \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

Evaluamos la integral:

$$A_1 = \left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_0^1$$

$$= \left(2(1) - \frac{1^3}{6}\right) - \left(2(0) - \frac{0^3}{6}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{12}{6} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{11}{6}$$

Ahora evaluamos la segunda integral:

$$A_2 = \int_1^{\frac{5}{2}} \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

Evaluamos la integral:

$$A_2 = \left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_1^{\frac{5}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(2 \cdot \frac{5}{2} - \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^3}{6}\right) - \left(2(1) - \frac{1^3}{6}\right) \\
&= \left(5 - \frac{125}{48}\right) - \left(2 - \frac{1}{6}\right) \\
&= 5 - \frac{125}{48} - 2 + \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Ahora, para simplificar, debemos convertir todos los términos al mismo denominador:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{240}{48} - \frac{125}{48} - \frac{96}{48} + \frac{8}{48} \\
&= \frac{240 - 125 - 96 + 8}{48} \\
&= \frac{27}{48}
\end{aligned}
$$

Simplificamos:

$$= \frac{9}{16}$$

El área total es:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{11}{6} + \frac{9}{16}$$

Para sumar estas fracciones, necesitamos un denominador común:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{11 \cdot 16}{6 \cdot 16} + \frac{9 \cdot 6}{16 \cdot 6} \\
A &= \frac{176}{96} + \frac{54}{96} \\
A &= \frac{230}{96}
\end{aligned}
$$

Simplificamos la fracción:

$$A = \frac{115}{48}$$

Por lo tanto, el área de la región es $\frac{115}{48}$ unidades cuadradas.

2. Teoría + Aplicaciones (Teorema Fundamental del Cálculo)

2.1. Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral.

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces la función F definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

es continua en $[a, b]$, diferenciable en el intervalo abierto (a, b), y $F'(x) = f(x)$ para todo x en (a, b).

2.2. Teorema del valor medio del cálculo integral.

El teorema del valor medio del cálculo integral establece que si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que:

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b - a)$$

Este teorema indica que hay al menos un punto en el intervalo $[a, b]$ donde la función toma su valor promedio.

2.3. Enuncia la regla de Barrow.

La regla de Barrow, que es una forma de expresar el teorema fundamental del cálculo, establece que si F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Esto significa que para evaluar una integral definida, podemos encontrar cualquier antiderivada de la función integranda y calcular la diferencia de sus valores en los extremos del intervalo de integración.

2.4. Sea la función $F(x) = \int_0^x \log(t^2 + 4)\, dt$. Calcula $F'(x)$.

Utilizamos el teorema fundamental del cálculo para derivar $F(x)$:

$$F'(x) = \log(x^2 + 4)$$

2.5. Se define $F(x) = \int_0^{e^x - x - 1} e^{-t^2}\, dt$. Calcula $F'(0)$.

Aplicamos la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = e^{-(e^x - x - 1)^2} \cdot \frac{d}{dx}(e^x - x - 1)$$

Calculamos la derivada del límite superior:

$$\frac{d}{dx}(e^x - x - 1) = e^x - 1$$

Entonces,

$$F'(x) = e^{-(e^x - x - 1)^2} \cdot (e^x - 1)$$

Evaluamos en $x = 0$:

$$F'(0) = e^{-(e^0 - 0 - 1)^2} \cdot (e^0 - 1) = e^{-(1-1)^2} \cdot (1 - 1) = e^0 \cdot 0 = 0$$

2.6. Sea $F(x) = \int_0^{2x} \cos t\, dt$. Halla los posibles extremos de dicha función en el intervalo $[0, \pi]$.

Primero, derivamos $F(x)$ usando el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena:

$$F'(x) = \cos(2x) \cdot \frac{d}{dx}(2x) = 2\cos(2x)$$

Para encontrar los extremos, igualamos la derivada a cero:

$$2\cos(2x) = 0$$

$$\cos(2x) = 0$$

Los valores de $2x$ que satisfacen esto en el intervalo $[0, 2\pi]$ son:

$$2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots$$

Los valores de x en el intervalo $[0, \pi]$ son:

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

Evaluamos $F(x)$ en los puntos críticos y en los extremos del intervalo para determinar los valores máximos y mínimos:

$$F(0) = \int_0^0 \cos t\, dt = 0$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$$

$$F\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos t\, dt = \sin t\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = -1$$

$$F(\pi) = \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = \sin t\Big|_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0$$

Los posibles extremos de $F(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$ son 1, -1, y 0.

2.7. Se define $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+e^t}\, dt$. Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x}$.

Aplicamos el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{1}$$

Derivamos $g(x)$ usando el teorema fundamental del cálculo:

$$g'(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$$

2.8. Halla los puntos donde se anula la derivada de la función $f(x) = -2x + \int_0^{2x} e^{t^2-10t+24}\,dt$.

Primero, derivamos $f(x)$ usando la regla de Leibniz para la derivada de una integral con límites variables:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 + e^{(2x)^2-10(2x)+24} \cdot \frac{d}{dx}(2x) \\ &= -2 + e^{4x^2-20x+24} \cdot 2 \\ &= -2 + 2e^{4x^2-20x+24} \end{aligned}$$

Igualamos a cero para encontrar los puntos críticos:

$$-2 + 2e^{4x^2-20x+24} = 0$$

$$e^{4x^2-20x+24} = 1$$

Tomamos el logaritmo natural en ambos lados:

$$4x^2 - 20x + 24 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

Los puntos donde se anula la derivada son $x = 2$ y $x = 3$.

2.9. Considera la función $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t})\,dt$. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

Primero, derivamos $F(x)$ usando el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = 2x + \sqrt{x}$$

Evaluamos $F'(x)$ en $x = 1$:

$$F'(1) = 2(1) + \sqrt{1} = 2 + 1 = 3$$

Calculamos $F(1)$:

$$F(1) = \int_0^1 (2t + \sqrt{t})\,dt$$

Descomponemos la integral:

$$F(1) = \int_0^1 2t\,dt + \int_0^1 \sqrt{t}\,dt$$

Evaluamos cada integral por separado:

$$\int_0^1 2t\,dt = \left[t^2\right]_0^1 = 1$$

$$\int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Entonces,

$$F(1) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - F(1) = F'(1)(x-1)$$

Sustituimos los valores calculados:

$$y - \frac{5}{3} = 3(x - 1)$$

Simplificamos:

$$y = 3x - 3 + \frac{5}{3}$$

$$y = 3x - \frac{9}{3} + \frac{5}{3}$$

$$y = 3x - \frac{4}{3}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 3x - \frac{4}{3}$.

2.10. Dada la función $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, ¿tiene $F(x)$ puntos de inflexión? Justifica la respuesta.

Para determinar si $F(x)$ tiene puntos de inflexión, necesitamos encontrar la segunda derivada y verificar dónde cambia su signo.

Primero, derivamos $F(x)$:

$$F'(x) = e^{-x^2}$$

Ahora derivamos nuevamente para encontrar $F''(x)$:

$$F''(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2}$$

Para encontrar los puntos de inflexión, buscamos donde $F''(x) = 0$:

$$-2xe^{-x^2} = 0$$

Como e^{-x^2} nunca es cero, la única solución es:

$$x = 0$$

Ahora, verificamos el cambio de signo de $F''(x)$ alrededor de $x = 0$:

- Para $x < 0$, $F''(x) = -2xe^{-x^2} > 0$
- Para $x > 0$, $F''(x) = -2xe^{-x^2} < 0$

Entonces, $F(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

2.11. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x) = \int_0^x [2 + \cos(t^2)]\,dt$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Primero, derivamos $F(x)$:

$$F'(x) = 2 + \cos(x^2)$$

Evaluamos $F'(x)$ en $x = 0$:

$$F'(0) = 2 + \cos(0^2) = 2 + 1 = 3$$

Calculamos $F(0)$:

$$F(0) = \int_0^0 [2 + \cos(t^2)]\,dt = 0$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - F(0) = F'(0)(x - 0)$$

Sustituimos los valores calculados:

$$y - 0 = 3(x - 0)$$

Simplificamos:

$$y = 3x$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x$.

2.12. Sabiendo que $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = x^2(x + 1)$, calcula $f(2)$.

Para encontrar $f(x)$, derivamos $F(x)$ usando el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = f(x)$$

Derivamos $F(x)$:

$$F(x) = x^2(x+1) = x^3 + x^2$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 + x^2) = 3x^2 + 2x$$

Entonces, $f(x) = 3x^2 + 2x$.

Evaluamos en $x = 2$:

$$f(2) = 3(2)^2 + 2(2) = 3 \cdot 4 + 4 = 12 + 4 = 16$$

Por lo tanto, $f(2) = 16$.

2.13. Calcula la derivada de $F(x) = \int_0^{x^2+x} \cos(t)\, dt$. Obtén los valores de $F(0)$ y $F'(0)$.

Primero, derivamos $F(x)$ usando la regla de Leibniz para la derivada de una integral con límites variables:

$$F(x) = \int_0^{x^2+x} \cos(t)\, dt$$

$$F'(x) = \cos(x^2 + x) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + x)$$

Derivamos el límite superior:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + x) = 2x + 1$$

Entonces,

$$F'(x) = \cos(x^2 + x) \cdot (2x + 1)$$

Evaluamos en $x = 0$:

$$F'(0) = \cos(0^2 + 0) \cdot (2(0) + 1) = \cos(0) \cdot 1 = 1$$

Calculamos $F(0)$:

$$F(0) = \int_0^{0^2+0} \cos(t)\, dt = \int_0^0 \cos(t)\, dt = 0$$

Por lo tanto, $F(0) = 0$ y $F'(0) = 1$.

3. Aplicación Integral Definida

3.1. Calcula el valor de a para que el área de $f(x) = x^2 + ax - 3$ sea $\frac{7}{3}$ en $[3, 4]$.

El área bajo la curva $f(x)$ entre $x = 3$ y $x = 4$ está dada por:

$$\int_3^4 (x^2 + ax - 3)\, dx = \frac{7}{3}$$

Evaluamos la integral:

$$\int (x^2 + ax - 3)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - 3x$$

Evaluamos en los límites de integración:

$$\left[\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - 3x\right]_3^4 = \frac{7}{3}$$

$$\left(\frac{4^3}{3} + \frac{a \cdot 4^2}{2} - 3 \cdot 4\right) - \left(\frac{3^3}{3} + \frac{a \cdot 3^2}{2} - 3 \cdot 3\right) = \frac{7}{3}$$

Simplificamos cada término:

$$\left(\frac{64}{3} + \frac{16a}{2} - 12\right) - \left(\frac{27}{3} + \frac{9a}{2} - 9\right) = \frac{7}{3}$$

$$\left(\frac{64}{3} + 8a - 12\right) - \left(9 + \frac{9a}{2} - 9\right) = \frac{7}{3}$$

$$\left(\frac{64}{3} + 8a - 12\right) - \left(\frac{27}{3} + \frac{9a}{2} - 9\right) = \frac{7}{3}$$

$$\frac{64}{3} - \frac{27}{3} + 8a - \frac{9a}{2} - 3 = \frac{7}{3}$$

$$\frac{37}{3} + 8a - \frac{9a}{2} - 3 = \frac{7}{3}$$

Convertimos 3 a fracción con el mismo denominador:

$$\frac{37}{3} - \frac{9}{3} + 8a - \frac{9a}{2} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{28}{3} + 8a - \frac{9a}{2} = \frac{7}{3}$$

Multiplicamos todo por 6 para eliminar fracciones:

$$28 \cdot 2 + 8a \cdot 6 - 9a \cdot 3 = 7 \cdot 2$$

$$56 + 48a - 27a = 14$$

$$56 + 21a = 14$$

$$21a = 14 - 56$$

$$21a = -42$$

$$a = -2$$

Por lo tanto, $a = -2$.

3.2. Calcula el valor positivo de p para el que $\int_0^p \frac{x}{x^2+1}\,dx = 1$.

Para resolver esta integral, usamos sustitución:

Sea $u = x^2 + 1 \implies du = 2x\,dx \implies \frac{du}{2} = x\,dx$.

Reescribimos la integral:

$$\int_0^p \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{p^2+1} \frac{du}{u} = 1$$

Evaluamos la integral:

$$\frac{1}{2}[\ln|u|]_1^{p^2+1} = 1$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln|p^2+1| - \ln|1|\right) = 1$$

$$\frac{1}{2}\ln(p^2+1) = 1$$

Multiplicamos ambos lados por 2:

$$\ln(p^2+1) = 2$$

Aplicamos la función exponencial a ambos lados:

$$p^2 + 1 = e^2$$

$$p^2 = e^2 - 1$$

$$p = \sqrt{e^2 - 1}$$

Por lo tanto, $p = \sqrt{e^2 - 1}$.

3.3. Sea la función $f(x) = xe^{3x}$. Sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de f y el eje OX entre $x = 0$ y $x = p$ ($p > 0$) vale $\frac{1}{9}$, calcular el valor de p.

El área bajo la curva $f(x)$ entre $x = 0$ y $x = p$ está dada por:

$$\int_0^p xe^{3x}\,dx = \frac{1}{9}$$

Usamos integración por partes. Sea $u = x$ y $dv = e^{3x}\,dx$.

Entonces, $du = dx$ y $v = \frac{e^{3x}}{3}$.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int xe^{3x}\,dx = x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\,dx$$

$$= \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$$

Evaluamos en los límites de integración:

$$\left[\frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}\right]_0^p = \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{pe^{3p}}{3} - \frac{e^{3p}}{9}\right) - \left(0 - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9}$$

Simplificamos:

$$\frac{pe^{3p}}{3} - \frac{e^{3p}}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

Multiplicamos todo por 9 para eliminar fracciones:

$$3pe^{3p} - e^{3p} + 1 = 1$$

Simplificamos:

$$3pe^{3p} - e^{3p} = 0$$

Factorizamos e^{3p}:

$$e^{3p}(3p - 1) = 0$$

$$3p - 1 = 0$$

$$3p = 1$$

$$p = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, $p = \frac{1}{3}$.

3.4. Halla el polinomio $P(x)$ de segundo grado que pasa por los puntos (0, 1) y (3, 0), sabiendo que $\int_0^3 P(x)\,dx = \frac{4}{3}$.

Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Dado que pasa por los puntos (0, 1) y (3, 0):

1. $P(0) = 1 \implies c = 1$
2. $P(3) = 0 \implies 9a + 3b + 1 = 0 \implies 9a + 3b = -1 \implies 3a + b = -\frac{1}{3}$

Sabemos que:

$$\int_0^3 P(x)\,dx = \frac{4}{3}$$

Evaluamos la integral:

$$\int_0^3 (ax^2 + bx + 1)\,dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + x\right]_0^3$$

$$= \left(\frac{a \cdot 27}{3} + \frac{b \cdot 9}{2} + 3\right) - (0) = \frac{4}{3}$$

$$9a + \frac{9b}{2} + 3 = \frac{4}{3}$$

Multiplicamos todo por 6 para eliminar fracciones:

$$54a + 27b + 18 = 8$$

Simplificamos:

$$54a + 27b = -10$$

Usamos la ecuación $3a + b = -\frac{1}{3}$:

$$3a + b = -\frac{1}{3}$$

Multiplicamos esta ecuación por 9 para que coincida con el coeficiente de a en la otra ecuación:

$$27a + 9b = -3$$

Restamos esta ecuación de la anterior:

$$54a + 27b - 27a - 9b = -10 + 3$$

$$27a + 18b = -7$$

Dividimos todo por 9:

$$3a + 2b = -\frac{7}{9}$$

Tenemos el sistema de ecuaciones:

$$3a + b = -\frac{1}{3}$$

$$3a + 2b = -\frac{7}{9}$$

Restamos la primera ecuación de la segunda:

$$3a + 2b - 3a - b = -\frac{7}{9} + \frac{1}{3}$$

$$b = -\frac{7}{9} + \frac{3}{9}$$

$$b = -\frac{4}{9}$$

Sustituimos b en la primera ecuación:

$$3a + \left(-\frac{4}{9}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$3a - \frac{4}{9} = -\frac{1}{3}$$

Multiplicamos todo por 9 para eliminar fracciones:

$$27a - 4 = -3$$

$$27a = 1$$

$$a = \frac{1}{27}$$

Por lo tanto, $P(x) = \frac{1}{27}x^2 - \frac{4}{9}x + 1$.

3.5. Dadas la recta $y = mx$ y la curva $y = x^3$, calcula para qué valores de x se cortan, y obtén el valor de m para que el área del recinto limitado por la recta y la curva sea 2.

Primero, encontramos los puntos de intersección:

$$mx = x^3$$

$$x(mx - x^2) = 0$$

$$x(x(m - x)) = 0$$

Los puntos de intersección son $x = 0$ y $x = m$.

El área entre las dos curvas está dada por:

$$\int_0^m (mx - x^3)\, dx = 2$$

Evaluamos la integral:

$$\int (mx - x^3)\, dx = \left[\frac{mx^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^m$$

Evaluamos en los límites de integración:

$$\left(\frac{m \cdot m^2}{2} - \frac{m^4}{4}\right) - (0) = 2$$

Simplificamos:

$$\frac{m^3}{2} - \frac{m^4}{4} = 2$$

Multiplicamos todo por 4 para eliminar fracciones:

$$2m^3 - m^4 = 8$$

Factorizamos:

$$m^3(2 - m) = 8$$

$$m = 2$$

Por lo tanto, $m = 2$.

3.6. Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que $P(0) = P(2) = 1$ y

$$\int_0^2 P(x)\,dx = \frac{1}{3}$$

Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Dado que $P(0) = 1$ y $P(2) = 1$, tenemos:

1. $P(0) = 1 \implies c = 1$
2. $P(2) = 1 \implies 4a + 2b + 1 = 1 \implies 4a + 2b = 0 \implies 2a + b = 0 \implies b = -2a$

Evaluamos la integral:

$$\int_0^2 (ax^2 - 2ax + 1)\,dx = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^2 ax^2\,dx - 2a\int_0^2 x\,dx + \int_0^2 1\,dx = \frac{1}{3}$$

Evaluamos cada término por separado:

$$a\int_0^2 x^2\,dx = a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = a\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{8a}{3}$$

$$-2a\int_0^2 x\,dx = -2a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -2a(2) = -4a$$

$$\int_0^2 1\,dx = [x]_0^2 = 2$$

Sustituimos en la integral original:

$$\frac{8a}{3} - 4a + 2 = \frac{1}{3}$$

Multiplicamos todo por 3 para eliminar fracciones:

$$8a - 12a + 6 = 1$$

$$-4a + 6 = 1$$

$$-4a = -5$$

$$a = \frac{5}{4}$$

$$b = -2a = -2\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{5}{2}$$

Por lo tanto, el polinomio es $P(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$.

3.7. Sea la función $f(x) = \sin x$, calcular $a > 0$ tal que el área encerrada por la gráfica de f, los ejes $x = 0$ e $y = 0$, y la

recta $x = a$, sea $\frac{1}{2}$. Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$.

El área bajo la curva $f(x)$ entre $x = 0$ y $x = a$ está dada por:

$$\int_0^a \sin x \, dx = \frac{1}{2}$$

Evaluamos la integral:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

Evaluamos en los límites de integración:

$$[-\cos x]_0^a = \frac{1}{2}$$

$$-\cos(a) + \cos(0) = \frac{1}{2}$$

$$-\cos(a) + 1 = \frac{1}{2}$$

$$-\cos(a) = \frac{1}{2} - 1$$

$$-\cos(a) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(a) = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{\pi}{3}$$

Para calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$, primero derivamos $f(x)$:

$$f'(x) = \cos x$$

Evaluamos $f(x)$ y $f'(x)$ en $x = \frac{\pi}{4}$:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Sustituimos los valores calculados:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Simplificamos:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

Sumamos $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a ambos lados para obtener la ecuación en la forma $y = mx + b$:

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Factorizamos $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en el término constante:

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{8}(\pi - 4)$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$ es:

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{8}(\pi - 4)$$

3.8. Sea f una función continua en el intervalo $[2, 3]$ y F una primitiva de f tal que $F(2) = 1$ y $F(3) = 2$, calcula $\int_2^3 (5f(x) - 7)\, dx$.

Primero, recordamos que F es una primitiva de f, por lo tanto, $F'(x) = f(x)$. Utilizamos el teorema fundamental del cálculo para resolver la integral.

$$\int_2^3 (5f(x) - 7)\, dx = 5 \int_2^3 f(x)\, dx - \int_2^3 7\, dx$$

Usamos el teorema fundamental del cálculo para evaluar la primera integral:

$$\int_2^3 f(x)\, dx = F(3) - F(2) = 2 - 1 = 1$$

Entonces,

$$5 \int_2^3 f(x)\, dx = 5 \cdot 1 = 5$$

Para la segunda integral, sabemos que la integral de una constante es la constante multiplicada por la longitud del intervalo:

$$\int_2^3 7\, dx = 7 \cdot (3 - 2) = 7$$

Entonces,

$$\int_2^3 (5f(x) - 7)\, dx = 5 - 7 = -2$$

3.9. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en $(0, 0)$ y $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{5}{4}$. Calcula a, b, c, d.

Primero, para que $f(x)$ tenga un máximo relativo en $x = 1, f'(1) = 0$ y $f''(1) \leq 0$. Para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en $(0, 0), f(0) = 0$ y $f''(0) = 0$.

La derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Evaluamos $f'(1)$:

$$f'(1) = 3a(1)^2 + 2b(1) + c = 3a + 2b + c = 0 \quad (1)$$

La segunda derivada de $f(x)$ es:

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Evaluamos $f''(1)$:

$$f''(1) = 6a(1) + 2b = 6a + 2b \quad (\text{debe ser} \leq 0)$$

Para el punto de inflexión en $(0, 0)$, evaluamos $f(0)$ y $f''(0)$:

$$f(0) = a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = d = 0 \quad (2)$$

$$f''(0) = 6a(0) + 2b = 2b = 0 \implies b = 0 \quad (3)$$

Sustituimos $b = 0$ en la ecuación (1):

$$3a + c = 0 \implies c = -3a \quad (4)$$

Dado que $d = 0$, la función se simplifica a $f(x) = ax^3 + cx$. Usamos la condición de la integral:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 (ax^3 - 3ax)\, dx = \frac{5}{4}$$

Evaluamos la integral:

$$\int_0^1 (ax^3 - 3ax)\, dx = \left[\frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{a(1)^4}{4} - \frac{3a(1)^2}{2}\right) - \left(\frac{a(0)^4}{4} - \frac{3a(0)^2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{4} - \frac{3a}{2}\right) - 0$$

$$= \frac{a}{4} - \frac{6a}{4} = -\frac{5a}{4}$$

Entonces,

$$-\frac{5a}{4} = \frac{5}{4} \implies a = -1$$

Sustituimos a en la ecuación (4):

$$c = -3(-1) = 3$$

Por lo tanto, los valores son:

$$a = -1, \quad b = 0, \quad c = 3, \quad d = 0$$

4. Matrices (Operaciones, Inversa, Rangos, Potencias…)

4.1. Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, prueba que B siempre es invertible y calcula su inversa.

Para probar que B es invertible, debemos mostrar que su determinante no es cero. La matriz B es una matriz triangular superior, y el determinante de una matriz triangular es el producto de sus elementos diagonales.

$$\det(B) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

Por lo tanto, B es invertible.

Para calcular la inversa de B, recordamos que la inversa de una matriz triangular superior tiene la misma estructura. Calculamos la inversa usando operaciones de matrices.

Sea $B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Entonces, $B \cdot B^{-1} = I$.

Multiplicamos las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos las ecuaciones resultantes:

1. $a = 1$
2. $k \cdot a + e = 1 \implies e = 1$
3. $k \cdot d + 1 \cdot g = 0 \implies g = 0$
4. $t \cdot a + k \cdot d + i = 1 \implies i = 1$
5. $k \cdot b + f = 0 \implies f = -k$
6. $t \cdot b + k \cdot e + h = 0 \implies h = -t$
7. $t \cdot c + k \cdot f + i = 0 \implies c = -k^2 - t$

Entonces, la inversa es:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{128} y A^{2023}.

Primero, calculamos A^2 para encontrar un posible patrón.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos $A^2 = A \cdot A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (4 \cdot 4 + 5 \cdot -3 + -1 \cdot -3) & (4 \cdot 5 + 5 \cdot -4 + -1 \cdot -3) & (4 \cdot -1 + 5 \cdot 1 + -1 \cdot 0) \\ (-3 \cdot 4 + -4 \cdot -3 + 1 \cdot -3) & (-3 \cdot 5 + -4 \cdot -4 + 1 \cdot -3) & (-3 \cdot -1 + -4 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \\ (-3 \cdot 4 + -3 \cdot -3 + 0 \cdot -3) & (-3 \cdot 5 + -3 \cdot -4 + 0 \cdot -3) & (-3 \cdot -1 + -3 \cdot 1 + 0 \cdot 0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (16 - 15 + 3) & (20 - 20 + 3) & (-4 + 5) \\ (-12 + 12 - 3) & (-15 + 16 - 3) & (3 - 4) \\ (-12 + 9) & (-15 + 12) & (3 - 3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos $A^3 = A^2 \cdot A$:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (4 \cdot 4 + 3 \cdot -3 + 1 \cdot -3) & (4 \cdot 5 + 3 \cdot -4 + 1 \cdot -3) & (4 \cdot -1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \\ (-3 \cdot 4 + -2 \cdot -3 + -1 \cdot -3) & (-3 \cdot 5 + -2 \cdot -4 + -1 \cdot -3) & (-3 \cdot -1 + -2 \cdot 1 + -1 \cdot 0) \\ (-3 \cdot 4 + -3 \cdot -3 + 0 \cdot -3) & (-3 \cdot 5 + -3 \cdot -4 + 0 \cdot -3) & (-3 \cdot -1 + -3 \cdot 1 + 0 \cdot 0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (16 - 9 - 3) & (20 - 12 - 3) & (-4 + 3) \\ (-12 + 6 + 3) & (-15 + 8 + 3) & (3 - 2) \\ (-12 + 9) & (-15 + 12) & (3 - 3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Observamos que $A^3 = A$, lo cual indica que la matriz A es cíclica con un período de 3.

Para potencias altas, utilizamos esta propiedad cíclica:

$$A^{128} = A^{3 \cdot 42 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2$$

$$A^{2023} = A^{3 \cdot 674 + 1} = (A^3)^{674} \cdot A = I \cdot A = A$$

Por lo tanto:

$$A^{128} = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{2023} = A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3. Calcula $A - B$; $A \cdot B$, sabiendo de las matrices cuadradas A y B que:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrar $A - B$, primero necesitamos la inversa de $A + B$.

Calculamos la inversa de $A + B$:

Sea $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matriz inversa de $A + B$ se denota como $(A + B)^{-1}$.

Para encontrar $(A + B)^{-1}$, usamos el método de Gauss-Jordan o la fórmula de la inversa para matrices 3×3. Aquí, la encontramos usando la adjunta y el determinante.

El determinante de $A + B$ es:

$$\det(A + B) = 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0) - 1(4-0) + 0 = -4$$

La matriz de cofactores es:

$$\mathrm{Cof}(A+B) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta es la transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\mathrm{Adj}(A+B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

La inversa es:

$$(A+B)^{-1} = \frac{1}{\det(A+B)}\mathrm{Adj}(A+B) = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos $(A+B)^{-1}$ por $A^2 - AB + BA - B^2$ para obtener $A - B$:

$$A - B = (A+B)^{-1}(A^2 - AB + BA - B^2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2+0+0 & 2+0+0 & 0 \\ 0+2 & 0-1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora que tenemos $A+B$ y $A-B$, podemos resolver para A y B sumando y restando estas ecuaciones.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumamos y restamos para obtener A y B:

$$2A = (A+B) + (A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Para B:

$$2B = (A+B) - (A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos calcular $A \cdot B$ utilizando las matrices que encontramos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 \cdot -\frac{1}{2}) & (1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot -1 + 0 \cdot \frac{1}{2}) & (1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1) \\ (0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot -\frac{1}{2}) & (0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot -1 + 0 \cdot \frac{1}{2}) & (0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) \\ (\frac{3}{2} \cdot 1 + -\frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot -\frac{1}{2}) & (\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + -\frac{1}{2} \cdot -1 + 1 \cdot \frac{1}{2}) & (\frac{3}{2} \cdot 0 + -\frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1) \end{pmatrix}$$

=

$\big((1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 \cdot -\frac{1}{2}) \quad (1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot -1 + 0 \cdot \frac{1}{2}) \quad (1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1)\, (0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot -\frac{1}{2}) \quad (0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot -1 + 0 \cdot \frac{1}{2}) \quad (0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1)\, (\frac{3}{2} \cdot 1 + -\frac{1}{2}$

$$

$$= \begin{pmatrix} 1+1+0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 & 0 \\ 0+2+0 & 0-1+0 & 0 \\ \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{2} & \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & 0+0+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Así, la matriz $A \cdot B$ es:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

4.4. Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -m \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -m & m & 1 \end{pmatrix}$

Para estudiar el rango de la matriz, utilizamos la eliminación gaussiana para llevar la matriz a su forma escalonada.

Partimos de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -m \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -m & m & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos las operaciones necesarias para obtener ceros debajo del primer elemento de la primera columna:

1. $R_2 \leftarrow R_2 + R_1$
2. $R_3 \leftarrow R_3 + 2R_1$

Después de aplicar estas operaciones, la matriz se transforma en:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & 0 & -m \\ 0 & -m+2 & m & -2m+1 \end{pmatrix}$$

Simplificamos la tercera fila:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & 0 & -m \\ 0 & -m+2 & m & -2m+1 \end{pmatrix}$$

Hacemos ceros debajo del pivote en la segunda columna. Para ello, sumamos $(m-2)$ veces la segunda fila a la tercera fila:

$$R_3 \leftarrow R_3 + (m-2)R_2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & 0 & -m \\ 0 & 0 & m & -m^2+3m-2m+1 \end{pmatrix}$$

Simplificamos la tercera fila:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & 0 & -m \\ 0 & 0 & m & -m^2+m+1 \end{pmatrix}$$

Dado que m no afecta a la dependencia lineal de las filas, podemos ver que hay tres filas no nulas, lo que implica que el rango de la matriz A es 3, siempre y cuando $m \neq 0$. Si $m = 0$, el rango se reduce a 2.

4.5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+1 & a^2 & a \\ 0 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$, calcula su rango según los valores de a.

Para estudiar el rango de esta matriz, nuevamente utilizamos la eliminación gaussiana para llevar la matriz a su forma escalonada.

Partimos de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a^2 & a \\ 0 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Realizamos operaciones para obtener ceros debajo del primer elemento de la primera columna:

1. $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$

Después de aplicar estas operaciones, la matriz se transforma en:

$$\begin{pmatrix} a+1 & a^2 & a \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 1-a^2 & (a+1)-a \end{pmatrix}$$

Simplificamos la tercera fila:

$$\begin{pmatrix} a+1 & a^2 & a \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 1-a^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 1$, hacemos ceros en la tercera columna:

1. $R_2 \leftarrow R_2 - (a+1)R_3$
2. $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$

Después de aplicar estas operaciones, la matriz se transforma en:

$$\begin{pmatrix} a+1 & a^2 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Simplificamos la tercera fila:

$$\begin{pmatrix} a+1 & a^2 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz depende de a:

- Si $a \neq 1$, el rango es 3.
- Si $a = 1$, el rango se reduce a 2 porque la última fila será nula.

4.4. Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -m \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -m & m & 1 \end{pmatrix}$

Para estudiar el rango de la matriz A, primero calculamos los determinantes de sus submatrices.

Calculamos el determinante de la matriz A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -m \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -m & m & 1 \end{vmatrix}$$

Eliminamos la segunda fila y tercera columna para simplificar:

$$\det(A) = -1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -m & m & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -m \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot (-m) = -m$$

Si $m \neq 0$, el determinante no es cero y, por lo tanto, el rango de A es 3. Si $m = 0$, el determinante es cero y necesitamos estudiar las submatrices de orden inferior.

Para $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los determinantes de las submatrices de orden 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0) - (1)(1) = -1$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1) - (0)(2) = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (0)(2) = 1$$

Dado que al menos uno de los determinantes de las submatrices de orden 2 es distinto de cero, el rango de A es 2 si $m = 0$.

4.5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+1 & a^2 & a \\ 0 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$**, calcula su rango según los valores de** a**.**

Primero calculamos el determinante de la matriz A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a+1 & a^2 & a \\ 0 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & a+1 \end{vmatrix}$$

Expansión por la segunda fila (la que tiene un cero):

$$\det(A) = 0 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} a+1 & a \\ a+1 & a+1 \end{vmatrix} + (a+1) \cdot \begin{vmatrix} a+1 & a^2 \\ a+1 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculamos los determinantes de las submatrices de orden 2:

$$\begin{vmatrix} a+1 & a \\ a+1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)(a+1) - (a)(a+1) = a^2 + 2a + 1 - a^2 - a = a + 1$$

$$\begin{vmatrix} a+1 & a^2 \\ a+1 & 1 \end{vmatrix} = (a+1)(1) - (a^2)(a+1) = a + 1 - a^2(a+1) = a + 1 - a^3 - a^2$$

Sustituimos en el determinante original:

$$\det(A) = -(a+1) + (a+1)(a+1-a^3-a^2)$$

$$\det(A) = -(a+1) + (a+1)^2 - (a+1)a^3 - (a+1)a^2$$

Simplificamos:

$$\det(A) = -(a+1) + a^2 + 2a + 1 - a^4 - a^3 - a^3 - a^2$$

$$\det(A) = -(a+1) + 2a - a^4 - 2a^3$$

$$\det(A) = -a - 1 + 2a - a^4 - 2a^3$$

$$\det(A) = a - 1 - a^4 - 2a^3$$

Si $a = 0$, el determinante es $-1 \neq 0$, por lo tanto, el rango es 3. Si $a \neq 0$, el rango depende de a. Evaluamos si $a = 1$.

Para $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2-2) - 1(4-2) + 1(2-2) = -2$$

Entonces, para $a = 1$, el rango es 3.

Si $a = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eliminamos filas duplicadas:

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para $a = -1$, el rango es 2.

Por lo tanto, el rango de la matriz A es:

- Si $a = 0$ o $a = 1$, el rango es 3.
- Si $a = -1$, el rango es 2.
- Para otros valores de a, el rango se determina evaluando el determinante.

4.6. Halla X e Y cumpliendo

$$2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula, si es posible X^{-1} e Y^{-1}.

Primero resolvemos el sistema de ecuaciones para encontrar X e Y.

1. $2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$
2. $X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Despejamos Y de la segunda ecuación:

$$Y = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - X\right)$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$$2X - \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - X\right) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos y simplificamos:

$$4X - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + X = 2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$5X - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$$

Despejamos X:

$$5X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5X = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos X en la ecuación para Y:

$$Y = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$$

$$Y = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora verificamos si X e Y son invertibles. Una matriz es invertible si su determinante es distinto de cero.

Determinante de X:

$$\det(X) = 1 \cdot (-2) - (-2) \cdot 1 = -2 + 2 = 0$$

Determinante de Y:

$$\det(Y) = 0 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 0 + 1 = 1$$

Por lo tanto, X no es invertible, pero Y sí lo es.

4.7. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, calcula A^{15} y A^{20}.

Primero, observamos que A es una matriz de permutación cíclica. Calculamos las primeras potencias de A para identificar un patrón:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = I$$

Como $A^3 = I$, sabemos que las potencias de A se repiten cada tres exponentes. Por lo tanto:

$$A^{15} = (A^3)^5 = I^5 = I$$

$$A^{20} = A^{18+2} = (A^3)^6 \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2$$

$$A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.8. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m+1 & m+1 & m \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$, calcula su rango según los valores de m.

Calculamos el determinante de A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} m+1 & m+1 & m \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}$$

Expandimos por la primera fila:

$$\det(A) = (m+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} - (m+1)\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}$$

Calculamos los determinantes de las submatrices de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m$$

$$\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1$$

$$\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

Sustituimos:

4.8. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m+1 & m+1 & m \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$, calcula su rango según los valores de m.

El determinante de A es:

$$\det(A) = m^3 - 2m^2 - m + 2$$

La factorización correcta del polinomio es:

$$m^3 - 2m^2 - m + 2 = (m-2)(m-1)(m+1)$$

Por lo tanto, las raíces del polinomio son $m = 2$, $m = 1$ y $m = -1$. Esto nos ayuda a determinar los valores de m para los cuales el determinante es cero y, por lo tanto, afecta el rango de la matriz.

- Para $m \neq 2, 1, -1$, el determinante es diferente de cero, lo que significa que el rango de A es 3.
- Para $m = 2$, $m = 1$ y $m = -1$, el determinante es cero. Necesitamos evaluar los subdeterminantes de orden inferior para determinar el rango.

Caso $m = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Evaluamos los subdeterminantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 3 - 6 = -3 \neq 0$$

Dado que uno de los subdeterminantes de orden 2 es distinto de cero, el rango de A es 2.

Caso $m = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Evaluamos los subdeterminantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 2 - 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Dado que uno de los subdeterminantes de orden 2 es distinto de cero, el rango de A es 2.

Caso $m = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Evaluamos los subdeterminantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

Dado que uno de los subdeterminantes de orden 2 es distinto de cero, el rango de A es 2.

En resumen, el rango de la matriz A es:

- 3 si $m \neq 2, 1, -1$
- 2 si $m = 2, 1, -1$

4.9. Dadas dos matrices verificando $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ y $A - B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, calcula la matriz $A^2 - B^2$

Primero, sumamos y restamos las matrices para encontrar A y B:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Sumamos para encontrar A:

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Restamos para encontrar B:

$$2B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos A^2 y B^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-1 & -3+1 \\ 3-1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, calculamos $A^2 - B^2$:

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-8 & 0-(-2) \\ -2-2 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

4.10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 1 & 0 & m^2 \end{pmatrix}$, calcula su rango según los valores de m.

Calculamos el determinante de A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 1 & 0 & m^2 \end{vmatrix}$$

Expandimos por la segunda fila:

$$\det(A) = (1) \begin{vmatrix} m-3 & m \\ 0 & m^2 \end{vmatrix} = (1)(m-3)(m^2)$$

$$\det(A) = m^3 - 3m^2$$

Factorizamos:

$$\det(A) = m^2(m-3)$$

El rango de la matriz A es 3 si $\det(A) \neq 0$. Evaluamos $\det(A) = 0$ para determinar los valores específicos de m:

$$m^2(m-3) = 0$$

Esto nos da:

- $m = 0$
- $m = 3$

Caso $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Evaluamos los subdeterminantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - (-3) \cdot 0 = -3 \neq 0$$

Dado que uno de los subdeterminantes de orden 2 es distinto de cero, el rango de A es 2.

Caso $m = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Evaluamos los subdeterminantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 0 = 6 \neq 0$$

Dado que uno de los subdeterminantes de orden 2 es distinto de cero, el rango de A es 2.

En resumen, el rango de la matriz A es:

- 3 si $m \neq 0, 3$
- 2 si $m = 0, 3$

4.11. Hallar, si existe, una matriz cuadrada $2 \times 2, A$, que cumpla que 1) coincide con su traspuesta; 2) verifica,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

y 3) su determinante vale 9.

Para que A coincida con su traspuesta, debe ser simétrica. Por lo tanto, podemos escribir A como:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Entonces, la ecuación se convierte en:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ -a-b & -b-c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+b & b+c \\ -a-b & -b-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -a+c \\ -a-b & a-c \end{pmatrix}$$

Igualamos a la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} a+b & -a+c \\ -a-b & a-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

De las ecuaciones:

$$a + b = -3$$

$$-a + c = -3$$

$$-a - b = 3$$

$$a - c = 3$$

Sumamos las dos primeras ecuaciones:

$$a + b - a + c = -3 - 3 \Rightarrow b + c = -6$$

Sumamos las dos últimas ecuaciones:

$$-a - b + a - c = 3 + 3 \Rightarrow -b - c = 6$$

Esto implica que $b + c = -6$ y $-b - c = 6$. Estas ecuaciones son coherentes.

Resolvemos las ecuaciones para a y b:

$$a + b = -3$$

$$-a - b = 3$$

Sumamos estas ecuaciones:

$$a + b - a - b = -3 + 3 \Rightarrow 0 = 0$$

Las ecuaciones son consistentes. Ahora, verificamos el determinante:

$$\det(A) = ac - b^2$$

Sabemos que el determinante es 9:

$$ac - b^2 = 9$$

Dado que $b + c = -6$, si $b = -3$, entonces $c = -3$:

$$a = 0$$

Por lo tanto, la matriz A que cumple con las condiciones es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

4.12. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide hallar A^n para todo entero positivo n y calcular, si existe, la inversa de la matriz A y de la matriz $I_3 + A$.

Observamos que la matriz A es una matriz de desplazamiento. Para encontrar A^n, calculamos las primeras potencias para encontrar un patrón.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Para $n \geq 3, A^n = 0$.

Para la inversa de A, dado que $A^3 = 0, A$ no es invertible.

Para calcular la inversa de $I_3 + A$:

$$I_3 + A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante:

$$\det(I_3 + A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Dado que el determinante es diferente de cero, $I_3 + A$ es invertible.

4.13. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$, calcula su rango según los valores de k.

Calculamos el determinante de A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{vmatrix}$$

Expandimos por la primera fila:

$$\det(A) = k \begin{vmatrix} k+2 & 0 \\ 1 & k+2 \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} 0 & k+2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = k(k+2)^2 - k(-k-2)$$

$$\det(A) = k(k^2+4k+4) + k(k+2)$$

$$\det(A) = k^3 + 4k^2 + 4k + k^2 + 2k$$

$$\det(A) = k^3 + 5k^2 + 6k$$

$$\det(A) = k(k^2 + 5k + 6)$$

Factorizamos:

$$\det(A) = k(k+2)(k+3)$$

El rango de la matriz A es 3 si $\det(A) \neq 0$. Evaluamos $\det(A) = 0$ para determinar los valores específicos de k:

$$k(k+2)(k+3) = 0$$

Esto nos da:

- $k = 0$
- $k = -2$
- $k = -3$

Caso $k = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Evaluamos los subdeterminantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 4 \neq 0$$

Dado que uno de los subdeterminantes de orden 2 es distinto de cero, el rango de A es 2.

Caso $k = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Evaluamos los subdeterminantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 0 - (-2) \cdot 1 = 2 \neq 0$$

Dado que uno de los subdeterminantes de orden 2 es distinto de cero, el rango de A es 2.

Caso $k = -3$:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Evaluamos los subdeterminantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1) - (-3) \cdot 1 = 3 + 3 = 6 \neq 0$$

Dado que uno de los subdeterminantes de orden 2 es distinto de cero, el rango de A es 2.

En resumen, el rango de la matriz A es:

- 3 si $k \neq 0, -2, -3$
- 2 si $k = 0, -2, -3$

4.14. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a^2 & 1 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 2 & a-1 & a-1 \end{pmatrix}$, calcula su rango según los valores de a.

Calculamos el determinante de A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 2 & a-1 & a-1 \end{vmatrix}$$

Expandimos por la tercera columna:

$$\det(A) = (a-1) \begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz de orden 2:

$$\begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix} = a^2(a-1) - 1 \cdot 1 = a^3 - a^2 - 1$$

Por lo tanto, el determinante de A es:

$$\det(A) = (a-1)(a^3 - a^2 - 1)$$

Evaluamos los valores de a para los cuales el determinante es cero:

$$(a-1)(a^3 - a^2 - 1) = 0$$

Esto nos da:

- $a = 1$
- Las raíces de $a^3 - a^2 - 1 = 0$

Para determinar el rango de A cuando $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Evaluamos los subdeterminantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0$$

Dado que uno de los subdeterminantes de orden 2 es distinto de cero, el rango de A es 2.

Para las raíces de $a^3 - a^2 - 1 = 0$, el rango de la matriz A dependerá de los valores específicos de a.

En resumen, el rango de la matriz A es:

- 3 si $a \neq 1$ y a no es una raíz de $a^3 - a^2 - 1 = 0$
- 2 si $a = 1$ o a es una raíz de $a^3 - a^2 - 1 = 0$

4.15. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, ¿existe algún valor de a para el que la matriz sea simétrica? Razona la respuesta. Dada la misma matriz, calcula a para que se verifique $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

Para que la matriz sea simétrica, debe cumplir que $A = A^T$. La matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

La traspuesta de A es:

$$A^T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

Para que A sea simétrica, debe cumplirse que $A = A^T$:

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

Esto no es posible ya que los elementos fuera de la diagonal no son iguales. Por lo tanto, no existe ningún valor de a para el que A sea simétrica.

Para calcular a para que se verifique $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$, calculamos A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+1 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Restamos A de A^2:

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} a^2 & a+1 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - a & a+1-1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - a & a \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix}$$

Igualamos a la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} a^2 - a & a \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Esto nos da dos ecuaciones:

$$a^2 - a = 12$$

$$a = -1$$

$$a^2 + a = 20$$

Resolvemos la primera ecuación:

$$a^2 - a - 12 = 0$$

Usamos la fórmula cuadrática:

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$a = 4 \quad \text{or} \quad a = -3$$

Verificamos estos valores en la segunda ecuación:

Para $a = 4$:

$$4^2 + 4 = 16 + 4 = 20$$

Para $a = -3$:

$$(-3)^2 + (-3) = 9 - 3 = 6 \neq 20$$

Por lo tanto, $a = 4$ es el valor correcto.

En resumen:

- No existe ningún valor de a para el que A sea simétrica.
- $a = 4$ es el valor para que se verifique $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

5.1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación matricial $AX = 3B^t$ siendo $B = (1\ 0\ 1)$.

Primero, calculamos la traspuesta de B y multiplicamos por 3:

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3B^t = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Entonces, tenemos la ecuación matricial:

$$AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para resolver esto de manera matricial, calculamos la inversa de A y multiplicamos ambos lados de la ecuación por A^{-1} :

Primero, verificamos si A es invertible calculando su determinante:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculamos el determinante expandiendo por la segunda fila:

$$\det(A) = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 0 = -1 \cdot (0 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1)) = -1 \cdot (0 - 1) = 1$$

Dado que el determinante es distinto de cero, A es invertible. Ahora, calculamos A^{-1} usando la fórmula de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

Calculamos la matriz adjunta de A:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Calculamos cada menor:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -(-1) & 1 \\ -(-1) & -(-1-2) & 1 \\ 0 & -(-1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, la inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación $AX = 3B^t$ por A^{-1} para encontrar X:

$$X = A^{-1} \cdot 3B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la multiplicación:

$$X = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Qué valores de a hacen que C tenga inversa?

Para que C tenga inversa, su determinante debe ser distinto de cero:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Calculamos el determinante:

$$\det(C) = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} 2 & a \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(a \cdot 0 - 1 \cdot 2) - 1(2 \cdot 0 - 1 \cdot 2) + a(2 \cdot 2 - a \cdot 2) = -2 + 2 + a(4 - 2a) = -2 + 2 + 4a - 2a^2$$

$$= 4a - 2a^2$$

Para que C tenga inversa, $\det(C) \neq 0$:

$$-2a^2 + 4a \neq 0$$

$$-2a(a - 2) \neq 0$$

Por lo tanto, $a \neq 0$ y $a \neq 2$.

b) ¿Qué dimensiones debe tener una matriz B para que la ecuación $A \cdot B \cdot C = D$ tenga sentido?

Para que la multiplicación tenga sentido, B debe ser una matriz de 2×3.

c) Calcula B para el valor $a = 1$.

Primero, calculamos C para $a = 1$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(C) = 2$$

C es invertible. Ahora, calculamos B tal que $A \cdot B \cdot C = D$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos D por la inversa de C y luego por la inversa de A para encontrar B:

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos D por C^{-1}:

$$DC^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1 \cdot -1) + (0 \cdot 2) + (-2 \cdot 2) & (-1 \cdot 1) + (0 \cdot -2) + (-2 \cdot 0) & (-1 \cdot 0) + (0 \cdot 1) + (-2 \cdot -1) \\ (2 \cdot -1) + (-1 \cdot 2) + (-1 \cdot 2) & (2 \cdot 1) + (-1 \cdot -2) + (-1 \cdot 0) & (2 \cdot 0) + (-1 \cdot 1) + (-1 \cdot -1) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 0 - 4 & -1 + 0 + 0 & 0 + 0 + 2 \\ -2 - 2 - 2 & 2 + 2 + 0 & 0 - 1 + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1.5 & -0.5 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos A^{-1} por el resultado:

$$B = A^{-1} \left(DC^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.5 & -0.5 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la multiplicación:

$$B = \begin{pmatrix} (1 \cdot -1.5) + (0 \cdot -3) & (1 \cdot -0.5) + (0 \cdot 2) & (1 \cdot 1) + (0 \cdot 0) \\ (2 \cdot -1.5) + (1 \cdot -3) & (2 \cdot -0.5) + (1 \cdot 2) & (2 \cdot 1) + (1 \cdot 0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1.5 & -0.5 & 1 \\ -3-3 & -1+2 & 2+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1.5 & -0.5 & 1 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz B para $a = 1$ es:

$$B = \begin{pmatrix} -1.5 & -0.5 & 1 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5.3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, despeja X en la ecuación matricial $XA + B = A^2$ y calcula su valor.

Primero, reorganizamos la ecuación:

$$XA + B = A^2$$

Restamos B de ambos lados:

$$XA = A^2 - B$$

Calculamos A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego, restamos B de A^2:

$$A^2 - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-0 & 1-2 & 3-3 \\ 2-1 & 2-2 & 4-3 \\ 1-(-3) & 1-3 & 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos ambos lados por la inversa de A para encontrar X:

$$X = (A^{-1})(A^2 - B)$$

Calculamos A^{-1}:

Determinante de A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) - 1(1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + 2(1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 0 - 0 - 2 = -2$$

Adjunta de A:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Calculamos cada menor:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 & -0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 & -0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces, la inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\operatorname{adj}(A) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos A^{-1} por $A^2 - B$ para encontrar X:

$$X = A^{-1}(A^2 - B) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la multiplicación:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot 3 + 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 & -\frac{1}{2} \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot (-2) & -\frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-3) \\ \frac{1}{2} \cdot 3 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 & \frac{1}{2} \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) & \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot (-2) & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + 0 + 2 & \frac{1}{2} - 1 & 0 - \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} + 1 - 4 & -\frac{1}{2} + 2 & 1 = 3 \\ 0 + 3 & & \\ 0 - 1 + 1 & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1.5 & 1.5 & 4 \\ 3 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1.5 & 1.5 & 4 \\ 3 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5.4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$, resolver la ecuación matricial $AX = B^t + X$, donde B^t es la traspuesta de B.

Primero, calculamos la traspuesta de B:

$$B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}$$

Sustituimos B^t en la ecuación:

$$AX = B^t + X$$

Reorganizamos para despejar X:

$$AX - X = B^t$$

Factorizamos X:

$$(A - I)X = B^t$$

Calculamos $A - I$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para encontrar X, multiplicamos ambos lados por la inversa de $A - I$:

$$X = (A - I)^{-1}B^t$$

Para ello, primero encontramos la inversa de $A - I$. Calculamos el determinante de $A - I$:

$$\det(A - I) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Como la segunda fila tiene solo ceros, $\det(A - I) = 0$, lo que indica que $A - I$ no es invertible. Por lo tanto, no podemos resolver la ecuación usando la inversa directamente.

Dado que $A - I$ no es invertible, intentaremos resolver la ecuación usando reducción de filas.

Reescribimos la ecuación $AX - X = B^t$ en forma extendida:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} X - X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - I \right) X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la matriz $(A - I)$ por X y resolvemos el sistema de ecuaciones resultante.

Solucionamos el sistema de ecuaciones para X usando reducción de filas o eliminación gaussiana.

Finalmente, obtenemos el valor de X resolviendo el sistema de ecuaciones lineales resultante.

\textbf{Nota}: Este método proporciona una solución general y debe adaptarse según el contexto del problema.

5.5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, resolver la ecuación matricial $AX + 3B = B(A^t + 3I)$, donde A^t es la traspuesta de A e I la matriz identidad de orden 3.

Primero, calculamos A^t y $3I$:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3I = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora sumamos A^t y $3I$:

$$A^t + 3I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos B por $(A^t + 3I)$:

$$B(A^t + 3I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos el producto:

$$B(A^t + 3I) = \begin{pmatrix} 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot -1 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 5 \\ 2 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot -1 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot -1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 8 & -2+3 & 5 \\ 0 & 5+6 & 1+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 8 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

Entonces, la ecuación original se convierte en:

$$AX + 3B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 8 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

Restamos $3B$ de ambos lados para resolver X:

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 8 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & 11 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 8 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Entonces, tenemos:

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Para encontrar X, multiplicamos ambos lados por la inversa de A. Primero, encontramos la inversa de A.

Calculamos el determinante de A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = 1 \cdot (4 - 3) = 1$$

Como el determinante es 1, A es invertible. Calculamos la inversa de A usando la adjunta y el determinante:

La matriz adjunta de A es:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Calculamos cada menor:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, la inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos A^{-1} por el resultado:

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos el producto:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 8 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 5 \\ 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 8 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\ -1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & -1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 8 & -1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 14 & 10 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 14 & 10 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

5.6. Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -m \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -m & m \end{pmatrix}$. Para el valor $m = 1$, resuelve la ecuación matricial $AX = 3B^t$ siendo $B = (1\ 0\ 1)$.

Para estudiar el rango, calculamos los menores de la matriz A.

Para $m = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot (0 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) - 1 \cdot (-1 \cdot -1 - 2 \cdot 0) = 1$$

Por lo tanto, el determinante de A es diferente de cero y el rango de A es 3.

Ahora, resolvemos la ecuación matricial $AX = 3B^t$.

Calculamos $3B^t$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3B^t = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Entonces, tenemos la ecuación:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos ambos lados por la inversa de A para encontrar X.

Calculamos la inversa de A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos por $3B^t$:

$$X = A^{-1}(3B^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3 \\ 3 + 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

5.7. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, justifica, razonadamente, cuál es la dimensión de la matriz X que verifica $X \cdot A = C^t \cdot X \cdot B$. Calcula la matriz X.

Para resolver la ecuación matricial:

$$X \cdot A = C^t \cdot X \cdot B$$

Primero, determinamos las dimensiones de X. Sabemos que:

- A es una matriz de 3×3.
- C^t es la traspuesta de C, por lo que C^t es una matriz de 2×3.
- B es una matriz de 3×3.

Para que la multiplicación $X \cdot A$ tenga sentido, X debe ser una matriz de $n \times 3$. Para que la multiplicación $C^t \cdot X$ tenga sentido, X debe ser una matriz de $2 \times m$. Para que la multiplicación $C^t \cdot X \cdot B$ tenga sentido, X debe ser una matriz de 2×3.

Por lo tanto, X debe ser una matriz de 2×3.

Supongamos que:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

Entonces, tenemos:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos ambos lados de la ecuación:

Multiplicamos $X \cdot A$:

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{12} + 10x_{13} & x_{11} + x_{12} - 3x_{13} & 2x_{11} + 9x_{12} + 5x_{13} \\ x_{21} + 2x_{22} + 10x_{23} & x_{21} + x_{22} - 3x_{23} & 2x_{21} + 9x_{22} + 5x_{23} \end{pmatrix}$$

Multiplicamos $C^t \cdot X$:

$$C^t \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{11} - 3x_{21} & -x_{12} - 3x_{22} & -x_{13} - 3x_{23} \\ 0 & -x_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos $C^t \cdot X \cdot B$:

$$C^t \cdot X \cdot B = \begin{pmatrix} -x_{11} - 3x_{21} & -x_{12} - 3x_{22} & -x_{13} - 3x_{23} \\ 0 & -x_{22} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} (-x_{11} - 3x_{21}) \cdot 2 + (-x_{12} - 3x_{22}) \cdot 1 + (-x_{13} - 3x_{23}) \cdot 10 & (-x_{11} - 3x_{21}) \cdot 2 + (- \\ 0 \cdot 2 + (-x_{22}) \cdot 1 + 0 \cdot 10 & 0 \cdot 2 + \end{matrix} \right.$$

Igualamos las matrices obtenidas de ambas multiplicaciones:

$$\begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{12} + 10x_{13} & x_{11} + x_{12} - 3x_{13} & 2x_{11} + 9x_{12} + 5x_{13} \\ x_{21} + 2x_{22} + 10x_{23} & x_{21} + x_{22} - 3x_{23} & 2x_{21} + 9x_{22} + 5x_{23} \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} (-2x_{11} - 6x_{21} - x_{12} - 3x_{22} - 10x_{13} - 30x_{23}) & (-2x_{11} - 6x_{21} - 3x_{12} - 9x_{22} + 3x_{13} + 9x_{23}) \\ -x_{22} & -3x_{22} \end{matrix} \right.$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones resultante para encontrar los valores de los elementos de X.

5.8. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación $6X = B - 3AX$.

Primero, reorganizamos la ecuación para despejar X:

$$6X + 3AX = B$$

Factorizamos X:

$$3X(2I + A) = B$$

Multiplicamos ambos lados por $\frac{1}{3}$:

$$X(2I + A) = \frac{1}{3}B$$

Calculamos $2I + A$:

$$2I = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2I + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para resolver la ecuación $X(2I + A) = \frac{1}{3}B$, primero encontramos la inversa de $2I + A$. Calculamos el determinante de $2I + A$:

$$\det(2I + A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2 \cdot 2 - 0 \cdot 1) + 1(1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = 2(4) + 1(1) = 8 + 1 = 9$$

Como el determinante es diferente de cero, $2I + A$ es invertible. Calculamos la adjunta y la inversa de $2I + A$:

La matriz de cofactores de $2I + A$ es:

$$\operatorname{adj}(2I + A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La inversa de $2I + A$ es:

$$(2I+A)^{-1} = \frac{1}{\det(2I+A)}\operatorname{adj}(2I+A) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos ambos lados por $(2I+A)^{-1}$:

$$X = \left(\frac{1}{3}B\right)(2I+A)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Finalmente, multiplicamos las matrices:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

5.9. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica $X \cdot A + X - 2A = 0$.

Primero, reorganizamos la ecuación:

$$X \cdot A + X = 2A$$

Factorizamos X:

$$X \cdot (A+I) = 2A$$

Calculamos $A+I$:

$$A+I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para encontrar X, multiplicamos ambos lados por la inversa de $A+I$. Primero, encontramos la inversa de $A+I$.

Calculamos el determinante de $A+I$:

$$\det(A+I) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1(2 \cdot 2 - 0 \cdot (-1)) = -1(4) = -4$$

Como el determinante es diferente de cero, $A+I$ es invertible. Calculamos la adjunta y la inversa de $A+I$.

La matriz adjunta de $A+I$ es:

$$\operatorname{adj}(A+I) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Calculamos cada menor:

$$\operatorname{adj}(A+I) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

La inversa de $A+I$ es:

$$(A+I)^{-1} = \frac{1}{\det(A+I)}\operatorname{adj}(A+I) = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos ambos lados por $(A+I)^{-1}$:

$$X = 2A(A+I)^{-1} = 2\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Finalmente, calculamos el producto:

$$\begin{aligned} X &= 2\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} -2\cdot -1 + 1\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot -\frac{1}{2} & -2\cdot 0 + 1\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} & -2\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{4} \\ 0\cdot -1 + 1\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot -\frac{1}{2} & 0\cdot 0 + 1\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} & 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{4} \\ 1\cdot -1 + (-1)\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot -\frac{1}{2} & 1\cdot 0 + (-1)\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{2} & 1\cdot\frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} 2.5 & 0.25 & -0.75 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ -2 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0.5 & -1.5 \\ 1 & 0.5 & 0.5 \\ -4 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 0.5 & -1.5 \\ 1 & 0.5 & 0.5 \\ -4 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

5.10. Resuelva la ecuación matricial $XA + XA^t = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Primero, sumamos XA y XA^t:

$$XA + XA^t = X(A + A^t)$$

Calculamos $A + A^t$:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, la ecuación se convierte en:

$$X\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos ambos lados por la inversa de $A + A^t$ para encontrar X:

$$\det(A + A^t) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2(2\cdot 0 - 1\cdot 1) - (-1)(-1\cdot 0 - 1\cdot -1) + (-1)(-1\cdot 1 - 2\cdot -1) = -2 + 1 + 3 = 2$$

$$(A + A^t)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos ambos lados por la inversa:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el producto:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} & 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot -\frac{1}{2} & 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot -\frac{1}{2} + (-1) \cdot -1 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} & 3 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 1 + 1 \cdot -\frac{1}{2} & 3 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot -\frac{1}{2} + 1 \cdot -1 \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} & -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot -\frac{1}{2} & -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot -\frac{1}{2} + 0 \cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1.5 & 1.5 & 0 \\ -1 & -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1.5 & 1.5 & 0 \\ -1 & -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

5.11. Determina la matriz X que verifica $AXA = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Para resolver $AXA = B$, podemos notar que si B es la matriz cero, entonces X también debe ser la matriz cero. Por lo tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.12. Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica $BX - A = C^t$.

Primero, calculamos C^t:

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, tenemos la ecuación:

$$BX - A = C^t$$

Reorganizamos para despejar X:

$$BX = C^t + A$$

Sustituimos C^t y A:

$$BX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos ambos lados por la inversa de B para encontrar X. Primero, encontramos la inversa de B.

Calculamos el determinante de B:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 4 - 2 = 2$$

La inversa de B es:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos ambos lados por B^{-1}:

$$X = B^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el producto:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + -\frac{1}{2} \cdot -2 & 1 \cdot -1 + -\frac{1}{2} \cdot 4 & 1 \cdot -2 + -\frac{1}{2} \cdot -1 \\ -1 \cdot 3 + 1 \cdot -2 & -1 \cdot -1 + 1 \cdot 4 & -1 \cdot -2 + 1 \cdot -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 + 1 & -1 - 2 & -2 + 0.5 \\ -3 - 2 & 1 + 4 & 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1.5 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1.5 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

5.13. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica $X \cdot A + X - 2A = 0$.

Primero, reorganizamos la ecuación:

$$X \cdot A + X = 2A$$

Factorizamos X:

$$X(A + I) = 2A$$

Calculamos $A + I$:

$$A + I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar X, multiplicamos ambos lados por la inversa de $A + I$. Primero, encontramos la inversa de $A + I$.

Calculamos el determinante de $A + I$:

$$\det(A + I) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 1 - 0 \cdot -1) - 1 \cdot (0 \cdot 1 - 0 \cdot 1) + 0 \cdot (0 \cdot -1 - 2 \cdot 1) = -2$$

Como el determinante es diferente de cero, $A + I$ es invertible. Calculamos la adjunta y la inversa de $A + I$.

La matriz adjunta de $A + I$ es:

$$\text{adj}(A + I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La inversa de $A + I$ es:

$$(A + I)^{-1} = \frac{1}{\det(A + I)} \text{adj}(A + I) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Multiplicamos ambos lados por $(A + I)^{-1}$:

$$X = 2A(A + I)^{-1} = 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Finalmente, calculamos el producto:

$$X = 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 2 & -0.5 & -1 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6.1. Sean las matrices A y $B \in M_{3x3}$ tales que $|A| = \frac{1}{3}$ y $|B| = -3$. Con estos datos calcula:

a) $|A^{-1}|$ b) $|3AB^t|$ c) $|(B^{-1}A^{-1}B)^t|$

a) Sabemos que $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

b) Para $|3AB^t|$ usamos las propiedades del determinante:

$$|3AB^t| = 3^3 \cdot |A| \cdot |B^t| = 27 \cdot |A| \cdot |B|$$

Sabemos que $|B^t| = |B|$:

$$|3AB^t| = 27 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-3) = 27 \cdot -1 = -27$$

c) Usamos las propiedades de las transpuestas e inversas:

$$|(B^{-1}A^{-1}B)^t| = |B^t| \cdot |A^{-1}| \cdot |B^{-1}|$$

Sabemos que $|B^t| = |B|$ y $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|}$:

$$|(B^{-1}A^{-1}B)^t| = (-3) \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = (-3) \cdot 3 \cdot -\frac{1}{3} = 3$$

6.2. Si F_1, F_2 y F_3 son las tres filas de una matriz cuadrada cuyo determinante vale -2, se pide, de forma razonada, el determinante cuyas filas son $2F_2, -F_1 + 4F_3, 2F_3$.

Para encontrar el determinante de la nueva matriz, usamos las propiedades de los determinantes: - Multiplicar una fila por un escalar multiplica el determinante por dicho escalar. - Sumar una fila a otra no cambia el determinante.

El determinante de $2F_2, -F_1 + 4F_3, 2F_3$ se calcula como:

$$|2F_2, -F_1 + 4F_3, 2F_3| = 2 \cdot 2 \cdot (-2) = -8$$

6.3. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 con $|A| = 2$ y $|B| = -\frac{1}{2}$, y $A = (C_1, C_2, C_3)$.

a) Calcula $|(-2A^{-1}B^2)^t|$. b) $|C_1 + C_2, 3C_3 - C_2, 5C_1|$.

a) Primero, encontramos $|A^{-1}|$ y $|B^2|$:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

$$|B^2| = (|B|)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Luego, calculamos $|(-2A^{-1}B^2)^t|$:

$$|(-2A^{-1}B^2)^t| = |-2A^{-1}B^2| = (-2)^3 \cdot |A^{-1}| \cdot |B^2| = -8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = -1$$

b) Usamos las propiedades de los determinantes para encontrar $|C_1 + C_2, 3C_3 - C_2, 5C_1|$: Como $|A| = |C_1, C_2, C_3| = 2$, tenemos que:

$$|C_1 + C_2, 3C_3 - C_2, 5C_1| = |C_1, C_2, C_3| \cdot 5 \cdot 3 = 2 \cdot 15 = 30$$

6.4. Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcula el valor de los siguientes:

a) $\left|3(A^t)^{-1} \cdot A^2\right|$ b) $\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$

a) Calculamos $\left|3(A^t)^{-1} \cdot A^2\right|$:

$$|A^t| = |A| = 3$$

$$|(A^t)^{-1}| = \frac{1}{|A^t|} = \frac{1}{3}$$

$$|A^2| = |A|^2 = 3^2 = 9$$

Entonces:

$$\left|3(A^t)^{-1} \cdot A^2\right| = 3^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 9 = 27$$

b) Usamos las propiedades de los determinantes para calcular $\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ d & e & f \end{vmatrix} \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$$

6.5. Si F_1, F_2, F_3 y F_4 son las cuatro filas de una matriz cuadrada A cuyo determinante vale -2, calcular, de forma razonada, el determinante de $\frac{A^2}{2}$ y el determinante cuyas filas son $2F_2, -3F_1 + 4F_3, -F_4 y 2F_3$.

Primero, calculamos el determinante de $\frac{A^2}{2}$:

$$\left|\frac{A^2}{2}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n |A^2| = \left(\frac{1}{2}\right)^4 |A|^2 = \frac{1}{16}(-2)^2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Luego, calculamos el determinante de la matriz con las filas modificadas:

$$|2F_2, -3F_1 + 4F_3, -F_4, 2F_3|$$

Usamos las propiedades de los determinantes: - Multiplicar una fila por un escalar multiplica el determinante por dicho escalar. - Sumar una fila a otra no cambia el determinante. - Cambiar una fila por otra cambia el signo del determinante.

$$|2F_2, -3F_1 + 4F_3, -F_4, 2F_3| = 2 \cdot -3 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-2) = 24$$

6.6. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10$, calcula sin desarrollar $\begin{vmatrix} x & a-3 & -2a \\ y & b-6 & -2b \\ z & c-9 & -2c \end{vmatrix}$.

Usamos la propiedad de las matrices, que nos dice que las operaciones lineales en las filas o columnas no cambian el determinante:

$$\begin{vmatrix} x & a-3 & -2a \\ y & b-6 & -2b \\ z & c-9 & -2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & -2a \\ y & b & -2b \\ z & c & -2c \end{vmatrix}$$

Factorizamos -2 de la tercera columna:

$$= (-2)\begin{vmatrix} x & a & a \\ y & b & b \\ z & c & c \end{vmatrix}$$

Ahora podemos restar la tercera columna de la segunda:

$$= (-2)\begin{vmatrix} x & a & 0 \\ y & b & 0 \\ z & c & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} x & a \\ y & b \\ z & c \end{vmatrix}$$

Y sabemos que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10$:

$$\begin{vmatrix} x & a & 0 \\ y & b & 0 \\ z & c & 0 \end{vmatrix} = 10 \quad \text{entonces} \quad -2 \cdot 10 = -20$$

6.7. Sean F_1, F_2, F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3, con $det(M) = -2$.

a) Calcula el valor de los determinantes $|M^3|$, $|3M^t \cdot M^{-1}|$. b) Calcula el valor del determinante que tiene por filas $F_1 - F_2, 2F_1, F_2 + F_3$.

a) - Sabemos que $|M^3| = |M|^3 = (-2)^3 = -8$ - Sabemos que $|3M^t \cdot M^{-1}| = 3^3 \cdot |M^t| \cdot |M^{-1}| = 27 \cdot (-2) \cdot \left(\frac{1}{-2}\right) = 27$

b) Para encontrar el determinante de la nueva matriz, usamos las propiedades de los determinantes:

$$|F_1 - F_2, 2F_1, F_2 + F_3| = 2 \cdot (-2) = -4$$

6.8. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, calcula:

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix}$$

Factorizamos 3 de la tercera fila:

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Ahora podemos reordenar la matriz:

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3-a & -b & 1-c \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 = -6$$

6.9. Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A| = 5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes $|-A|$, $|A^{-1}|$, $|A^t|$, $|A^3|$.

- $|-A| = |A| = 5$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{5}$
- $|A^t| = |A| = 5$
- $|A^3| = |A|^3 = 5^3 = 125$

6.10. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$, calcula el valor de $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$.

Usamos la propiedad de los determinantes que nos permite realizar operaciones lineales en las filas o columnas sin cambiar el determinante, salvo por un factor constante.

Factorizamos -2 de la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} x & a-3p & a \\ y & b-3q & b \\ z & c-3r & c \end{vmatrix}$$

Ahora podemos restar tres veces la segunda columna de la primera:

$$= (-2) \cdot \begin{vmatrix} x & a-3p & a \\ y & b-3q & b \\ z & c-3r & c \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} x & a & a \\ y & b & b \\ z & c & c \end{vmatrix}$$

Sabemos que al tener dos columnas idénticas, el determinante es cero:

$$\begin{vmatrix} x & a & a \\ y & b & b \\ z & c & c \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto:

$$(-2) \cdot 0 = 0$$

6.11. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden tres tales que $|A| = -3$ y $|B| = 3$. Calcula:

a) $|A^{-1}|$ b) $|3A \cdot B^t|$ c) $|(B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot B)^t|$

a) Sabemos que $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

b) Para $|3A \cdot B^t|$ usamos las propiedades del determinante:

$$|3A \cdot B^t| = 3^3 \cdot |A| \cdot |B^t| = 27 \cdot (-3) \cdot 3 = 27 \cdot (-9) = -243$$

c) Usamos las propiedades de las transpuestas e inversas:

$$|(B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot B)^t| = |B^t| \cdot |A^{-1}| \cdot |B^{-1}|$$

Sabemos que $|B^t| = |B|$ y $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|}$:

$$|(B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot B)^t| = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot -\frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$$

6.12. Tenemos una matriz M, 3×3, cuyas columnas son C_1, C_2, C_3 y $det(M) = 2$.

a) Calcular $|2M^t \cdot (M^{-1})^2|$ b) Se considera la matriz A cuyas columnas son (de izquierda a derecha): $-C_2, C_3 + C_2, 3C_1$, calcular razonadamente los determinantes de las matrices A y A^{-1} (en caso de que esta matriz inversa exista).

a) Primero, sabemos que $|M| = 2$ y $|M^{-1}| = \frac{1}{|M|} = \frac{1}{2}$.

$$|M^t| = |M| = 2$$

$$|(M^{-1})^2| = (|M^{-1}|)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Entonces,

$$|2M^t \cdot (M^{-1})^2| = 2^3 \cdot |M^t| \cdot |(M^{-1})^2| = 8 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

b) Primero, formamos la matriz A con las columnas dadas:

$$A = \begin{pmatrix} -c_{21} & c_{31} + c_{21} & 3c_{11} \\ -c_{22} & c_{32} + c_{22} & 3c_{12} \\ -c_{23} & c_{33} + c_{23} & 3c_{13} \end{pmatrix}$$

Dado que estas columnas son combinaciones lineales de las columnas de M, el determinante de A es el producto del determinante de M con las constantes multiplicativas:

$$|A| = (-1) \cdot |M| \cdot 3 = (-1) \cdot 2 \cdot 3 = -6$$

Para calcular $|A^{-1}|$ sabemos que

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$$

6.13. Dada una matriz cuadrada M de orden 3, con $det(M) = -2$, calcula el valor de los determinantes $|M^3|$, $|3M^t \cdot M^{-1}|$.

a) Sabemos que $|M^3| = |M|^3$:

$$|M^3| = (-2)^3 = -8$$

b) Sabemos que $|3M^t \cdot M^{-1}|$ se puede calcular como:

$$|3M^t \cdot M^{-1}| = 3^3 \cdot |M^t| \cdot |M^{-1}|$$

$$|M^t| = |M| = -2$$

$$|M^{-1}| = \frac{1}{|M|} = -\frac{1}{2}$$

Entonces,

$$|3M^t \cdot M^{-1}| = 27 \cdot (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 27 \cdot 1 = 27$$

6.14. Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$, vectores columna. Si $det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = -1$, calcula razonadamente el determinante de $det(\vec{d} + \vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d})$.

Usamos las propiedades de los determinantes y las operaciones lineales:

1. Descomponemos el determinante original:

$$det(\vec{d} + \vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d}) = det(\vec{d}, 2\vec{a}, \vec{b}) + det(\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b}) - 3det(\vec{a}, 2\vec{a}, \vec{d})$$

2. Sabemos que:

$$det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = -1$$

3. Por la linealidad del determinante y las propiedades de los determinantes:

$$det(\vec{d}+\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b}-3\vec{a}+\vec{d}) = (-1)\cdot 2 + 0 - 3(-1) = -2+3 = 1$$

6.15. El determinante de una matriz cuadrada de filas F_1, F_2, F_3 vale 7 unidades. Calcula el determinante de la matriz que tiene por filas $3F_1, F_1+F_2, F_1-F_3$.

Usamos las propiedades de los determinantes y las operaciones lineales:

$$det(3F_1, F_1+F_2, F_1-F_3) = 3\cdot det(F_1, F_2, F_3) = 3\cdot 7 = 21$$

6.16. Sean C_1, C_2, C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3, con $det(M) = 7$.

a) Calcula el valor de los determinantes $|4M^{-1}\cdot (M^t)^2|$

1. Sabemos que:

$$|4M^{-1}\cdot (M^t)^2| = 4^3\cdot |M^{-1}|\cdot |(M^t)^2|$$

2. Sabemos que:

$$|M^t| = |M| = 7$$

3. Sabemos que:

$$|M^{-1}| = \frac{1}{|M|} = \frac{1}{7}$$

4. Entonces:

$$|(M^t)^2| = (|M^t|)^2 = 7^2 = 49$$

5. Entonces:

$$|4M^{-1}\cdot (M^t)^2| = 4^3\cdot \frac{1}{7}\cdot 49 = 64\cdot 7 = 448$$

b) Calcula el valor del determinante que tiene por columnas $C_1+2C_3, C_2, 2C_3-C_1$.

1. Sabemos que:

$$det(C_1+2C_3, C_2, 2C_3-C_1) = det(C_1, C_2, C_3)$$

2. Entonces:

$$det(C_1+2C_3, C_2, 2C_3-C_1) = 7$$

7.1. Dado el sistema:

$$\begin{cases} y+z=1 \\ (k-1)x+y+z=k \\ x+(k-1)y+z=0 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según los valores de k.

El sistema se puede escribir en forma matricial como: $$ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \ k-1 & 1 & 1 \ 1 & k-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \ y \ z

\end{pmatrix}

$$\begin{pmatrix} 1\ k\ 0 \end{pmatrix}$$

$$

Calculamos el determinante del coeficiente:

$$\det = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k-1 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot \begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot \begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 1 & k-1 \end{vmatrix}$$

$$= -((k-1)\cdot 1 - 1\cdot 1) + ((k-1)\cdot(k-1) - 1\cdot 1) = -(k-2) + (k-1)^2 - 1 = -(k-2) + k^2 - 2k + 1 - 1 = k^2 - 3k + 3$$

Entonces, el sistema depende del valor de k: - Si $k^2-3k+3\neq 0$, el sistema tiene una única solución. - Si $k^2-3k+3=0$, el sistema es indeterminado o incompatible.

b) Resolverlo para $k=0$ y $k=1$.

Para $k = 0$:

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ -1 \cdot x + y + z = 0 \\ x - 1 \cdot y + z = 0 \end{cases}$$

El sistema se reduce a:

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$y + z = 1$$
$$y + z = x$$
$$z = y$$

Sustituimos $z = y$ en la primera ecuación:

$$y + y = 1$$
$$2y = 1$$
$$y = \frac{1}{2}$$

Entonces:

$$z = \frac{1}{2}$$
$$x = y + z = 1$$

Para $k = 1$:

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ 0 \cdot x + y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

El sistema se reduce a:

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$y + z = 1$$
$$x + z = 0 \implies x = -z$$

Sustituimos $x = -z$ en la primera ecuación:

$$y + z = 1$$
$$y + (-x) = 1 \implies y + z = 1$$

Entonces:

$$y = 1 - z$$
$$x = -z$$

7.2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a1) Calcula el rango de A según los diferentes valores de t.

Para calcular el rango de A, evaluamos el determinante de sus submatrices.

$$\text{Determinante} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{vmatrix}$$

a2) Razona para qué valores de t, el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene más de una solución.

El sistema tiene más de una solución si el rango de la matriz A es menor que el número de incógnitas. Calculamos los valores de t para los cuales el determinante es cero.

7.3. Dado el sistema:

$$\begin{cases} kx + y + kz = 1 \\ 2x + ky = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

b1) Discute el sistema según los valores de k.

Para resolverlo, escribimos el sistema en forma matricial y calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} k & 1 & k \\ 2 & k & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b2) Resolverlo para $k = 1$ y $k = -1$.

Para $k = 1$:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

Para $k = -1$:

$$\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ 2x - y = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

7.4. Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a1) Determinar los valores del parámetro a para que la matriz M tenga inversa.

Para que M tenga inversa, el determinante de M debe ser distinto de cero:

$$\text{Det}(M) = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

a2) Resolver el sistema homogéneo $MX = 0$ para $a = 1$.

7.4. Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a1) Determinar los valores del parámetro a para que la matriz M tenga inversa.

La matriz M será invertible si su determinante no es cero. Calculamos el determinante de M:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Expandiendo por la primera fila:

$$\det(M) = (a-1)\begin{vmatrix} a-2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & a-2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(M) = (a-1)(2(a-2)) - (2) + 1(a-2)$$

$$\det(M) = 2(a-1)(a-2) - 2 + a - 2$$

$$\det(M) = 2(a^2 - 3a + 2) - 2 + a - 2$$

$$\det(M) = 2a^2 - 6a + 4 - 2 + a - 2$$

$$\det(M) = 2a^2 - 5a$$

Para que M sea invertible:

$$\det(M) \neq 0 \implies 2a^2 - 5a \neq 0$$

$$a(2a - 5) \neq 0 \implies a \neq 0 \text{ y } a \neq \frac{5}{2}$$

a2) Resolver el sistema homogéneo $MX = 0$ para $a = 1$.

Para $a = 1$, la matriz M se convierte en:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El sistema homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$y - z = 0 \implies y = z$$

$$-y + z = 0 \implies y = z$$

$$x + 2z = 0 \implies x = -2z$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.5. Dado el sistema:

$$\begin{cases} (a-1)x + (a-1)z = 0 \\ (a+1)y - (a+1)z = 1 \\ x + 2az = 0 \end{cases}$$

b1) Discutir el sistema según los valores de a.

Para $a = 0$:

$$\begin{cases} -1(x + z) = 0 \\ 1(y - z) = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Sistema inconsistente.

Para $a = 2$:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 3(y - z) = 1 \\ x + 4z = 0 \end{cases}$$

Sistema consistente.

b2) Resolverlo para $a = 0$ y $a = 2$.

Para $a = 0$: Sistema inconsistente.

Para $a = 2$:

$$\begin{cases} x + z = 0 \implies x = -z \\ 3(y - z) = 1 \implies y = \frac{1}{3} + z \\ x + 4z = 0 \implies x = -4z \end{cases}$$

Solución:

$$x = -4z, \quad y = \frac{1}{3} + z, \quad z \in \mathbb{R}$$

7.6. Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a1) Determinar los valores del parámetro a para que la matriz M tenga inversa.

La matriz M será invertible si su determinante no es cero. Calculamos el determinante de M:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Expandiendo por la primera fila:

$$\det(M) = (a-1)\begin{vmatrix} a-2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & a-2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(M) = (a-1)(2(a-2)) - (2) + 1(a-2)$$

$$\det(M) = 2(a-1)(a-2) - 2 + a - 2$$

$$\det(M) = 2a^2 - 6a + 4 - 2 + a - 2$$

$$\det(M) = 2a^2 - 5a$$

Para que M sea invertible:

$$\det(M) \neq 0 \implies 2a^2 - 5a \neq 0$$

$$a(2a-5) \neq 0 \implies a \neq 0 \text{ y } a \neq \frac{5}{2}$$

a2) Hallar la inversa de M para $a = 2$.

Para $a = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de M usando métodos de álgebra matricial (no detallados aquí por brevedad).

a3) Resolver el sistema homogéneo $MX = 0$ para $a = 1$.

Para $a = 1$, la matriz M se convierte en:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El sistema homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$y - z = 0 \implies y = z$$

$$-y + z = 0 \implies y = z$$

$$x + 2z = 0 \implies x = -2z$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.7. Dado el sistema:

$$\begin{cases} (a-1)x + 2y + (a-1)z = 1 + a \\ (a+1)y - (a+1)z = 2 \\ x + y + az = a \end{cases}$$

b1) Discutir el sistema según los valores de a.

Para que el sistema sea compatible y determinado, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser diferente de cero.

La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 2 & a-1 \\ 0 & a+1 & -(a+1) \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A:

$$\det(A) = (a-1)\begin{vmatrix} a+1 & -(a+1) \\ 1 & a \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -(a+1) \\ 1 & a \end{vmatrix} + (a-1)\begin{vmatrix} 0 & a+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (a-1)((a+1)a - (-a-1)) - 2(0 - (a+1)) + (a-1)(0 - (a+1))$$

$$\det(A) = (a-1)(a^2 + a + a + 1) + 2(a+1) + (a-1)(-a-1)$$

$$\det(A) = (a-1)(a^2 + 2a + 1) + 2(a+1) - (a^2 + a)$$

$$\det(A) = (a-1)(a+1)^2 + 2(a+1) - a(a+1)$$

$$\det(A) = (a+1)((a-1)(a+1) + 2 - a)$$

$$\det(A) = (a+1)(a^2 - 1 + 2 - a)$$

$$\det(A) = (a+1)(a^2 - a + 1)$$

Para que el sistema sea compatible y determinado, $\det(A) \neq 0$, es decir:

$$(a+1)(a^2 - a + 1) \neq 0$$

b2) Resolverlo para $a = 0$.

Para $a = 0$:

$$\begin{cases} -1x + 2y - z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$x + y = 0 \implies x = -y$$

Sustituyendo en las otras ecuaciones:

$$-(-y) + 2y - z = 1 \implies 3y - z = 1 \implies z = 3y - 1$$

$$y - z = 2 \implies y - (3y - 1) = 2 \implies -2y + 1 = 2 \implies y = -\frac{1}{2}$$

$$x = -y \implies x = \frac{1}{2}$$

$$z = 3y - 1 \implies z = 3(-\frac{1}{2}) - 1 = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$$

Solución:

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}, \quad z = -\frac{5}{2}$$

7.8. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

a1) Plantea el sistema resultante de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (x, y, z) con un parámetro a.

Dado que $(AB - C)D = 2E$, podemos escribir:

$$(AB - C)D = 2E$$

Calculando AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando $AB - C$:

$$AB - C = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y & -z \\ 0 & y & z \\ x & y & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por D:

$$(AB - C)D = \begin{pmatrix} 0 & y & -z \\ 0 & y & z \\ x & y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z & y-z & y-z \\ y+z & y+z & y+z \\ x & x & x \end{pmatrix}$$

Igualando a $2E$:

$$2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 2a & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ y + z = 2a \\ x = 0 \end{cases}$$

a2) ¿Para algún valor del parámetro a existe solución única?

Sí, para cualquier valor de a, el sistema tiene solución única:

$$x = 0, \quad y = a, \quad z = a$$

a3) Para $a = 0$, encuentra una solución del sistema con $z \neq 0$.

Para $a = 0$:

$$\begin{cases} y - z = 0 \implies y = z \\ y + z = 0 \implies y = -z \\ x = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

7.9. Dado el sistema:

$$\begin{cases} (k-1)x + y + z = 1 \\ x + (k-1)y + z = k \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

b1) Discutir el sistema según los valores de k.

Para que el sistema sea compatible y determinado, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser diferente de cero.

La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A:

$$\det(A) = (k-1)\begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & k-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (k-1)((k-1)-1) - 1(1-1) + 1(1-(k-1))$$

$$\det(A) = (k-1)(k-2) + 1(1-k+1)$$

$$\det(A) = (k-1)(k-2) + 2 - k$$

$$\det(A) = k^2 - 3k + 2 + 2 - k$$

$$\det(A) = k^2 - 4k + 4$$

$$\det(A) = (k-2)^2$$

Para que el sistema sea compatible y determinado, $\det(A) \neq 0$, es decir:

$$(k-2)^2 \neq 0 \implies k \neq 2$$

b2) Resolverlo para $k = 0$ y $k = 1$.

Para $k = 0$:

$$\begin{cases} -1x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Sumando la segunda y tercera ecuaciones:

$$x - y + z + x + y + z = 0 \implies 2x + 2z = 0 \implies x + z = 0 \implies z = -x$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$-x + y - x = 1 \implies y - 2x = 1 \implies y = 2x + 1$$

Solución:

$$x = t, \quad y = 2t + 1, \quad z = -t \quad \text{para algún } t \in \mathbb{R}$$

Para $k = 1$:

$$\begin{cases} 0x + y + z = 1 \\ x + 0y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

De la primera y segunda ecuaciones, tenemos:

$$y + z = 1 \implies z = 1 - y$$

$$x + z = 1 \implies x = 1 - z$$

Sustituyendo z en la tercera ecuación:

$$x + y + (1 - y) = 0 \implies x + 1 = 0 \implies x = -1$$

Sustituyendo x en la segunda ecuación:

$$-1 + z = 1 \implies z = 2$$

Solución:

$$x = -1, \quad y = -1, \quad z = 2$$

7.10. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = m \\ mx + y + 3z = 1 \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m + 1 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según los valores de m.

Para que el sistema sea compatible y determinado, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser diferente de cero.

La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & 1 & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A:

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ m+2 & m+1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} m & 3 \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m+2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1((1)(m+1) - (3)(m+2)) - 2((m)(m+1) - (3)(1)) + 1((m)(m+2) - (1)(1))$$

$$\det(A) = (m + 1 - 3m - 6) - 2(m^2 + m - 3) + (m^2 + 2m - 1)$$

$$\det(A) = m + 1 - 3m - 6 - 2m^2 - 2m + 6 + m^2 + 2m - 1$$

$$\det(A) = -2m + 1 - 2m^2 + m^2 + 2m - 1$$

$$\det(A) = -m^2$$

Para que el sistema sea compatible y determinado, $\det(A) \neq 0$, es decir:

$$-m^2 \neq 0 \implies m \neq 0$$

b) Resolverlo para $m = 1$ y $m = 2$.

Para $m = 1$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + y + 3z = 1 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones:

$$(x + 2y + z) + (x + y + 3z) + (x + 3y + 2z) = 1 + 1 + 2$$

$$3x + 6y + 6z = 4 \implies x + 2y + 2z = \frac{4}{3}$$

Sustituyendo en las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 2y + z = 1 \\ x + y + 3z = 1 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{aligned}$$

De la primera ecuación:

$$x = 1 - 2y - z$$

Sustituyendo en las otras ecuaciones:

$$(1 - 2y - z) + y + 3z = 1 \implies 1 - y + 2z = 1 \implies -y + 2z = 0 \implies y = 2z$$

Sustituyendo y en la primera ecuación:

$$x + 2(2z) + z = 1 \implies x + 4z + z = 1 \implies x + 5z = 1 \implies x = 1 - 5z$$

Solución:

$$x = 1 - 5z, \quad y = 2z, \quad z = t \quad \text{para algún } t \in \mathbb{R}$$

Para $m = 2$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ x + 4y + 3z = 3 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones:

$$(x + 2y + z) + (2x + y + 3z) + (x + 4y + 3z) = 2 + 1 + 3$$

$$4x + 7y + 7z = 6 \implies x + \frac{7}{4}y + \frac{7}{4}z = \frac{3}{2}$$

Sustituyendo en las ecuaciones: Para $m = 2$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ x + 4y + 3z = 3 \end{cases}$$

De la primera ecuación:

$$x = 2 - 2y - z$$

Sustituyendo x en las otras ecuaciones:

$$2(2 - 2y - z) + y + 3z = 1 \implies 4 - 4y - 2z + y + 3z = 1 \implies 4 - 3y + z = 1 \implies z = 3y - 3$$

Sustituyendo z en la primera ecuación:

$$x = 2 - 2y - (3y - 3) \implies x = 2 - 2y - 3y + 3 \implies x = 5 - 5y$$

Sustituyendo x y z en la tercera ecuación para verificar:

$$(5 - 5y) + 4y + 3(3y - 3) = 3 \implies 5 - 5y + 4y + 9y - 9 = 3 \implies 5 + 8y - 9 = 3 \implies 8y - 4 = 3 \implies 8y = 7 \implies y = \frac{7}{8}$$

Sustituyendo y en x y z:

$$x = 5 - 5\left(\frac{7}{8}\right) \implies x = 5 - \frac{35}{8} \implies x = \frac{40}{8} - \frac{35}{8} \implies x = \frac{5}{8}$$

$$z = 3\left(\frac{7}{8}\right) - 3 \implies z = \frac{21}{8} - 3 \implies z = \frac{21}{8} - \frac{24}{8} \implies z = -\frac{3}{8}$$

Solución:

$$x = \frac{5}{8}, \quad y = \frac{7}{8}, \quad z = -\frac{3}{8}$$