# EXPERIMENTAL: Soluciones de GPT sin revisar. PUEDEN CONTENER ERRORES, procedimientos extraños, etc. Usar solo como orientación.

## 1. Límites

### 1.1. Calcula m para que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{mx^2-1+\cos x}{\sin(x^2)}\right)=0$

Para resolver este límite, primero notemos que se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{mx^2-1+\cos x}{\sin(x^2)}\right)$$

Aplicamos L'Hôpital dos veces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2mx-\sin x}{2x\cos x^2}=\ldots=\frac{2m-1}{2}$$

Para que este límite sea 0, necesitamos que:

$$2m-1=0 \implies m=\frac{1}{2}$$

### 1.2. Calcula $\lim_{x\to 0^+} x^x$

Para resolver esta indeterminación del tipo $0^0$, tomamos logaritmos naturales:

$$y=x^x \implies \ln y = x\ln x$$

Entonces, el límite se transforma en:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x$$

Reescribimos para aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \implies \lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

**1.3. Calcula** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x}\right)$

Este es un límite del tipo $\frac{0}{0}$, así que aplicamos L'Hôpital directamente:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2x-4x^2}{1-4x-\cos x}$$

Aplicamos L'Hôpital nuevamente:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2-8x}{-4+\sin x} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

**1.4. Calcula** $\lambda$ **para que** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\lambda x^2}-1}{3x^2} = 2$

Esta es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, así que aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\lambda x^2}-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\lambda x e^{\lambda x^2}}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\lambda e^{\lambda x^2}}{6} = \frac{2\lambda}{6} = \frac{\lambda}{3}$$

Para que este límite sea igual a 2, necesitamos que:

$$\frac{\lambda}{3} = 2 \implies \lambda = 6$$

**1.5.** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(\ln(x+1))^2}$

mal aplicado el segundo L´H,
pero el resultado está bien

Para resolver esta indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(\ln(x+1))^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\ln(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}$$

Aplicamos L'Hôpital nuevamente:

mal aplicado,
pero el resultado está bien

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x(x+1)^2}{2((x+1)-1)} = \frac{1}{2}$$

**1.6.** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

**1.6.** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

aplica mal L´H, tiene que dar 1/e

---

Para resolver este límite del tipo $1^\infty$, utilizamos la fórmula:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{x+1}-1\right)}$$

Evaluamos el límite dentro del exponente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{x+1}-1\right)$$

Simplificamos la expresión dentro del paréntesis:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1-(x+1)}{x+1}\right)$$

Esto se convierte en:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1-x-1}{x+1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+e^{-x}-2-x}{x+1}\right)$$

Evaluamos el límite aplicando L'Hôpital:

$$\cancel{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{e^x+e^{-x}-2-x}{x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-1}{1}=e^0-e^0-1=1-1=0}$$

~~Por lo tanto:~~

$$\cancel{\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=e^0=1}$$ RESULTADO: 1/e

### 1.7. Calcula el valor de $m$ para que $\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-2x)}{x-mx^2-\sin x}=-\frac{1}{2}$

Primero simplificamos la expresión usando $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$: no usa procedimiento esperado. Usar L´H. Resultado correcto

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-2x)}{x-mx^2-x+\frac{x^3}{6}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-2x)}{-mx^2+\frac{x^3}{6}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-2x)}{x^2(-m+\frac{x}{6})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2x}{-m+\frac{x}{6}}$$

Para que este límite sea $-\frac{1}{2}$, necesitamos que:

$$\frac{1}{-m}=-\frac{1}{2}\implies m=2$$

### 1.8. Calcula $m$ para que $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{mx-\cos(x)+1}=\frac{1}{2}$

Usamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{mx-\cos(x)+1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{m+\sin(x)}=\frac{1}{m}$$

Para que este límite sea $\frac{1}{2}$, necesitamos que:

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{2}\implies m=2$$

### 1.9. Calcula $\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{(\ln(x))^2}$

no usa procedimiento esperado. Usar L´H. Resultado correcto

Utilizamos la aproximación $\cos y\approx 1-\frac{y^2}{2}$ y $\ln(x)\approx x-1$ para $y=x-1\to 0$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{(\ln(x))^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{(y)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y^2}{2}}{y^2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

**1.10. Calcula** $\lim_{x\to\infty}(3^x+1)^{\frac{2}{x-1}}$

Tomamos logaritmos para resolver este límite:

$$\ln y=\frac{2}{x-1}\ln(3^x+1)$$

Para $x\to\infty$, $\ln(3^x+1)\approx x\ln 3$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x\ln 3}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln 3}{1-\frac{1}{x}}=2\ln 3$$

Por lo tanto:

$$y=e^{2\ln 3}=3^2=9$$

**1.11. Calcula, si existe, el valor de $m$ para que** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos^2 x}{mx^2-\sin(x^2)}=2$ ✓

Usamos aproximaciones para resolver la indeterminación:

$$e^{x^2}\approx 1+x^2 \quad \text{y} \quad \cos^2 x\approx 1-x^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)-(1-x^2)}{mx^2-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{(m-1)x^2}=\frac{2}{m-1}$$

Para que este límite sea igual a 2, necesitamos que:

$$\frac{2}{m-1}=2 \implies m-1=1 \implies m=2$$

**1.12. Calcula, si existe, el valor de $m$ para que** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)-mx^2}{e^{x^2}-\cos(2x)}=-1$

Para resolver esta indeterminación, usamos las aproximaciones $\sin(x)\approx x$ y $e^{x^2}\approx 1+x^2$ y $\cos(2x)\approx 1-2x^2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-mx^2}{1+x^2-(1-2x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-m)}{3x^2}=\frac{1-m}{3}$$

no usa procedimiento esperado. Usar L´H. Resultado correcto

Para que este límite sea igual a -1, necesitamos que:

$$\frac{1-m}{3}=-1 \implies 1-m=-3 \implies m=4$$

**1.13.** $\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{(\ln(x))^2}$ ✓

Este límite ya fue resuelto en el ejercicio 1.9 y su resultado es:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{(\ln(x))^2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

### 1.14. $\lim_{x\to 0}(\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}}$

Tomamos logaritmos para resolver este límite:

$$\ln y = \frac{3}{x^2}\ln(\cos(2x))$$

Para $x \to 0$, $\ln(\cos(2x)) \approx -2x^2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\ln(\cos(2x))}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3(-2x^2)}{x^2} = -6$$

Por lo tanto:

$$y = e^{-6}$$

# 2. Continuidad y derivabilidad

### Ejercicio 2.1

Para que $f(x)$ sea continua y derivable en $\mathbb{R}$ y tenga un extremo relativo en $x = -2$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ x + \ln(1 + x^2) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

#### Continuidad en $x = 0$:

Para la continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Evaluamos los límites:

$$\lim_{x\to 0^-}(ax^2 + bx + c) = c$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x + \ln(1 + x^2)\right) = 0$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$:

$$c = 0$$

#### Derivabilidad en $x = 0$:

Para la derivabilidad en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$$

Calculamos las derivadas:

Para $x \leq 0$:

$$f'(x) = 2ax + b$$

Para $x > 0$:

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{1+x^2}$$

Evaluamos los límites:

$$\lim_{x \to 0^-} (2ax + b) = b$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) = 1$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 0$:

$$b = 1$$

Para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -2$, la derivada en $x = -2$ debe ser cero:

$$f'(-2) = 2a(-2) + 1 = 0$$

$$-4a + 1 = 0$$

$$a = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, los valores son:

$$\boxed{a = \frac{1}{4}, \quad b = 1, \quad c = 0}$$

## Ejercicio 2.2

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ y estudiar la derivabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 0 \\ 1 + xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

### Continuidad en $x = 0$:

Para la continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

Evaluamos los límites:

$$\lim_{x \to 0^-} a = a$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + xe^{-x}\right) = 1$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$:

$$a = 1$$

### Derivabilidad en $x = 0$:

Para la derivabilidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$$

Calculamos las derivadas:

Para $x < 0$:

$$f'(x) = 0$$

Para $x \geq 0$:

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$$

Evaluamos los límites:

$$\lim_{x \to 0^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-x}(1 - x) = 1$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 0$, estos límites no coinciden, por lo tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

## Ejercicio 2.3

Dada $f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$, estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = 0$.

### Continuidad en $x = 0$:

Para la continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

Evaluamos el límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x^2 + 1} = 0$$

Y $f(0) = \frac{|0|}{0^2+1} = 0$.

Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $x = 0$.

### Derivabilidad en $x = 0$:

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{|x|}{x^2 + 1}\right)$$

Para $x > 0$:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Para $x < 0$:

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot (-1) - (-x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 1 + 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

En $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 0$, estos límites no coinciden, por lo tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

## Ejercicio 2.4

Calcular $a$ y $b$ para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + bx & \text{si } x \leq 2 \\ -x + c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

### Continuidad en $x = 2$:

Para la continuidad en $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

Evaluamos los límites:

$$\lim_{x \to 2^-} (-x^2 + bx) = -4 + 2b$$

$$\lim_{x \to 2^+} (-x + c) = -2 + c$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$:

$$-4 + 2b = -2 + c$$

$$2b - c = 2 \quad (1)$$

### Derivabilidad en $x = 2$:

Para la derivabilidad en $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} f'(x)$$

Calculamos las derivadas:

Para $x \leq 2$:

$$f'(x) = -2x + b$$

Para $x > 2$:

$$f'(x) = -1$$

Evaluamos los límites:

$$\lim_{x \to 2^-} (-2x + b) = -4 + b$$

$$\lim_{x \to 2^+} -1 = -1$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 2$:

$$-4 + b = -1$$

$$b = 3$$

Sustituimos $b$ en (1):

$$2(3) - c = 2$$

$$6 - c = 2$$

$$c = 4$$

Por lo tanto, los valores son:

$$\cancel{a = -1,} \quad b = 3, \quad c = 4$$

### Ejercicio 2.5

falla, hay que estudiar derivabilidad
resultado correcto

Calcular el valor de $a$ para que la función $f$ cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en cualquier intervalo:

$$f(x) = \frac{x - a}{1 + |x - 1|}$$

El teorema del valor medio requiere que $f$ sea continua en un intervalo cerrado $[c, d]$ y derivable en el intervalo abierto $(c, d)$.

### Continuidad:

Para $f(x)$:

- ~~$|x - 1|$ no es derivable en $x = 1$, por lo tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.~~
- Sin embargo, para que $f$ sea continua en $x = 1$:

Evaluamos los límites:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x - a}{1 + (1 - x)} = \frac{1 - a}{2 - x}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x - a}{1 + (x - 1)} = \frac{1 - a}{x}$$

Para que $f$ sea continua:

$$\frac{1-a}{2-1} = \frac{1-a}{1}$$

Para que los límites sean iguales:

$$a = 1$$

Por lo tanto, $a = 1$.

## Ejercicio 2.6

Calcular los valores de $a$ y $b$ para que la función $f$ cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en cualquier intervalo $[1, m]$, $m > e$:

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln x & \text{si } 0 < x \leq e \\ bx & \text{si } x > e \end{cases}$$

### Continuidad en $x = e$:

Para la continuidad en $x = e$:

$$\lim_{x \to e^-} f(x) = \lim_{x \to e^+} f(x)$$

Evaluamos los límites:

$$\lim_{x \to e^-} (a + \ln x) = a + \ln e = a + 1$$

$$\lim_{x \to e^+} (bx) = be$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = e$:

$$a + 1 = be$$

$$a = be - 1$$

### Derivabilidad en $x = e$:

Para la derivabilidad en $x = e$:

$$\lim_{x \to e^-} f'(x) = \lim_{x \to e^+} f'(x)$$

Calculamos las derivadas:

Para $0 < x \leq e$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(a + \ln x) = \frac{1}{x}$$

Para $x > e$:

$$f'(x) = b$$

Evaluamos los límites:

$$\lim_{x \to e^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \to e^+} b = b$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = e$:

$$\frac{1}{e} = b$$

Por lo tanto:

$$b = \frac{1}{e}$$

Sustituimos $b$ en la ecuación de la continuidad:

$$a = \left(\frac{1}{e}\right) e - 1 = 1 - 1 = 0$$

Por lo tanto, los valores son:

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{e}$$

# 3. Parámetros de funciones

## Ejercicio 3.1

Dada $g(x) = ax^4 + bx + c$, calcular los valores de $a, b, c$ para que $g(x)$ tenga en el punto $(1, -1)$ un mínimo relativo y la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en $x = 0$ sea paralela a la recta $y = 4x$.

### Mínimo Relativo en $(1, -1)$:

Para que $g(x)$ tenga un mínimo relativo en $(1, -1)$:

1. $g(1) = -1$
2. $g'(1) = 0$
3. $g''(1) = 0$

$$g(1) = a(1)^4 + b(1) + c = a + b + c = -1 \quad (1)$$

$$g'(x) = 4ax^3 + b$$

$$g'(1) = 4a(1)^3 + b = 4a + b = 0 \quad (2)$$

$$g''(x) = 12ax^2$$

$$g''(1) = 12a(1)^2 = 12a > 0 \quad \text{(mínimo relativo)}$$

### Recta Tangente en $x = 0$:

Para que la recta tangente en $x = 0$ sea paralela a $y = 4x$:

$$g'(0) = 4$$

$$g'(0) = 4a(0)^3 + b = b = 4 \quad (3)$$

Sustituyendo $b = 4$ en (1) y (2):

$$a + 4 + c = -1 \quad (1')$$

$$4a + 4 = 0 \quad (2')$$

$$4a = -4$$

$$a = -1$$

Sustituimos $a = -1$ en (1'):

$$-1 + 4 + c = -1$$

$$3 + c = -1$$

$$c = -4$$

Por lo tanto, los valores son:

$$a = -1, \quad b = 4, \quad c = -4$$

## Ejercicio 3.2

Calcular los valores de $a$ y $b$ para que la función $f(x) = ax^2 + bx \cdot \ln x$ tenga un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$. Para esos valores de $a$ y $b$, calcular el dominio y los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$.

### Punto de Inflexión en $(1, 2)$:

Para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en $(1, 2)$:

1. $f(1) = 2$
2. $f''(1) = 0$

$$f(x) = ax^2 + bx \ln x$$

$$f(1) = a(1)^2 + b(1) \ln 1 = a = 2 \quad (1)$$

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = 2ax + b(\ln x + 1)$$

$$f''(x) = 2a + \frac{b}{x}$$

Para $x = 1$:

$$f''(1) = 2a + b = 0$$

$$2(2) + b = 0 \quad (2)$$

$$4 + b = 0$$

$$b = -4$$

Por lo tanto, los valores son:

$$a = 2, \quad b = -4$$

### Dominio y Intervalos de Concavidad y Convexidad:

El dominio de $f(x)$ es $x > 0$ ya que $\ln x$ no está definido para $x \leq 0$.

Calculamos $f''(x)$ para determinar los intervalos de concavidad y convexidad:

$$f''(x) = 4 - \frac{4}{x}$$

$$f''(x) = 0 \implies 4 = \frac{4}{x} \implies x = 1$$

Para $x > 1, f''(x) > 0$, por lo tanto $f(x)$ es cóncava hacia arriba (convexa).

Para $0 < x < 1, f''(x) < 0$, por lo tanto $f(x)$ es cóncava hacia abajo (cóncava).

## Ejercicio 3.3

Dada la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$, determina los valores de $a$, $b$ y $c$ sabiendo que $f$ tiene un máximo en el punto de abscisa $x = -\frac{1}{2}$ y la recta tangente a $f$ en el punto $(1, 3)$ es $y = -3x + 6$.

### Máximo en $x = -\frac{1}{2}$:

1. $f'(-\frac{1}{2}) = 0$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(-\frac{1}{2}) = 2a(-\frac{1}{2}) + b = -a + b = 0 \implies a = b \quad (1)$$

### Recta Tangente en $(1, 3)$:

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = -3x + 6$:

1. $f(1) = 3$
2. $f'(1) = -3$

$$f(1) = a(1)^2 + b(1) + c = a + b + c = 3 \quad (2)$$

$$f'(1) = 2a(1) + b = 2a + b = -3 \quad (3)$$

Sustituimos $a = b$ de (1) en (2) y (3):

$$a + a + c = 3$$

$$2a + c = 3 \quad (2')$$

$$2a + a = -3$$

$$3a = -3$$

$$a = -1$$

Sustituimos $a = -1$ en (2'):

$$2(-1) + c = 3$$

$$-2 + c = 3$$

$$c = 5$$

Por lo tanto, los valores son:

$$a = -1, \quad b = -1, \quad c = 5$$

## Ejercicio 3.4

Dada la función $f(x) = \frac{x^2+\alpha}{x^2+1}$, calcula la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$. Halla el valor de $\alpha$ para que esa recta tangente sea horizontal.

### Recta Tangente en $x = 1$:

Calculamos la derivada de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^2 + \alpha}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot 2x - (x^2 + \alpha) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x(x^2 + 1 - x^2 - \alpha)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x(1 - \alpha)}{(x^2 + 1)^2}$$

Para $x = 1$:

$$f'(1) = \frac{2(1)(1 - \alpha)}{(1^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - \alpha)}{4} = \frac{1 - \alpha}{2}$$

Para que la recta tangente sea horizontal, $f'(1) = 0$:

$$\frac{1 - \alpha}{2} = 0$$

$$1 - \alpha = 0$$

$$\alpha = 1$$

Por lo tanto, el valor de $\alpha$ es:

$$\alpha = 1$$

## Ejercicio 3.5

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcula los valores de $a, b, c, d$ sabiendo que tiene un punto de inflexión en $(0, 2)$ y es tangente a la recta $y = -2x - 2$ en $(1, -4)$.

### Punto de Inflexión en $(0, 2)$:

Para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en $(0, 2)$:

1. $f(0) = 2$
2. $f''(0) = 0$

$$f(0) = a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = d = 2 \quad (1)$$

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Para $x = 0$:

$$f''(0) = 2b = 0$$

$$b = 0 \quad (2)$$

**Tangencia en $(1, -4)$:**

Para que $f(x)$ sea tangente a $y = -2x - 2$ en $(1, -4)$:

1. $f(1) = -4$
2. $f'(1) = -2$

$$f(1) = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = a + c + 2 = -4 \quad (3)$$

$$f'(1) = 3a(1)^2 + 2b(1) + c = 3a + c = -2 \quad (4)$$

Sustituimos $b = 0$ y $d = 2$ en (3) y (4):

$$a + c + 2 = -4$$

$$a + c = -6 \quad (3')$$

$$3a + c = -2 \quad (4)$$

Restamos (3') de (4):

$$(3a + c) - (a + c) = -2 - (-6)$$

$$2a = 4$$

$$a = 2$$

Sustituimos $a = 2$ en (3'):

$$2 + c = -6$$

$$c = -8$$

Por lo tanto, los valores son:

$$a = 2, \quad b = 0, \quad c = -8, \quad d = 2$$

## Ejercicio 3.6

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcula los valores de $a, b, c, d$ sabiendo que tiene un punto de inflexión en $(0, 1)$ y un mínimo relativo en $(1, -1)$.

### Punto de Inflexión en $(0, 1)$:

Para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en $(0, 1)$:

1. $f(0) = 1$
2. $f''(0) = 0$

$$f(0) = a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = d = 1 \quad (1)$$

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Para $x = 0$:

$$f''(0) = 2b = 0$$

$$b = 0 \quad (2)$$

### Mínimo Relativo en $(1, -1)$:

Para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $(1, -1)$:

1. $f(1) = -1$
2. $f'(1) = 0$
3. $f''(1) > 0$

$$f(1) = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = a + c + 1 = -1 \quad (3)$$

$$f'(1) = 3a(1)^2 + 2b(1) + c = 3a + c = 0 \quad (4)$$

Sustituimos $b = 0$ y $d = 1$ en (3) y (4):

$$a + c + 1 = -1$$

$$a + c = -2 \quad (3')$$

$$3a + c = 0 \quad (4)$$

Restamos (3') de (4):

$$(3a + c) - (a + c) = 0 - (-2)$$

$$2a = 2$$

$$a = 1$$

Sustituimos $a = 1$ en (3'):

$$1 + c = -2$$

$$c = -3$$

Por lo tanto, los valores son:

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -3, \quad d = 1$$

## Ejercicio 3.7 (Continuación)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} mx & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, calcular los valores de $a$, $b$ y $m$ para que la función sea continua y derivable en $x = 1$ y tenga un extremo relativo en $x = 3$.

Ya hemos encontrado que:

$$a = 1, \quad b = -6, \quad m = -4$$

### Calcular si existe un punto $c$ en el intervalo $(0, 5)$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f$ en dicho punto sea paralela al segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(5, -4)$.

La pendiente de la recta que une los puntos $(0, 0)$ y $(5, -4)$ es:

$$m_{recta} = \frac{-4 - 0}{5 - 0} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

Queremos encontrar $c$ tal que $f'(c) = -\frac{4}{5}$.

Para $x < 1$:

$$f'(x) = m = -4$$

Para $x \geq 1$:

$$f'(x) = 2ax + b = 2(1)x - 6 = 2x - 6$$

Buscamos $c$ en el intervalo $(0, 5)$ donde $f'(c) = -\frac{4}{5}$.

Para $x \geq 1$:

$$2x - 6 = -\frac{4}{5}$$

$$2x = -\frac{4}{5} + 6$$

$$2x = -\frac{4}{5} + \frac{30}{5}$$

$$2x = \frac{26}{5}$$

$$x = \frac{26}{10}$$

$$x = \frac{13}{5}$$

$$x = 2.6$$

Por lo tanto, el punto $c$ en el intervalo $(0, 5)$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f$ en dicho punto sea paralela al segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(5, -4)$ es:

$$c = 2.6$$

# 4. Recta tangente y normal

### Ejercicio 4.1

Dada la función $f(x) = 2\cos(x) + |x - 1|$, calcula $f'(0)$ y obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.

**Derivada de $f(x)$ en $x = 0$:**

$$f(x) = 2\cos(x) + |x - 1|$$

Para $x < 1$:

$$f(x) = 2\cos(x) + (1 - x)$$

Para $x \geq 1$:

$$f(x) = 2\cos(x) + (x - 1)$$

Calculamos la derivada:

Para $x < 1$:

$$f'(x) = -2\sin(x) - 1$$

Para $x \geq 1$:

$$f'(x) = -2\sin(x) + 1$$

Para $x = 0$:

$$f'(0) = -2\sin(0) - 1 = -1$$

**Ecuación de la recta tangente en $x = \pi$:**

Calculamos $f(\pi)$:

$$f(\pi) = 2\cos(\pi) + |\pi - 1| = 2(-1) + (\pi - 1) = -2 + \pi - 1 = \pi - 3$$

La pendiente en $x = \pi$:

$$f'(\pi) = -2\sin(\pi) + 1 = 1$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(\pi) = f'(\pi)(x - \pi)$$

Sustituimos los valores:

$$y - (\pi - 3) = 1(x - \pi)$$

$$y = x - \pi + \pi - 3$$

$$y = x - 3$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y = x - 3$$

## Ejercicio 4.2

Calcula la recta tangente a la función $y = \sqrt{2x-1}$ en el punto en que dicha recta sea paralela a recta $y = \frac{1}{3}x - 2$.

La pendiente de la recta $y = \frac{1}{3}x - 2$ es:

$$m = \frac{1}{3}$$

Calculamos la derivada de $y = \sqrt{2x-1}$:

$$y = (2x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

Igualamos la derivada a la pendiente:

$$\frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{2x-1} = 3$$

$$2x - 1 = 9$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

Calculamos $y$ en $x = 5$:

$$y = \sqrt{2(5)-1} = \sqrt{10-1} = \sqrt{9} = 3$$

El punto es $(5, 3)$.

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 5)$$

$$y - 3 = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} + 3$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

## Ejercicio 4.3

Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ en su punto de inflexión.

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

Para encontrar el punto de inflexión, igualamos $f''(x)$ a cero:

$$6x + 6 = 0$$

$$x = -1$$

Calculamos $f(-1)$:

$$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 = -1 + 3 - 1 = 1$$

La pendiente en $x = -1$ es:

$$f'(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) = 3 - 6 = -3$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$$

$$y - 1 = -3(x + 1)$$

$$y - 1 = -3x - 3$$

$$y = -3x - 2$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y = -3x - 2$$

## Ejercicio 4.4

Calcula la recta tangente a la función $y = \ln(x + 2)$ en el punto en que dicha recta sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

La pendiente de la bisectriz del primer cuadrante es:

$$m = 1$$

Calculamos la derivada de $y = \ln(x + 2)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + 2}$$

Igualamos la derivada a la pendiente:

$$\frac{1}{x+2} = 1$$

$$x + 2 = 1$$

$$x = -1$$

Calculamos $y$ en $x = -1$:

$$y = \ln(-1+2) = \ln(1) = 0$$

El punto es $(-1, 0)$.

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - 0 = 1(x+1)$$

$$y = x + 1$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y = x + 1$$

## Ejercicio 4.5

Dada la función $f(x) = \frac{x^2+\alpha}{x^2+1}$, calcula la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$. Halla el valor de $\alpha$ para que esa recta tangente sea horizontal.

### Recta Tangente en $x = 1$:

Calculamos la derivada de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^2+\alpha}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot 2x - (x^2+\alpha)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1-x^2-\alpha)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(1-\alpha)}{(x^2+1)^2}$$

Para $x = 1$:

$$f'(1) = \frac{2(1)(1-\alpha)}{(1^2+1)^2} = \frac{2(1-\alpha)}{4} = \frac{1-\alpha}{2}$$

Para que la recta tangente sea horizontal, $f'(1) = 0$:

$$\frac{1-\alpha}{2} = 0$$

$$1 - \alpha = 0$$

$$\alpha = 1$$

Por lo tanto, el valor de $\alpha$ es:

$$\alpha = 1$$

## Ejercicio 4.6 ojo, errores señalados tachados

Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$ en el punto en el que sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

La pendiente de la bisectriz del primer cuadrante es:

$$m = 1$$

Calculamos la derivada de $f(x)$:

Para $x < 1$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Para $x < 1$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left((1-x)^{-1}\right) = -(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Para $x > 1$:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left((x-1)^{-1}\right) = -(x-1)^{-2}(1) = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

Queremos encontrar $x$ tal que $f'(x) = 1$:

Para $x < 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1$$

$$(1-x)^2 = 1$$

$$1 - x = \pm 1$$

Si $1 - x = 1$:

$$x = 0$$

Si $1 - x = -1$:

$$x = 2$$

Para $x > 1$:

$$-\frac{1}{(x-1)^2} = 1$$

No hay soluciones para esta ecuación.

Entonces, consideramos los puntos $x = 0$ y ~~$x = 2$.~~

x=2>1, no hay soluciones tal y como se indicó.
por lo que eliminamos esa solución

Calculamos $f(x)$ en estos puntos:

Para $x = 0$:

$$f(0) = \cancel{\frac{1}{1-0} = 1}$$

~~Para $x = 2$:~~

$$\cancel{f(2) = \frac{1}{2-1} = 1}$$

En ambos casos, los puntos son $(0, 1)$ ~~y $(2, 1)$.~~

La ecuación de la recta tangente en $x = 0$:

La pendiente es $1$, y pasa por el punto $(0, 1)$:

$$y - 1 = 1(x - 0)$$

$$y = x + 1$$

~~La ecuación de la recta tangente en $x = 2$:~~

~~La pendiente es $1$, y pasa por el punto $(2, 1)$:~~

$$\cancel{y - 1 = 1(x - 2)}$$

$$\cancel{y = x - 1}$$

Por lo tanto, la~~s~~ ecuacion~~es~~ de las rectas tangentes son:

$$y = x + 1 \quad \cancel{\text{y} \quad y = x - 1}$$

# 5. Optimización

## Ejercicio 5.1

Se quiere construir un acuario con forma de paralelepípedo recto, con tapa y base cuadradas. La tapa es de metacrilato, la base es de un material metálico, y las caras verticales, de cristal.

El metacrilato tiene un precio de 15 €/m², el material metálico de 90 €/m², y el cristal, de 25 €/m². Con un presupuesto de 1260 €, ¿cuál es el volumen máximo del acuario que se puede construir con estas características?

Denotemos: - $x$ como el lado de la base cuadrada (en metros). - $h$ como la altura del acuario (en metros).

El costo total es la suma de los costos de la tapa, la base y las caras laterales.

Costo de la tapa (metacrilato):

$$Costo_{tapa} = 15x^2$$

Costo de la base (material metálico):

$$Costo_{base} = 90x^2$$

Costo de las caras laterales (cristal):

$$Costo_{caras} = 25 \cdot 4xh = 100xh$$

El presupuesto total es 1260 €, entonces:

$$15x^2 + 90x^2 + 100xh = 1260$$

$$105x^2 + 100xh = 1260$$

Despejamos $h$:

$$100xh = 1260 - 105x^2$$

$$h = \frac{1260 - 105x^2}{100x}$$

$$h = \frac{1260}{100x} - \frac{105x^2}{100x}$$

$$h = \frac{1260}{100x} - 1.05x$$

El volumen del acuario es:

$$V = x^2 h$$

Sustituimos $h$ en la ecuación del volumen:

$$V = x^2 \left( \frac{1260}{100x} - 1.05x \right)$$

$$V = x^2 \left( \frac{1260}{100x} \right) - x^2 \,(1.05x)$$

$$V = 12.6x - 1.05x^3$$

Para maximizar el volumen, derivamos $V$ respecto a $x$ y lo igualamos a cero:

$$\frac{dV}{dx} = 12.6 - 3.15x^2$$

Igualamos a cero:

$$12.6 - 3.15x^2 = 0$$

$$3.15x^2 = 12.6$$

$$x^2 = \frac{12.6}{3.15}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ m}$$

Sustituimos $x = 2$ en la ecuación para $h$:

$$h = \frac{1260}{100 \cdot 2} - 1.05 \cdot 2$$

$$h = \frac{1260}{200} - 2.1$$

$$h = 6.3 - 2.1$$

$$h = 4.2 \text{ m}$$

Por lo tanto, las dimensiones del acuario que maximizan el volumen con el presupuesto dado son $x = 2$ m y $h = 4.2$ m, y el volumen máximo es:

$$V = x^2 h = 2^2 \cdot 4.2 = 4 \cdot 4.2 = 16.8 \text{ m}^3$$

## Ejercicio 5.2

Se desea construir una caja sin tapa superior. Para ello, se usa una lámina de cartón rectangular, de 15 cm de ancho por 24 cm de largo, doblándola después de recortar un cuadrado de iguales dimensiones en cada esquina. Indicar cuáles son las dimensiones de la caja que hacen máximo su volumen.

Denotemos $x$ como el lado del cuadrado recortado en cada esquina (en cm).

El volumen de la caja es:

$$V = (15 - 2x)(24 - 2x)x$$

$$V = x(15 - 2x)(24 - 2x)$$

Desarrollamos la expresión:

$$V = x(360 - 30x - 48x + 4x^2)$$

$$V = x(360 - 78x + 4x^2)$$

$$V = 4x^3 - 78x^2 + 360x$$

Derivamos $V$ respecto a $x$ y lo igualamos a cero para encontrar los valores críticos:

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 156x + 360$$

Igualamos a cero:

$$12x^2 - 156x + 360 = 0$$

Dividimos entre 12:

$$x^2 - 13x + 30 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{2}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{13 \pm 7}{2}$$

$$x = 10 \text{ cm} \quad \text{o} \quad x = 3 \text{ cm}$$

El valor $x = 10$ cm no es factible porque $15 - 2(10) < 0$. Por lo tanto, el valor factible es $x = 3$ cm.

Calculamos las dimensiones de la caja:

$$\text{Ancho} = 15 - 2(3) = 9 \text{ cm}$$

$$\text{Largo} = 24 - 2(3) = 18 \text{ cm}$$

$$\text{Altura} = 3 \text{ cm}$$

Por lo tanto, las dimensiones de la caja que maximizan el volumen son 9 cm de ancho, 18 cm de largo y 3 cm de altura.

## Ejercicio 5.3

Se administra un medicamento a un enfermo y $t$ hora sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro.

Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

Para encontrar el valor máximo de $c(t)$, derivamos $c(t)$ respecto a $t$ y lo igualamos a cero.

$$c(t) = te^{-t/2}$$

Derivamos usando la regla del producto:

$$c'(t) = e^{-t/2} + t\left(-\frac{1}{2}e^{-t/2}\right)$$

$$c'(t) = e^{-t/2} - \frac{t}{2}e^{-t/2}$$

Igualamos a cero para encontrar los valores críticos:

$$e^{-t/2}\left(1 - \frac{t}{2}\right) = 0$$

$$1 - \frac{t}{2} = 0$$

$$t = 2$$

Para confirmar que $t = 2$ es un máximo, evaluamos la segunda derivada en $t = 2$:

$$c''(t) = -\frac{1}{2}e^{-t/2} - \frac{1}{2}e^{-t/2} + \frac{t}{4}e^{-t/2}$$

$$c''(t) = -e^{-t/2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{t}{4}\right)$$

$$c''(t) = -e^{-t/2}\left(1 - \frac{t}{4}\right)$$

Para $t = 2$:

$$c''(2) = -e^{-1}\left(1 - \frac{2}{4}\right)$$

$$c''(2) = -e^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$c''(2) = -e^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$c''(2) = -\frac{1}{2e} < 0$$

Dado que $c''(2) < 0$, $t = 2$ es un máximo.

Calculamos $c(2)$:

$$c(2) = 2e^{-2/2}$$

$$c(2) = 2e^{-1}$$

$$c(2) = 2e^{-1}$$

$$c(2) = \frac{2}{e}$$

Evaluamos numéricamente:

$$c(2) \approx \frac{2}{2.718} \approx 0.735 \text{ mg/ml}$$

Por lo tanto, el valor máximo de $c(t)$ es aproximadamente $0.735 \text{ mg/ml}$ y se alcanza en $t = 2$ horas.

Dado que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, y el valor máximo de $c(t)$ es $0.735 \text{ mg/ml}$, no hay riesgo para el paciente en ningún momento.

## Ejercicio 5.4

De entre todos los rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen sus lados sobre los ejes, y un vértice sobre la gráfica $y = 9 - x^2$ , determina los vértices del que tiene mayor área.

Sea $x$ la coordenada $x$ del vértice del rectángulo en la gráfica $y = 9 - x^2$ .

El área del rectángulo es:

$$A = x \cdot y = x(9 - x^2)$$

$$A = 9x - x^3$$

Derivamos $A$ respecto a $x$ y lo igualamos a cero para encontrar el valor de $x$ que maximiza el área:

$$\frac{dA}{dx} = 9 - 3x^2$$

Igualamos a cero:

$$9 - 3x^2 = 0$$

$$3x^2 = 9$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3}$$

Calculamos $y$ en $x = \sqrt{3}$:

$$y = 9 - (\sqrt{3})^2$$

$$y = 9 - 3$$

$$y = 6$$

Por lo tanto, los vértices del rectángulo que tiene mayor área son:

$$(0, 0), (\sqrt{3}, 0), (0, 6), (\sqrt{3}, 6)$$

## Ejercicio 5.5

Se dispone de una plancha de cartón cuadrada cuyo lado mide 1,2 metros. Determínese las dimensiones de la caja (sin tapa) de volumen máximo que se puede construir, recortando un cuadrado igual a cada esquina de la plancha y doblando adecuadamente para unir las aristas resultantes de los cortes.

Sea $x$ la longitud del lado del cuadrado recortado en cada esquina (en metros).

El volumen de la caja es:

$$V = (1.2 - 2x)^2 x$$

Desarrollamos la expresión:

$$V = (1.44 - 4.8x + 4x^2)x$$

$$V = 4x^3 - 4.8x^2 + 1.44x$$

Derivamos $V$ respecto a $x$ y lo igualamos a cero para encontrar los valores críticos:

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 9.6x + 1.44$$

Igualamos a cero:

$$12x^2 - 9.6x + 1.44 = 0$$

Dividimos entre 1.44:

$$\frac{12}{1.44}x^2 - \frac{9.6}{1.44}x + 1 = 0$$

$$8.33x^2 - 6.67x + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{6.67 \pm \sqrt{6.67^2 - 4 \cdot 8.33 \cdot 1}}{2 \cdot 8.33}$$

$$x = \frac{6.67 \pm \sqrt{44.48 - 33.32}}{16.66}$$

$$x = \frac{6.67 \pm \sqrt{11.16}}{16.66}$$

Evaluamos:

$$x = \frac{6.67 + 3.34}{16.66} \approx 0.6 \text{ m}$$

$$x = \frac{6.67 - 3.34}{16.66} \approx 0.2 \text{ m}$$

El valor factible es $x = 0.2$ m.

Calculamos las dimensiones de la caja:

$$\text{Longitud} = 1.2 - 2(0.2) = 0.8 \text{ m}$$

$$\text{Ancho} = 1.2 - 2(0.2) = 0.8 \text{ m}$$

$$\text{Altura} = 0.2 \text{ m}$$

Por lo tanto, las dimensiones de la caja que maximizan el volumen son 0.8 m de largo, 0.8 m de ancho y 0.2 m de altura.

## Ejercicio 5.6

Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido por la gráfica de $f(x) = 6 - \frac{x^2}{6}$ y la recta $y = 0$.

El área del rectángulo es:

$$A = 2x \cdot y = 2x\left(6 - \frac{x^2}{6}\right)$$

$$A = 2x\left(6 - \frac{x^2}{6}\right)$$

$$A = 12x - \frac{2x^3}{6}$$

$$A = 12x - \frac{x^3}{3}$$

Derivamos $A$ respecto a $x$ y lo igualamos a cero para encontrar el valor de $x$ que maximiza el área:

$$\frac{dA}{dx} = 12 - \frac{3x^2}{3}$$

$$\frac{dA}{dx} = 12 - x^2$$

Igualamos a cero:

$$12 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 12$$

$$x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Calculamos $y$ en $x = 2\sqrt{3}$:

$$y = 6 - \frac{(2\sqrt{3})^2}{6}$$

$$y = 6 - \frac{12}{6}$$

$$y = 6 - 2$$

$$y = 4$$

Por lo tanto, las dimensiones del rectángulo de área máxima son $2x = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ de base y $4$ de altura.

## Ejercicio 5.7

Con un alambre de 1 metro, se construyen dos figuras, un cuadrado y una circunferencia. Calcula la longitud de cada uno de los trozos en los que queda dividido el alambre para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea mínima.

Denotemos: - $x$ como la longitud del alambre usado para el cuadrado. - $1 - x$ como la longitud del alambre usado para la circunferencia.

La longitud del lado del cuadrado es:

$$L_{cuadrado} = \frac{x}{4}$$

El área del cuadrado es:

$$A_{cuadrado} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$$

La circunferencia tiene un perímetro de $1 - x$, por lo tanto, el radio es:

$$R = \frac{1 - x}{2\pi}$$

El área de la circunferencia es:

$$A_{circulo} = \pi\left(\frac{1 - x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(1 - x)^2}{4\pi}$$

La suma de las áreas es:

$$A = \frac{x^2}{16} + \frac{(1 - x)^2}{4\pi}$$

Derivamos $A$ respecto a $x$ y lo igualamos a cero para encontrar el valor de $x$ que minimiza el área:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{2x}{16} + \frac{2(1 - x)(-1)}{4\pi}$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{x}{8} - \frac{(1-x)}{2\pi}$$

Igualamos a cero:

$$\frac{x}{8} = \frac{1-x}{2\pi}$$

$$x \cdot 2\pi = 8(1-x)$$

$$2\pi x = 8 - 8x$$

$$2\pi x + 8x = 8$$

$$x(2\pi + 8) = 8$$

$$x = \frac{8}{2\pi + 8}$$

Por lo tanto, la longitud del alambre para el cuadrado es:

$$x = \frac{8}{2\pi + 8}$$

La longitud del alambre para la circunferencia es:

$$1 - x = 1 - \frac{8}{2\pi + 8} = \frac{2\pi}{2\pi + 8}$$

## Ejercicio 5.8

De entre todos los rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes, y un vértice sobre la gráfica de $f(x) = 8 - 2x^2$, determina los vértices del que tiene mayor área.

Sea $x$ la coordenada $x$ del vértice del rectángulo en la gráfica $y = 8 - 2x^2$.

El área del rectángulo es:

$$A = x \cdot y = x(8 - 2x^2)$$

$$A = 8x - 2x^3$$

Derivamos $A$ respecto a $x$ y lo igualamos a cero para encontrar el valor de $x$ que maximiza el área:

$$\frac{dA}{dx} = 8 - 6x^2$$

Igualamos a cero:

$$8 - 6x^2 = 0$$

$$6x^2 = 8$$

$$x^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Calculamos $y$ en $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$:

$$y = 8 - 2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$y = 8 - 2\left(\frac{4 \cdot 3}{9}\right)$$

$$y = 8 - 2\left(\frac{12}{9}\right)$$

$$y = 8 - 2\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$y = 8 - \frac{8}{3}$$

$$y = \frac{24}{3} - \frac{8}{3}$$

$$y = \frac{16}{3}$$

Por lo tanto, los vértices del rectángulo que tiene mayor área son:

$$(0,0), \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right), \left(0, \frac{16}{3}\right), \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{16}{3}\right)$$

# 6. Teoría + Aplicaciones

### 6.1. Definición de continuidad de una función en un punto

Una función $f(x)$ es continua en un punto $x = a$ si se cumplen las siguientes tres condiciones: 1. $f(a)$ está definida. 2. El límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $a$ existe. 3. El valor de la función en $a$ es igual al límite de la función cuando $x$ tiende a $a$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

### 6.2. Enuncia el teorema de Bolzano y explica su interpretación geométrica

#### Enunciado del Teorema de Bolzano:

Si una función $f$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe al menos un número $c$ en el intervalo abierto $(a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

#### Interpretación Geométrica:

El teorema de Bolzano establece que si una función continua cruza el eje $x$ en un intervalo, entonces debe haber al menos un punto en ese intervalo donde la función es cero. Geométricamente, esto significa que si la gráfica de la función empieza por debajo del eje $x$ en $a$ y termina por encima del eje $x$ en $b$, o viceversa, la gráfica debe cruzar el eje $x$ en al menos un punto entre $a$ y $b$.

### 6.3. Definición de derivada de una función en un punto

La derivada de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ es el límite de la tasa de cambio promedio de la función a medida que el intervalo de cambio tiende a cero. Se denota como $f'(a)$ o $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$ y se define como:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

### 6.4. Enunciado e interpretación geométrica del Teorema de Rolle

#### Enunciado del Teorema de Rolle:

Si una función $f$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto $(a, b)$ y $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número $c$ en el intervalo abierto $(a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

#### Interpretación Geométrica:

El teorema de Rolle afirma que si una función cumple con las condiciones mencionadas, entonces hay al menos un punto en el intervalo donde la tangente a la curva es horizontal. Geométricamente, esto significa que la función debe tener al menos un máximo o mínimo local en el intervalo $(a, b)$.

### 6.5. Enunciado e interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio de Lagrange (Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial)

#### Enunciado del Teorema del Valor Medio:

Si una función $f$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a, b)$, entonces existe al menos un número $c$ en el intervalo $(a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

#### Interpretación Geométrica:

El teorema del valor medio afirma que para cualquier función continua y derivable, hay al menos un punto en el intervalo donde la pendiente de la tangente a la curva es igual a la pendiente de la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Geométricamente, esto significa que la curva debe tener una tangente paralela a la cuerda en algún punto del intervalo.

### 6.6. Definición de función primitiva

Una función $F(x)$ se llama una primitiva (o antiderivada) de una función $f(x)$ en un intervalo $I$ si $F'(x) = f(x)$ para todo $x$ en $I$. En otras palabras, $F(x)$ es una función cuya derivada es $f(x)$.

### 6.7. Definición de integral indefinida

La integral indefinida de una función $f(x)$, denotada por $\int f(x)\,dx$, es el conjunto de todas sus primitivas. Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces la integral indefinida se expresa como:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

donde $C$ es una constante arbitraria llamada constante de integración.

## Ejercicio 6.8

Dada la función $f(x) = x^3 + x - 1$, ¿podemos afirmar que la gráfica de la función corta al eje $X$ en algún punto del intervalo $[0, 2]$?

Para verificar si la función corta el eje $X$ en algún punto del intervalo $[0, 2]$, aplicamos el Teorema de Bolzano. Necesitamos encontrar $f(a)$ y $f(b)$ para $a = 0$ y $b = 2$, y verificar si tienen signos opuestos.

$$f(0) = 0^3 + 0 - 1 = -1$$

$$f(2) = 2^3 + 2 - 1 = 8 + 2 - 1 = 9$$

Dado que $f(0) = -1$ y $f(2) = 9$, y $f(0) \cdot f(2) < 0$, por el Teorema de Bolzano, existe al menos un punto $c$ en el intervalo $[0, 2]$ tal que $f(c) = 0$. Por lo tanto, la gráfica de la función corta al eje $X$ en algún punto del intervalo $[0, 2]$.

## Ejercicio 6.9

Demuestra, usando el teorema de Rolle, que la función del apartado anterior tiene una única raíz en el intervalo $[0, 2]$.

Para aplicar el Teorema de Rolle, primero verificamos que $f(x)$ es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$, y que $f(0) = f(2) = 0$. Ya sabemos que $f(0) = -1$ y $f(2) = 9$, entonces estas condiciones no se cumplen. Por lo tanto, no podemos aplicar directamente el Teorema de Rolle para esta función.

## Ejercicio 6.10

Aplicar, si es posible, el Teorema del Valor Medio a la función $g(x) = x^2 + x$ en el intervalo $[1, 2]$, y calcular, en tal caso, un punto de dicho intervalo en el que $g'(x)$ tome el valor predicho por el Teorema del Valor Medio.

Primero, verificamos que $g(x)$ es continua en $[1, 2]$ y derivable en $(1, 2)$, lo cual es cierto. Aplicamos el Teorema del Valor Medio:

$$g'(c) = \frac{g(2) - g(1)}{2 - 1}$$

Calculamos $g(2)$ y $g(1)$:

$$g(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$g(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Entonces,

$$g'(c) = \frac{6 - 2}{2 - 1} = \frac{4}{1} = 4$$

Calculamos $g'(x)$:

$$g'(x) = 2x + 1$$

Igualamos a 4:

$$2c + 1 = 4$$

$$2c = 3$$

$$c = \frac{3}{2} = 1.5$$

Por lo tanto, el punto $c$ en el intervalo $[1, 2]$ en el que $g'(x)$ toma el valor predicho por el Teorema del Valor Medio es $c = 1.5$.

## Ejercicio 6.11

Aplica Bolzano para justificar que a la función $f(x) = x^3 - 2x$ corta el eje en algún punto del intervalo $[1, 2]$.

Primero, evaluamos $f(x)$ en los extremos del intervalo:

$$f(1) = 1^3 - 2(1) = 1 - 2 = -1$$

$$f(2) = 2^3 - 2(2) = 8 - 4 = 4$$

Dado que $f(1) = -1$ y $f(2) = 4$, y $f(1) \cdot f(2) < 0$, por el Teorema de Bolzano, existe al menos un punto $c$ en el intervalo $[1, 2]$ tal que $f(c) = 0$. Por lo tanto, la gráfica de la función corta al eje $X$ en algún punto del intervalo $[1, 2]$.

## Ejercicio 6.12

Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 1$ y $g(x) = x$, justifica, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 2]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.

Consideramos la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 1 - x = x^3 - x - 1$.

Aplicamos el Teorema de Bolzano a $h(x)$ en el intervalo $[1, 2]$:

$$h(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1$$

$$h(2) = 2^3 - 2 - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$$

Dado que $h(1) = -1$ y $h(2) = 5$, y $h(1) \cdot h(2) < 0$, por el Teorema de Bolzano, existe al menos un punto $c$ en el intervalo $[1, 2]$ tal que $h(c) = 0$, es decir, $f(c) = g(c)$. Por lo tanto, existe algún punto en el intervalo $[1, 2]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.

## Ejercicio 6.13

Justifica, usando el teorema de Rolle, que las funciones del apartado anterior se cortan en un único punto en el intervalo $[1, 2]$.

Primero, verificamos que $h(x) = x^3 - x - 1$ es continua en $[1, 2]$ y derivable en $(1, 2)$, y que $h(1) = h(2) = 0$. Aplicamos el Teorema de Rolle:

$$h'(x) = 3x^2 - 1$$

Igualamos a cero para encontrar el punto crítico:

$$3x^2 - 1 = 0$$

$$3x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dado que $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$ no está en el intervalo $(1, 2)$, no hay ningún $c$ en $(1, 2)$ tal que $h'(c) = 0$. Por lo tanto, $h(x)$ no tiene una tangente horizontal en $(1, 2)$ y se corta en un único punto en el intervalo $[1, 2]$.

## Ejercicio 6.14

Comprueba si la función $f(x) = |x^2 - 4x|$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en los intervalos $[1, 3]$ y $[3, 5]$.

Primero, evaluamos $f(x)$ en los extremos de los intervalos:

Para $[1, 3]$:

$$f(1) = |1^2 - 4(1)| = |-3| = 3$$

$$f(3) = |3^2 - 4(3)| = |9 - 12| = 3$$

Para $[3, 5]$:

$$f(3) = |3^2 - 4(3)| = |9 - 12| = 3$$

$$f(5) = |5^2 - 4(5)| = |25 - 20| = 5$$

Para el intervalo $[1, 3]$, dado que $f(1) = f(3) = 3$ y $f(x)$ es continua y derivable en $(1, 3)$, aplicamos el Teorema de Rolle. Calculamos la derivada de $f(x)$ en $(1, 3)$:

Para $x^2 - 4x \geq 0, f(x) = x^2 - 4x$:

$$f'(x) = 2x - 4$$

Para $x^2 - 4x < 0, f(x) = 4x - x^2$:

$$f'(x) = 4 - 2x$$

En el intervalo $[1, 3]$, la función cambia de $x^2 - 4x$ a $4x - x^2$. Buscamos un $c$ tal que $f'(c) = 0$:

Para $x^2 - 4x \geq 0$ ($x \geq 4$ o $x \leq 0$), $f(x) = x^2 - 4x$:

$$f'(x) = 2x - 4$$

Para $x^2 - 4x < 0$ $(0 < x < 4)$, $f(x) = 4x - x^2$:

$$f'(x) = 4 - 2x$$

En el intervalo $[1, 3]$, debemos considerar $f(x) = 4x - x^2$ ya que $1 < x < 3$ satisface $0 < x < 4$.

Igualamos la derivada a cero:

$$4 - 2x = 0$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Dado que $2$ está en el intervalo $[1, 3]$, cumple con las hipótesis del Teorema de Rolle. Por lo tanto, la función

$f(x) = |x^2 - 4x|$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[1, 3]$ y hay un $c$ en $(1, 3)$ tal que $f'(c) = 0$.

Para el intervalo $[3, 5]$:

Evaluamos $f(3)$ y $f(5)$:

$$f(3) = |3^2 - 4(3)| = |9 - 12| = 3$$

$$f(5) = |5^2 - 4(5)| = |25 - 20| = 5$$

Dado que $f(3) \neq f(5)$, no cumple la condición $f(a) = f(b)$ para aplicar el Teorema de Rolle. Por lo tanto, la función $f(x) = |x^2 - 4x|$ no verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[3, 5]$.

## Ejercicio 6.15

Dadas las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3 - x$, ¿se puede afirmar que sus gráficas se cortan en algún punto del intervalo $[0, 2]$?

Consideramos la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - (3 - x) = x^3 + x - 3$.

Aplicamos el Teorema de Bolzano a $h(x)$ en el intervalo $[0, 2]$:

$$h(0) = 0^3 + 0 - 3 = -3$$

$$h(2) = 2^3 + 2 - 3 = 8 + 2 - 3 = 7$$

Dado que $h(0) = -3$ y $h(2) = 7$, y $h(0) \cdot h(2) < 0$, por el Teorema de Bolzano, existe al menos un punto $c$ en el intervalo $[0, 2]$ tal que $h(c) = 0$, es decir, $f(c) = g(c)$. Por lo tanto, las gráficas de las funciones se cortan en algún punto del intervalo $[0, 2]$.

## Ejercicio 6.16

Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, justificar, usando el teorema de Bolzano, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.

Consideramos la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 3x^2 - 1 - 6x$.

Aplicamos el Teorema de Bolzano a $h(x)$ en el intervalo $[1, 10]$:

$$h(1) = 1^3 + 3(1)^2 - 1 - 6(1) = 1 + 3 - 1 - 6 = -3$$

$$h(10) = 10^3 + 3(10)^2 - 1 - 6(10) = 1000 + 300 - 1 - 60 = 1239$$

Dado que $h(1) = -3$ y $h(10) = 1239$, y $h(1) \cdot h(10) < 0$, por el Teorema de Bolzano, existe al menos un punto $c$ en el intervalo $[1, 10]$ tal que $h(c) = 0$, es decir, $f(c) = g(c)$. Por lo tanto, existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.

## Ejercicio 6.17

Dada la función $f(x) = x^3 - |x| + 2$, justifica si es posible aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $(-1, 1)$.

Primero, verificamos si la función es continua y derivable en el intervalo $(-1, 1)$.

La función $f(x) = x^3 - |x| + 2$ no es derivable en $x = 0$ porque $|x|$ no es derivable en $x = 0$. Por lo tanto, no se cumplen las condiciones para aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $(-1, 1)$.

## Ejercicio 6.18

Estudia el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ y demuestra, usando el teorema adecuado, que tiene una única solución real. Encuentra un intervalo de longitud menor que 10 en el que se encuentre esa solución.

Para estudiar el crecimiento de $f(x)$, calculamos su derivada:

$$f'(x) = 2 + 6x + 12x^2$$

Establecemos $f'(x) = 0$ para encontrar los puntos críticos:

$$2 + 6x + 12x^2 = 0$$

Dividimos entre 2:

$$1 + 3x + 6x^2 = 0$$

Usamos la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 24}}{12}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-15}}{12}$$

Como no hay soluciones reales, no hay puntos críticos. La función es siempre creciente o siempre decreciente.

Para encontrar una única solución real de $f(x) = 0$, aplicamos el Teorema de Bolzano en un intervalo adecuado. Evaluamos $f(x)$ en dos puntos:

$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = 1 + 2(-1) + 3(-1)^2 + 4(-1)^3 = 1 - 2 + 3 - 4 = -2$$

Dado que $f(0) = 1$ y $f(-1) = -2$, y $f(0) \cdot f(-1) < 0$, existe al menos un punto $c$ en el intervalo $(-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$.

## Ejercicio 6.19

Dada la función $f(x) = x^2 + x$, justifica si es posible aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[1, 2]$. Si es posible, encuentra el punto donde se cumple.

Primero, verificamos que $f(x)$ es continua en $[1, 2]$ y derivable en $(1, 2)$. Aplicamos el Teorema del Valor Medio:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$$

Calculamos $f(2)$ y $f(1)$:

$$f(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Entonces,

$$f'(c) = \frac{6-2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$$

Calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = 2x + 1$$

Igualamos a 4:

$$2c + 1 = 4$$

$$2c = 3$$

$$c = \frac{3}{2} = 1.5$$

Por lo tanto, el punto $c$ en el intervalo $[1, 2]$ en el que $f'(x)$ toma el valor predicho por el Teorema del Valor Medio es $c = 1.5$.

## Ejercicio 6.20

Calcula el valor de $a$ para que la función $f$ cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en cualquier intervalo.

$$f(x) = \frac{x-a}{1+|x-1|}$$

El teorema del valor medio requiere que $f$ sea continua en un intervalo cerrado $[c, d]$ y derivable en el intervalo abierto $(c, d)$. Para que $f(x)$ sea continua y derivable, $|x-1|$ no debe ser cero. Entonces, buscamos continuidad y derivabilidad en $x = 1$.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$:

Evaluamos el límite de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a 1:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-a}{1+(1-x)} = \frac{1-a}{2-x}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-a}{1+(x-1)} = \frac{1-a}{x}$$

Para que los límites sean iguales:

$$\frac{1-a}{2-1} = \frac{1-a}{1}$$

Para que los límites sean iguales:

$$a = 1$$

Por lo tanto, el valor de $a$ es $1$.

## Ejercicio 6.21

Dadas las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2 - x$, usa el Teorema de Bolzano para demostrar que las gráficas de ambas funciones se cortan en algún punto en $[0, 2]$.

Consideramos la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - (2 - x) = x^3 + x - 2$.

Aplicamos el Teorema de Bolzano a $h(x) = x^3 + x - 2$ en el intervalo $[0, 2]$:

Evaluamos $h(x)$ en los extremos del intervalo:

$$h(0) = 0^3 + 0 - 2 = -2$$

$$h(2) = 2^3 + 2 - 2 = 8 + 2 - 2 = 8$$

Dado que $h(0) = -2$ y $h(2) = 8$, y $h(0) \cdot h(2) < 0$, por el Teorema de Bolzano, existe al menos un punto $c$ en el intervalo $[0, 2]$ tal que $h(c) = 0$, es decir, $f(c) = g(c)$. Por lo tanto, las gráficas de ambas funciones se cortan en algún punto del intervalo $[0, 2]$.

## Ejercicio 6.22

Demuestra, usando el teorema de Rolle, que las funciones del apartado anterior no se cortan en más de un punto en el intervalo $[0, 2]$.

Primero, verificamos que $h(x) = x^3 + x - 2$ es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$. Aplicamos el Teorema de Rolle:

Calculamos la derivada de $h(x)$:

$$h'(x) = 3x^2 + 1$$

Igualamos a cero para encontrar el punto crítico:

$$3x^2 + 1 = 0$$

No hay soluciones reales para esta ecuación, ya que $3x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales.

Dado que no hay puntos críticos en el intervalo $(0, 2)$, $h(x)$ no tiene una tangente horizontal en este intervalo y, por lo tanto, $h(x)$ no puede tener más de un punto en el que $h(c) = 0$. Esto implica que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ no se cortan en más de un punto en el intervalo $[0, 2]$.

## Ejercicio 6.23

Dadas las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3 - x$, usa el Teorema de Bolzano para demostrar que las gráficas de ambas funciones se cortan en algún punto en $[0, 2]$.

Consideramos la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - (3 - x) = x^3 + x - 3$.

Aplicamos el Teorema de Bolzano a $h(x)$ en el intervalo $[0, 2]$:

Evaluamos $h(x)$ en los extremos del intervalo:

$$h(0) = 0^3 + 0 - 3 = -3$$

$$h(2) = 2^3 + 2 - 3 = 8 + 2 - 3 = 7$$

Dado que $h(0) = -3$ y $h(2) = 7$, y $h(0) \cdot h(2) < 0$, por el Teorema de Bolzano, existe al menos un punto $c$ en el intervalo $[0, 2]$ tal que $h(c) = 0$, es decir, $f(c) = g(c)$. Por lo tanto, las gráficas de ambas funciones se cortan en algún punto del intervalo $[0, 2]$.

## Ejercicio 6.24

Demuestra, usando el teorema de Rolle, que las funciones del apartado anterior no se cortan en más de un punto en el intervalo $[0, 2]$.

Primero, verificamos que $h(x) = x^3 + x - 3$ es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$. Aplicamos el Teorema de Rolle:

Calculamos la derivada de $h(x)$:

$$h'(x) = 3x^2 + 1$$

Igualamos a cero para encontrar el punto crítico:

$$3x^2 + 1 = 0$$

No hay soluciones reales para esta ecuación, ya que $3x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales.

Dado que no hay puntos críticos en el intervalo $(0, 2)$, $h(x)$ no tiene una tangente horizontal en este intervalo y, por lo tanto, $h(x)$ no puede tener más de un punto en el que $h(c) = 0$. Esto implica que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ no se cortan en más de un punto en el intervalo $[0, 2]$.

## Ejercicio 6.25

Comprueba si la función $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[2, 4]$ y en el intervalo $[-1, 3]$. Determina, si es posible en alguno de los dos intervalos, el punto en el que la recta tangente a la curva es paralela al eje X.

Primero, escribimos $f(x)$ sin el valor absoluto para analizar la función en ambos intervalos. La función $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ puede expresarse como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & \text{si } x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ -(x^2 - 2x - 3) & \text{si } x^2 - 2x - 3 < 0 \end{cases}$$

Encontramos las raíces de $x^2 - 2x - 3 = 0$ para determinar los puntos de cambio:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x = 3, \quad x = -1$$

Esto divide la función en tres intervalos: $(-\infty, -1]$, $[-1, 3]$, $[3, \infty)$.

### Intervalo $[2, 4]$

En el intervalo $[2, 4]$, la función $x^2 - 2x - 3$ es positiva, así que:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

Evaluamos $f(x)$ en los extremos del intervalo:

$$f(2) = 2^2 - 2(2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$$

$$f(4) = 4^2 - 2(4) - 3 = 16 - 8 - 3 = 5$$

Dado que $f(2) \neq f(4)$, no se cumple $f(a) = f(b)$, por lo tanto, no se pueden aplicar las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[2, 4]$.

### Intervalo $[-1, 3]$

En el intervalo $[-1, 3]$, la función cambia de signo en $x = -1$ y $x = 3$. Por lo tanto:

Para $x \in [-1, 3]$, la función se divide en dos subintervalos: $[-1, 3]$.

- Para $x \in [-1, 3]$ (sin incluir $-1$ y $3$), la función $x^2 - 2x - 3$ es negativa, así que:

$$f(x) = -(x^2 - 2x - 3) = -x^2 + 2x + 3$$

Evaluamos $f(x)$ en los extremos del intervalo:

$$f(-1) = -((-1)^2 - 2(-1) - 3) = -(1 + 2 - 3) = -0 = 0$$

$$f(3) = -(3^2 - 2(3) - 3) = -(9 - 6 - 3) = -0 = 0$$

Dado que $f(-1) = 0$ y $f(3) = 0$, y $f(x)$ es continua y derivable en $(-1, 3)$, se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle. Calculamos la derivada de $f(x)$ en este intervalo:

$$f'(x) = -2x + 2$$

Igualamos a cero para encontrar el punto crítico:

$$-2x + 2 = 0$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Por lo tanto, en el intervalo $[-1, 3]$, el punto en el que la recta tangente a la curva es paralela al eje $X$ es $x = 1$.

## 7. Representación gráfica. Para ver las gráficas usa PhotoMath, GeoGebra, WolphramAlpha o Google:

### Ejercicio 7.1

Dibuja la gráfica de $f(x) = \frac{x^3}{2x^2-2}$ estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos.

### Dominio

La función $f(x) = \frac{x^3}{2x^2-2}$ está definida siempre que el denominador no sea cero:

$$2x^2 - 2 \neq 0$$

$$2(x^2 - 1) \neq 0$$

$$x^2 - 1 \neq 0$$

$$(x-1)(x+1) \neq 0$$

Por lo tanto, el dominio de la función es:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

### Simetrías

Para comprobar si la función es par, impar o ninguna, evaluamos $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x)^2 - 2} = \frac{-x^3}{2x^2 - 2} = -f(x)$$

Dado que $f(-x) = -f(x)$, la función es impar y tiene simetría respecto al origen.

### Puntos de corte con los ejes

Para encontrar los puntos de corte con el eje $Y$, evaluamos $f(0)$:

$$f(0) = \frac{0^3}{2(0)^2 - 2} = 0$$

Por lo tanto, el punto de corte con el eje $Y$ es $(0, 0)$.

Para encontrar los puntos de corte con el eje $X$, resolvemos $f(x) = 0$:

$$\frac{x^3}{2x^2 - 2} = 0$$

El numerador debe ser cero:

$$x^3 = 0$$

$$x = 0$$

Por lo tanto, el punto de corte con el eje $X$ es $(0, 0)$.

### Asíntotas

**Asíntotas verticales:**

Las asíntotas verticales ocurren donde el denominador es cero y el numerador no es cero. Evaluamos $2x^2 - 2 = 0$:

$$2(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

Por lo tanto, hay asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 1$.

**Asíntotas horizontales:**

Para encontrar las asíntotas horizontales, evaluamos el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a infinito:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2 - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2 - \frac{2}{x^2}} = \frac{\infty}{2 - 0} = \infty$$

Por lo tanto, no hay asíntotas horizontales.

### Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Calculamos la derivada de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 2}$$

Usamos la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(2x^2 - 2) - x^3(4x)}{(2x^2 - 2)^2} = \frac{6x^4 - 6x^2 - 4x^4}{(2x^2 - 2)^2} = \frac{2x^4 - 6x^2}{(2x^2 - 2)^2}$$

Simplificamos:

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2 - 3)}{(2x^2 - 2)^2}$$

Igualamos $f'(x)$ a cero para encontrar los puntos críticos:

$$2x^2(x^2 - 3) = 0$$

$$x^2(x^2 - 3) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \text{o} \quad x^2 = 3$$

$$x = 0, \quad x = \pm\sqrt{3}$$

Determinamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento evaluando el signo de $f'(x)$ en los intervalos determinados por los puntos críticos y las asíntotas verticales:

- Para $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$, $f'(x)$ es positivo, por lo tanto, $f(x)$ está creciendo.
- Para $x \in (-\sqrt{3}, -1)$, $f'(x)$ es negativo, por lo tanto, $f(x)$ está decreciendo.
- Para $x \in (-1, 0)$, $f'(x)$ es positivo, por lo tanto, $f(x)$ está creciendo.
- Para $x \in (0, 1)$, $f'(x)$ es negativo, por lo tanto, $f(x)$ está decreciendo.
- Para $x \in (1, \sqrt{3})$, $f'(x)$ es positivo, por lo tanto, $f(x)$ está creciendo.
- Para $x \in (\sqrt{3}, \infty)$, $f'(x)$ es negativo, por lo tanto, $f(x)$ está decreciendo.

### Máximos y mínimos relativos

Los puntos críticos encontrados son $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$:

- En $x = -\sqrt{3}$, $f'(x)$ cambia de positivo a negativo, por lo tanto, $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = -\sqrt{3}$.
- En $x = 0$, $f'(x)$ cambia de negativo a positivo, por lo tanto, $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$.
- En $x = \sqrt{3}$, $f'(x)$ cambia de positivo a negativo, por lo tanto, $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = \sqrt{3}$.

### Resumen del análisis

- Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- Simetría: Función impar

- Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$
- Asíntotas verticales: $x = -1$ y $x = 1$
- Asíntotas horizontales: Ninguna
- Intervalos de crecimiento: $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-1, 0)$, $(1, \sqrt{3})$
- Intervalos de decrecimiento: $(-\sqrt{3}, -1)$, $(0, 1)$, $(\sqrt{3}, \infty)$
- Máximos relativos: $x = \pm\sqrt{3}$
- Mínimos relativos: $x = 0$

A continuación, se muestra la gráfica de $f(x)$:

## Ejercicio 7.2

Halla las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3+5x^2}{x^2-1}$.

### Asíntotas verticales

Las asíntotas verticales se encuentran donde el denominador es cero y el numerador no es cero:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = 1, \quad x = -1$$

Por lo tanto, las asíntotas verticales están en $x = 1$ y $x = -1$.

### Asíntotas horizontales

Para encontrar las asíntotas horizontales, evaluamos el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a infinito:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{1 - \frac{1}{x^2}} = \infty$$

Por lo tanto, no hay asíntotas horizontales.

### Asíntotas oblicuas

Para encontrar las asíntotas oblicuas, evaluamos el límite de $f(x)$ dividido por $x$ cuando $x$ tiende a infinito:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 5x^2}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 1} = 1$$

Esto sugiere que hay una asíntota oblicua de la forma $y = x + m$. Para encontrar $m$, calculamos:

$$m = \lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \left( \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 5x^2 - x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 5x^2 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 + x}{x^2 - 1}$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{5 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 5$$

Por lo tanto, la asíntota oblicua es $y = x + 5$.

### Resumen de las asíntotas

- Asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = -1$
- Asíntotas horizontales: Ninguna
- Asíntota oblicua: $y = x + 5$

## Ejercicio 7.3

Representa gráficamente la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$ calculando dominio, simetría, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, curvatura y puntos de inflexión.

### Dominio

El dominio de $f(x) = \ln(1 + x^2)$ es todo $\mathbb{R}$, ya que $1 + x^2 > 0$ para todo $x$.

### Simetría

La función $f(x) = \ln(1 + x^2)$ es una función par porque $f(-x) = f(x)$.

### Puntos de corte con los ejes

Para el corte con el eje $Y$, evaluamos $f(0)$:

$$f(0) = \ln(1 + 0^2) = \ln(1) = 0$$

Por lo tanto, el punto de corte con el eje $Y$ es $(0, 0)$. La función no corta el eje $X$ ya que $\ln(1 + x^2) > 0$ para todo $x \neq 0$.

### Asíntotas

No hay asíntotas verticales ni horizontales. La función tiende a infinito cuando $x$ tiende a infinito.

### Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Calculamos la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

La derivada es positiva cuando $x > 0$ y negativa cuando $x < 0$, por lo tanto:

- $f(x)$ está decreciendo en $(-\infty, 0)$
- $f(x)$ está creciendo en $(0, \infty)$

### Máximos y mínimos relativos

El único punto crítico es $x = 0$, que es un mínimo relativo.

### Curvatura y puntos de inflexión

Calculamos la segunda derivada de $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

La segunda derivada es positiva cuando $|x| < 1$ y negativa cuando $|x| > 1$, por lo tanto, hay puntos de inflexión en $x = \pm 1$.

## Ejercicio 7.4

Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ calculando dominio, simetría, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos.

### Dominio

El dominio de $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ es todo $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, ya que el denominador no puede ser cero.

### Simetría

La función $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ es una función par porque $f(-x) = f(x)$.

### Asíntotas verticales

Las asíntotas verticales se encuentran donde el denominador es cero:

$$1 - x^2 = 0$$

$$x = \pm 1$$

Por lo tanto, hay asíntotas verticales en $x = 1$ y $x = -1$.

### Asíntotas horizontales

Para encontrar las asíntotas horizontales, evaluamos el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a infinito:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = -1$$

Por lo tanto, hay una asíntota horizontal en $y = -1$.

### Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Calculamos la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2x)(1-x^2) - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x - 2x^3 + 2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

La derivada es positiva cuando $x > 0$ y negativa cuando $x < 0$, por lo tanto:

- $f(x)$ está decreciendo en $(-\infty, 0)$
- $f(x)$ está creciendo en $(0, \infty)$

### Máximos y mínimos relativos

El único punto crítico es $x = 0$, que es un mínimo relativo.

### Curvatura y puntos de inflexión

Calculamos la segunda derivada de $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{2(1-x^2) - 2x \cdot 2x}{(1-x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

La segunda derivada es positiva cuando $|x| < 1$ y negativa cuando $|x| > 1$, por lo tanto, hay puntos de inflexión en $x = \pm 1$.

## Ejercicio 7.5

Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{-2x^3-1}{x^2}$ calculando dominio, asíntotas, puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, curvatura y puntos de inflexión.

### Dominio

El dominio de $f(x) = \frac{-2x^3-1}{x^2}$ es todo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ya que el denominador no puede ser cero.

### Asíntotas verticales

Las asíntotas verticales se encuentran donde el denominador es cero:

$$x = 0$$

Por lo tanto, hay una asíntota vertical en $x = 0$.

### Asíntotas horizontales

Para encontrar las asíntotas horizontales, evaluamos el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a infinito:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{-2x^3 - 1}{x^2} = -\infty$$

Por lo tanto, no hay asíntotas horizontales.

### Puntos de corte con los ejes

Para encontrar los puntos de corte con el eje $Y$, evaluamos $f(0)$, pero $f(0)$ no está definido. La función no corta el eje $X$ ya que el numerador no puede ser cero cuando el denominador no es cero.

### Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Calculamos la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(-6x^2)(x^2) - (-2x^3 - 1)(2x)}{(x^2)^2} = \frac{-6x^4 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{-6x^4 - 2x^3 + 2x}{x^4}$$

Simplificamos:

$$f'(x) = \frac{-6x^3 - 2x^2 + 2}{x^3}$$

La derivada es positiva cuando $x > 0$ y negativa cuando $x < 0$, por lo tanto:

- $f(x)$ está decreciendo en $(-\infty, 0)$
- $f(x)$ está creciendo en $(0, \infty)$

### Máximos y mínimos relativos

El único punto crítico es $x = 0$, que es un mínimo relativo.

### Curvatura y puntos de inflexión

Calculamos la segunda derivada de $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{(-12x^2)(x^2) - (-6x^3 - 2x^2)(2x)}{(x^2)^2} = \frac{-12x^4 + 12x^4 + 4x^3}{x^4} = \frac{4x^3}{x^4} = \frac{4}{x}$$

La segunda derivada es positiva cuando $x > 0$ y negativa cuando $x < 0$, por lo tanto, hay puntos de inflexión en $x = 0$.

## Ejercicio 7.6

Representa gráficamente la función $f(x) = x + e^{-x}$ calculando dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, curvatura y puntos de inflexión.

### Dominio

El dominio de $f(x) = x + e^{-x}$ es todo $\mathbb{R}$.

### Asíntotas

No hay asíntotas verticales ni horizontales para esta función.

### Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Calculamos la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = 1 - e^{-x}$$

Igualamos a cero para encontrar los puntos críticos:

$$1 - e^{-x} = 0$$

$$e^{-x} = 1$$

$$x = 0$$

La derivada es positiva cuando $x > 0$ y negativa cuando $x < 0$, por lo tanto:

- $f(x)$ está decreciendo en $(-\infty, 0)$
- $f(x)$ está creciendo en $(0, \infty)$

### Máximos y mínimos relativos

El punto crítico $x = 0$ es un mínimo relativo. Evaluamos $f(0)$:

$$f(0) = 0 + e^0 = 1$$

Por lo tanto, el mínimo relativo es en $(0, 1)$.

### Curvatura y puntos de inflexión

Calculamos la segunda derivada de $f(x)$:

$$f''(x) = e^{-x}$$

La segunda derivada es siempre positiva, lo que indica que la función es cóncava hacia arriba en todo su dominio y no hay puntos de inflexión.

## Ejercicio 7.7

Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$ calculando dominio, asíntotas, puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, curvatura y puntos de inflexión.

### Dominio

El dominio de $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$ es todo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ya que el denominador no puede ser cero.

### Asíntotas verticales

Las asíntotas verticales se encuentran donde el denominador es cero:

$$x = 0$$

Por lo tanto, hay una asíntota vertical en $x = 0$.

### Asíntotas horizontales

Para encontrar las asíntotas horizontales, evaluamos el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a infinito:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2} = \infty$$

Por lo tanto, no hay asíntotas horizontales.

### Puntos de corte con los ejes

Para encontrar los puntos de corte con el eje $Y$, evaluamos $f(1)$:

$$f(1) = \frac{1^3 - 1}{1^2} = 0$$

Por lo tanto, el punto de corte con el eje $Y$ es $(1, 0)$. La función no corta el eje $X$ ya que el numerador no puede ser cero cuando el denominador no es cero.

### Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Calculamos la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x^2) - (x^3 - 1)(2x)}{(x^2)^2} = \frac{3x^4 - 2x^4 + 2x}{x^4} = \frac{x^4 + 2x}{x^4}$$

Simplificamos:

$$f'(x) = \frac{x^4 + 2x}{x^4} = 1 + \frac{2}{x^3}$$

La derivada es positiva para $x > 0$ y negativa para $x < 0$, por lo tanto:

- $f(x)$ está decreciendo en $(-\infty, 0)$
- $f(x)$ está creciendo en $(0, \infty)$

### Máximos y mínimos relativos

El único punto crítico es $x = 0$, que no es un máximo ni un mínimo ya que no pertenece al dominio de la función.

### Curvatura y puntos de inflexión

Calculamos la segunda derivada de $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{6x^2(x^2) - 2(x^3 - 1)(2)}{(x^2)^2} = \frac{6x^4 - 4(x^3 - 1)}{x^4} = \frac{6x^4 - 4x^3 + 4}{x^4}$$

Simplificamos:

$$f''(x) = 6 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}$$

La segunda derivada es positiva cuando $x > 0$ y negativa cuando $x < 0$, lo que indica que hay puntos de inflexión en $x = 0$.

## Ejercicio 7.8

Dibuja la gráfica de $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$ estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos.

### Dominio

El dominio de $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$ es todo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ya que el denominador no puede ser cero.

### Simetría

La función $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$ no es ni par ni impar.

### Puntos de corte con los ejes

Para encontrar los puntos de corte con el eje $Y$, evaluamos $f(1)$:

$$f(1) = \frac{e^{1^2}}{1} = e$$

Por lo tanto, el punto de corte con el eje $Y$ es $(1, e)$. La función no corta el eje $X$ ya que el numerador no puede ser cero cuando el denominador no es cero.

### Asíntotas verticales

Las asíntotas verticales se encuentran donde el denominador es cero:

$$x = 0$$

Por lo tanto, hay una asíntota vertical en $x = 0$.

### Asíntotas horizontales

No hay asíntotas horizontales ya que el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a infinito es infinito.

### Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Calculamos la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{2xe^{x^2}x - e^{x^2}}{x^2} = \frac{2x^2e^{x^2} - e^{x^2}}{x^2} = \frac{e^{x^2}(2x^2 - 1)}{x^2}$$

La derivada es positiva para $x > \sqrt{0.5}$ y negativa para $x < \sqrt{0.5}$, por lo tanto:

- $f(x)$ está decreciendo en $(-\infty, \sqrt{0.5})$
- $f(x)$ está creciendo en $(\sqrt{0.5}, \infty)$

### Máximos y mínimos relativos

El único punto crítico es $x = 0$, que no pertenece al dominio de la función.

### Curvatura y puntos de inflexión

Calculamos la segunda derivada de $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{4x^3e^{x^2} - 6xe^{x^2}}{x^4}$$

La segunda derivada es positiva cuando $x > 0$ y negativa cuando $x < 0$, lo que indica que hay puntos de inflexión en $x = 0$.

## Ejercicio 7.9

Dibuja la gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)}$ estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos.

### Dominio

El dominio de $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)}$ es todo $\mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$, ya que el denominador no puede ser cero y $\ln(x^2)$ debe estar definido.

### Simetría

La función $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)}$ es una función par porque $f(-x) = f(x)$.

### Puntos de corte con los ejes

Para encontrar los puntos de corte con el eje $Y$, evaluamos $f(1)$ y $f(-1)$:

$$f(1) = \frac{1^2}{\ln(1^2)} = \text{indefinido}$$

Por lo tanto, no hay puntos de corte con los ejes.

### Asíntotas

No hay asíntotas verticales ya que el denominador no se hace infinito.

Para encontrar las asíntotas horizontales, evaluamos el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a infinito:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\ln(x^2)} = \infty$$

Por lo tanto, no hay asíntotas horizontales.

### Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Calculamos la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2x)(\ln(x^2)) - (x^2)(\frac{2}{x})}{(\ln(x^2))^2} = \frac{2x\ln(x^2) - 2x}{(\ln(x^2))^2} = \frac{2x(\ln(x^2) - 1)}{(\ln(x^2))^2}$$

La derivada es positiva cuando $x > 1$ y negativa cuando $x < 1$, por lo tanto:

- $f(x)$ está decreciendo en $(-\infty, 1)$
- $f(x)$ está creciendo en $(1, \infty)$

### Máximos y mínimos relativos

El único punto crítico es $x = 1$, que es un mínimo relativo.

### Resumen de la función

- Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$
- Simetría: Función par
- Puntos de corte con los ejes: Ninguno
- Asíntotas: Ninguna
- Intervalos de crecimiento: $(1, \infty)$
- Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 1)$
- Máximos relativos: Ninguno
- Mínimos relativos: $x = 1$

## Gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)}$

# 8. Integrales indefinidas

## Ejercicio 8.1

$$\int e^x(2x - 1)\,dx$$

Usamos integración por partes. Sea $u = 2x - 1$ y $dv = e^x\,dx$.

Entonces, $du = 2\,dx$ y $v = e^x$.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int e^x(2x-1)\,dx = (2x-1)e^x - \int e^x(2)\,dx$$

$$= (2x-1)e^x - 2\int e^x\,dx$$

$$= (2x-1)e^x - 2e^x + C$$

$$= e^x(2x-3) + C$$

## Ejercicio 8.2

$$\int \frac{1}{x^2+3}\,dx$$

Usamos la fórmula de la integral del arcotangente:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Aquí, $a^2 = 3$ entonces $a = \sqrt{3}$:

$$\int \frac{1}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

## Ejercicio 8.3

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{5x^3}}{3x}\,dx$$

Simplificamos la integral:

$$\int \frac{x^{1/3} - 5^{1/5}x^{3/5}}{3x}\,dx = \int \frac{x^{1/3}}{3x}\,dx - \int \frac{5^{1/5}x^{3/5}}{3x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int x^{-2/3}\,dx - \frac{5^{1/5}}{3}\int x^{-2/5}\,dx$$

Usamos la fórmula de la integral de una potencia:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^{1/3}}{1/3}\right) - \frac{5^{1/5}}{3}\left(\frac{x^{3/5+1}}{3/5+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(3x^{1/3}\right) - \frac{5^{1/5}}{3}\left(\frac{x^{8/5}}{8/5}\right)$$

$$= x^{1/3} - \frac{5^{1/5}}{3} \cdot \frac{5}{8} x^{8/5} + C$$

$$= x^{1/3} - \frac{5^{1/5}}{8/3} x^{8/5} + C$$

$$= x^{1/3} - \frac{5^{1/5}}{24} x^{8/5} + C$$

## Ejercicio 8.4

$$\int x\sqrt{2x-1}\, dx$$

Usamos la sustitución $u = 2x - 1$.

Entonces, $du = 2\, dx$ y $x = \frac{u+1}{2}$.

$$\int x\sqrt{2x-1}\, dx = \int \frac{u+1}{2} \sqrt{u} \cdot \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \int (u+1) u^{1/2}\, du$$

$$= \frac{1}{4} \int \left( u^{3/2} + u^{1/2} \right)\, du$$

$$= \frac{1}{4} \left( \frac{2}{5} u^{5/2} + \frac{2}{3} u^{3/2} \right) + C$$

$$= \frac{1}{4} \left( \frac{2}{5} (2x-1)^{5/2} + \frac{2}{3} (2x-1)^{3/2} \right) + C$$

$$= \frac{1}{10} (2x-1)^{5/2} + \frac{1}{6} (2x-1)^{3/2} + C$$

## Ejercicio 8.5

$$\int x^2 \ln x\, dx$$

Usamos integración por partes. Sea $u = \ln x$ y $dv = x^2\, dx$.

Entonces, $du = \frac{1}{x}\, dx$ y $v = \frac{x^3}{3}$.

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int x^2 \ln x\, dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \int x^2\, dx$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

$$= \frac{x^3 (\ln x - \frac{1}{3})}{3} + C$$

## Ejercicio 8.6

$$\int \frac{2x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} \, dx$$

Primero factorizamos el denominador:

$$x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$$

Entonces, tenemos:

$$\int \frac{2x - 1}{x(x + 1)^2} \, dx$$

Podemos descomponer en fracciones parciales:

$$\frac{2x - 1}{x(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

Multiplicamos ambos lados por el denominador común $x(x + 1)^2$:

$$2x - 1 = A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + Cx$$

Expandiendo y agrupando términos:

$$2x - 1 = A(x^2 + 2x + 1) + Bx^2 + Bx + Cx$$

$$2x - 1 = Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx$$

$$2x - 1 = (A + B)x^2 + (2A + B + C)x + A$$

Igualamos coeficientes:

1. $A + B = 0$
2. $2A + B + C = 2$
3. $A = -1$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

1. $A + B = 0 \implies B = -A = 1$
2. $2A + B + C = 2 \implies 2(-1) + 1 + C = 2 \implies -2 + 1 + C = 2 \implies C = 3$
3. $A = -1$

Entonces:

$$\frac{2x - 1}{x(x + 1)^2} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x + 1} + \frac{3}{(x + 1)^2}$$

Ahora integramos cada término por separado:

$$\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2}\,dx = \int \left( \frac{-1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} \right)\,dx$$

$$= -\ln|x| + \ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + C$$

## Ejercicio 8.7

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

Usamos la sustitución $u = x^2 + 9$.

Entonces, $du = 2x\,dx$ y $x\,dx = \frac{du}{2}$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du$$

Usamos la fórmula de la integral de una potencia:

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= \sqrt{u} + C$$

Sustituimos $u$ de nuevo:

$$= \sqrt{x^2+9} + C$$

## Ejercicio 8.8

$$\int \frac{1}{4x^2+9}\,dx$$

Usamos la fórmula de la integral del arcotangente:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Aquí, $a^2 = 4\cdot 9$ entonces $a = 2\cdot 3 = 6$:

$$\int \frac{1}{4x^2+9}\,dx = \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{x}{6}\right) + C$$

## Ejercicio 8.9

$$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}\,dx$$

Simplificamos la integral:

$$\int \frac{x^{1/2} + x^{2/3}}{x^{5/2}} \, dx = \int \left(x^{-2} + x^{-7/6}\right) \, dx$$

Usamos la fórmula de la integral de una potencia:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \int x^{-2} \, dx + \int x^{-7/6} \, dx$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-1/6}}{-1/6} + C$$

$$= -\frac{1}{x} - 6x^{-1/6} + C$$

$$= -\frac{1}{x} - 6\sqrt[6]{\frac{1}{x}} + C$$

## Ejercicio 8.10

$$\int 2x\sqrt{x-3} \, dx$$

Usamos la sustitución $u = x - 3$.

Entonces, $du = dx$ y $x = u + 3$.

$$\int 2x\sqrt{x-3} \, dx = \int 2(u+3)\sqrt{u} \, du$$

$$= \int 2(u\sqrt{u} + 3\sqrt{u}) \, du$$

$$= 2\int (u^{3/2} + 3u^{1/2}) \, du$$

$$= 2\left(\frac{u^{5/2}}{5/2} + 3 \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + C$$

$$= 2\left(\frac{2u^{5/2}}{5} + 2u^{3/2}\right) + C$$

$$= \frac{4u^{5/2}}{5} + 4u^{3/2} + C$$

Sustituimos $u$ de nuevo:

$$= \frac{4(x-3)^{5/2}}{5} + 4(x-3)^{3/2} + C$$

## Ejercicio 8.11

$$\int (3x+5)\cos x \, dx$$

Usamos integración por partes. Sea $u = 3x + 5$ y $dv = \cos x \, dx$.

Entonces, $du = 3 \, dx$ y $v = \sin x$.

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int (3x + 5) \cos x \, dx = (3x + 5) \sin x - \int \sin x \cdot 3 \, dx$$

$$= (3x + 5) \sin x - 3 \int \sin x \, dx$$

$$= (3x + 5) \sin x + 3 \cos x + C$$

## Ejercicio 8.12

$$\int \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 5x + 4} \, dx$$

Simplificamos el denominador:

$$x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$$

Usamos fracciones parciales:

$$\frac{x^2 + 2x + 4}{(x + 1)(x + 4)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 4}$$

Multiplicamos ambos lados por el denominador común $(x + 1)(x + 4)$:

$$x^2 + 2x + 4 = A(x + 4) + B(x + 1)$$

$$x^2 + 2x + 4 = Ax + 4A + Bx + B$$

$$x^2 + 2x + 4 = (A + B)x + (4A + B)$$

Igualamos coeficientes:

1. $A + B = 1$
2. $4A + B = 4$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

1. $A + B = 1$
2. $4A + B = 4$

Restamos la primera ecuación de la segunda:

$$4A + B - (A + B) = 4 - 1$$

$$3A = 3 \implies A = 1$$

Sustituimos $A$ en la primera ecuación:

$$1 + B = 1 \implies B = 0$$

Entonces:

$$\frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)(x+4)} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+4}$$

Integrando cada término:

$$\int \frac{1}{x+1}\, dx + \int \frac{3}{x+4}\, dx$$

$$= \ln|x+1| + 3\ln|x+4| + C$$

## Ejercicio 8.13

$$\int 5^{\cos x} \sin x\, dx$$

Usamos la sustitución $u = \cos x$.

Entonces, $du = -\sin x\, dx$ y $-du = \sin x\, dx$.

$$\int 5^{\cos x} \sin x\, dx = -\int 5^u\, du$$

Usamos la fórmula de la integral de una potencia:

$$\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$= -\int 5^u\, du$$

$$= -\frac{5^u}{\ln 5} + C$$

Sustituimos $u$ de nuevo:

$$= -\frac{5^{\cos x}}{\ln 5} + C$$

## Ejercicio 8.14

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}}\, dx$$

Usamos la sustitución $u = 1 - 9x^2$.

Entonces, $du = -18x\, dx$ y $-\frac{1}{18}du = x\, dx$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}}\, dx = \int \frac{-\frac{1}{18}du}{\sqrt{u}}$$

$$= -\frac{1}{18}\int u^{-1/2}\, du$$

Usamos la fórmula de la integral de una potencia:

$$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= -\frac{1}{18} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= -\frac{1}{18} \cdot 2\sqrt{u} + C$$

$$= -\frac{2\sqrt{1-9x^2}}{18} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{1-9x^2}}{9} + C$$

## Ejercicio 8.15

$$\int x \ln x \, dx$$

Usamos integración por partes. Sea $u = \ln x$ y $dv = x\,dx$.

Entonces, $du = \frac{1}{x}\,dx$ y $v = \frac{x^2}{2}$.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x \ln x \, dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

$$= \frac{x^2(\ln x - \frac{1}{2})}{2} + C$$

## Ejercicio 8.16

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

Usamos la sustitución $u = 2x$.

Entonces, $du = 2\,dx$ y $dx = \frac{du}{2}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{\frac{du}{2}}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Usamos la fórmula de la integral del arco seno:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$$

Entonces:

$$= \frac{1}{2} \arcsin u + C$$

Sustituimos $u$ de nuevo:

$$= \frac{1}{2} \arcsin(2x) + C$$

## Ejercicio 8.17

$$\int xe^x \, dx$$

Usamos integración por partes. Sea $u = x$ y $dv = e^x \, dx$.

Entonces, $du = dx$ y $v = e^x$.

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx$$

$$= xe^x - e^x + C$$

$$= e^x(x-1) + C$$

## Ejercicio 8.18

$$\int \frac{x^2 - x + 6}{x+3} \, dx$$

Dividimos el numerador por el denominador:

$$\frac{x^2 - x + 6}{x+3} = x - 4 + \frac{18}{x+3}$$

Entonces:

$$\int \frac{x^2 - x + 6}{x+3} \, dx = \int (x - 4 + \frac{18}{x+3}) \, dx$$

$$= \int x \, dx - \int 4 \, dx + 18 \int \frac{1}{x+3} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + 18 \ln |x+3| + C$$

## Ejercicio 8.19

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

Usamos la sustitución $u = x^2 + 9$.

Entonces, $du = 2x\,dx$ y $x\,dx = \frac{du}{2}$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \frac{\frac{du}{2}}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du$$

Usamos la fórmula de la integral de una potencia:

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= \sqrt{u} + C$$

Sustituimos $u$ de nuevo:

$$= \sqrt{x^2+9} + C$$

## Ejercicio 8.20

$$\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}\,dx$$

Simplificamos la integral:

$$\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}\,dx = \int \left(x^{-2} + x^{-7/6}\right)\,dx$$

Usamos la fórmula de la integral de una potencia:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \int x^{-2}\,dx + \int x^{-7/6}\,dx$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-1/6}}{-1/6} + C$$

$$= -\frac{1}{x} - 6x^{-1/6} + C$$

## Ejercicio 8.21

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

Usamos integración por partes. Sea $u = \ln x$ y $dv = x^2\, dx$.

Entonces, $du = \frac{1}{x}\, dx$ y $v = \frac{x^3}{3}$.

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \int x^2\, dx$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

$$= \frac{x^3 (\ln x - \frac{1}{3})}{3} + C$$

## Ejercicio 8.22

$$\int \frac{x}{x^2 - 1}\, dx$$

Usamos la sustitución $u = x^2 - 1$.

Entonces, $du = 2x\, dx$ y $x\, dx = \frac{du}{2}$.

$$\int \frac{x}{x^2 - 1}\, dx = \int \frac{\frac{du}{2}}{u}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u}$$

Usamos la fórmula de la integral del logaritmo natural:

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

Entonces:

$$= \frac{1}{2} \ln |u| + C$$

Sustituimos $u$ de nuevo:

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + C$$

## Ejercicio 8.23

$$\int xe^{-x}\,dx$$

Usamos integración por partes. Sea $u = x$ y $dv = e^{-x}\,dx$.

Entonces, $du = dx$ y $v = -e^{-x}$.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,dx$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

$$= -e^{-x}(x + 1) + C$$

## Ejercicio 8.24

$$\int \frac{x^2 + x + 6}{x - 2}\,dx$$

Dividimos el numerador por el denominador:

$$\frac{x^2 + x + 6}{x - 2} = x + 3 + \frac{12}{x - 2}$$

Entonces:

$$\int \frac{x^2 + x + 6}{x - 2}\,dx = \int (x + 3 + \frac{12}{x - 2})\,dx$$

$$= \int x\,dx + \int 3\,dx + 12\int \frac{1}{x - 2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + 12\ln|x - 2| + C$$

## Ejercicio 8.25

$$\int 2^{\sin x}\cos x\,dx$$

Usamos la sustitución $u = \sin x$.

Entonces, $du = \cos x\,dx$.

$$\int 2^{\sin x}\cos x\,dx = \int 2^u\,du$$

Usamos la fórmula de la integral de una potencia:

$$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

Entonces:

$$= \frac{2^u}{\ln 2} + C$$

Sustituimos $u$ de nuevo:

$$= \frac{2^{\sin x}}{\ln 2} + C$$

## Ejercicio 8.26

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 - 9x^2}}\, dx$$

Usamos la sustitución $u = 1 - 9x^2$.

Entonces, $du = -18x\, dx$ y $x\, dx = -\frac{du}{18}$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 - 9x^2}}\, dx = \int \frac{-\frac{du}{18}}{\sqrt{u}}$$

$$= -\frac{1}{18} \int u^{-1/2}\, du$$

Usamos la fórmula de la integral de una potencia:

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= -\frac{1}{18} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= -\frac{1}{18} \cdot 2\sqrt{u} + C$$

$$= -\frac{2\sqrt{1 - 9x^2}}{18} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{1 - 9x^2}}{9} + C$$

## Ejercicio 8.27

$$\int x \ln x\, dx$$

Usamos integración por partes. Sea $u = \ln x$ y $dv = x\, dx$.

Entonces, $du = \frac{1}{x}\, dx$ y $v = \frac{x^2}{2}$.

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int x \ln x\, dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x\,dx$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

$$= \frac{x^2 (\ln x - \frac{1}{2})}{2} + C$$

## Ejercicio 8.28

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x+2}}$$

Usamos la sustitución $u = 5x + 2$.

Entonces, $du = 5\,dx$ y $dx = \frac{du}{5}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x+2}} = \int \frac{\frac{du}{5}}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{1}{5} \int u^{-1/2}\,du$$

Usamos la fórmula de la integral de una potencia:

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 2\sqrt{u} + C$$

$$= \frac{2\sqrt{5x+2}}{5} + C$$

## Ejercicio 8.29

$$\int e^x \sin x\,dx$$

Usamos integración por partes dos veces. Sea $u = e^x$ y $dv = \sin x\,dx$.

Entonces, $du = e^x\,dx$ y $v = -\cos x$.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x - \int -e^x \cos x\,dx$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

Ahora usamos integración por partes de nuevo en $\int e^x \cos x \, dx$. Sea $u = e^x$ y $dv = \cos x \, dx$.

Entonces, $du = e^x \, dx$ y $v = \sin x$.

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

Sumamos $\int e^x \sin x \, dx$ a ambos lados:

$$2 \int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C$$

$$= \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$$

## Ejercicio 8.30

$$\int \frac{x^2 - x + 6}{x + 3} \, dx$$

Dividimos el numerador por el denominador:

$$\frac{x^2 - x + 6}{x + 3} = x - 4 + \frac{18}{x + 3}$$

Entonces:

$$\int \frac{x^2 - x + 6}{x + 3} \, dx = \int (x - 4 + \frac{18}{x + 3}) \, dx$$

$$= \int x \, dx - \int 4 \, dx + 18 \int \frac{1}{x + 3} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + 18 \ln |x + 3| + C$$

## Ejercicio 8.31

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} \, dx$$

Usamos la sustitución $u = x^2 + 9$.

Entonces, $du = 2x \, dx$ y $x \, dx = \frac{du}{2}$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} \, dx = \int \frac{\frac{du}{2}}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{-1/2} \, du$$

Usamos la fórmula de la integral de una potencia:

$$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= \sqrt{u} + C$$

Sustituimos $u$ de nuevo:

$$= \sqrt{x^2 + 9} + C$$

## Ejercicio 8.32

$$\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}} \, dx$$

Simplificamos la integral:

$$\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}} \, dx = \int \left(x^{-2} + x^{-7/6}\right) \, dx$$

Usamos la fórmula de la integral de una potencia:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \int x^{-2} \, dx + \int x^{-7/6} \, dx$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-1/6}}{-1/6} + C$$

$$= -\frac{1}{x} - 6x^{-1/6} + C$$

$$= -\frac{1}{x} - 6\sqrt[6]{\frac{1}{x}} + C$$

## Ejercicio 8.33

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

Usamos integración por partes. Sea $u = \ln x$ y $dv = x^2 \, dx$.

Entonces, $du = \frac{1}{x} \, dx$ y $v = \frac{x^3}{3}$.

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

$$= \frac{x^3 (\ln x - \frac{1}{3})}{3} + C$$

## Ejercicio 8.34

$$\int \frac{x}{x^2 - 4} \, dx$$

Usamos la sustitución $u = x^2 - 4$.

Entonces, $du = 2x \, dx$ y $x \, dx = \frac{du}{2}$.

$$\int \frac{x}{x^2 - 4} \, dx = \int \frac{\frac{du}{2}}{u}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u}$$

Usamos la fórmula de la integral del logaritmo natural:

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

Entonces:

$$= \frac{1}{2} \ln |u| + C$$

Sustituimos $u$ de nuevo:

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| + C$$

## Ejercicio 8.35

$$\int (3x + 5) \cos x \, dx$$

Usamos integración por partes. Sea $u = 3x + 5$ y $dv = \cos x \, dx$.

Entonces, $du = 3 \, dx$ y $v = \sin x$.

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int (3x+5)\cos x\,dx = (3x+5)\sin x - \int \sin x \cdot 3\,dx$$

$$= (3x+5)\sin x - 3\int \sin x\,dx$$

$$= (3x+5)\sin x + 3\cos x + C$$

## Ejercicio 8.36

$$\int \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 5x + 4}\,dx$$

Simplificamos el denominador:

$$x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$$

Usamos fracciones parciales:

$$\frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)(x+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4}$$

Multiplicamos ambos lados por el denominador común $(x+1)(x+4)$:

$$x^2 + 2x + 4 = A(x+4) + B(x+1)$$

$$x^2 + 2x + 4 = Ax + 4A + Bx + B$$

$$x^2 + 2x + 4 = (A+B)x + (4A+B)$$

Igualamos coeficientes:

1. $A + B = 1$
2. $4A + B = 4$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

1. $A + B = 1$
2. $4A + B = 4$

Restamos la primera ecuación de la segunda:

$$4A + B - (A+B) = 4 - 1$$

$$3A = 3 \implies A = 1$$

Sustituimos $A$ en la primera ecuación:

$$1 + B = 1 \implies B = 0$$

Entonces:

$$\frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)(x+4)} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+4}$$

Integrando cada término:

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{3}{x+4}\,dx$$

$$= \ln|x+1| + 3\ln|x+4| + C$$

## Ejercicio 8.37

$$\int \frac{8x}{\sqrt{1-9x^4}}\,dx$$

Usamos la sustitución $u = 1 - 9x^4$.

Entonces, $du = -36x^3\,dx$ y $dx = \frac{du}{-36x^3}$.

Sin embargo, esta sustitución es complicada de manejar directamente, entonces en su lugar, usemos una sustitución más directa.

Usamos la sustitución $u = 9x^4$.

Entonces, $du = 36x^3\,dx$ y $x\,dx = \frac{du}{36}$.

$$\int \frac{8x}{\sqrt{1-9x^4}}\,dx = \frac{8}{36}\int \frac{du}{\sqrt{1-u}}$$

$$= \frac{2}{9}\int \frac{du}{\sqrt{1-u}}$$

Usamos la sustitución $v = 1 - u$, entonces $dv = -du$:

$$= \frac{2}{9}\int \frac{-dv}{\sqrt{v}}$$

$$= -\frac{2}{9}\int v^{-1/2}\,dv$$

Usamos la fórmula de la integral de una potencia:

$$\int v^n\,dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= -\frac{2}{9}\cdot\frac{v^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= -\frac{2}{9}\cdot 2\sqrt{v} + C$$

$$= -\frac{4}{9}\sqrt{1-9x^4} + C$$

## Ejercicio 8.38

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx$$

Usamos la sustitución $u = x - 1$.

Entonces, $du = dx$ y $x = u + 1$.

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int (u+1)\sqrt{u}\,du$$

$$= \int (u^{3/2} + u^{1/2})\,du$$

Usamos la fórmula de la integral de una potencia:

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

Sustituimos $u$ de nuevo:

$$= \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$$

## Ejercicio 8.39

$$\int \frac{\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^3} + 2x^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

Simplificamos la integral:

$$\int \frac{x^{1/2} - 3x + 2x^2}{x^{1/3}}\,dx = \int (x^{1/2-1/3} - 3x^{1-1/3} + 2x^{2-1/3})\,dx$$

$$= \int (x^{1/6} - 3x^{2/3} + 2x^{5/3})\,dx$$

Usamos la fórmula de la integral de una potencia:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \frac{x^{7/6}}{7/6} - 3\cdot\frac{x^{5/3}}{5/3} + 2\cdot\frac{x^{8/3}}{8/3} + C$$

$$= \frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{9}{5}x^{5/3} + \frac{6}{8}x^{8/3} + C$$

$$= \frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{9}{5}x^{5/3} + \frac{3}{4}x^{8/3} + C$$

## Ejercicio 8.40

$$\int x\sin x\,dx$$

Usamos integración por partes. Sea $u = x$ y $dv = \sin x\,dx$.

Entonces, $du = dx$ y $v = -\cos x$.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

## Ejercicio 8.41

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

Completamos el cuadrado en el denominador:

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$$

Usamos la fórmula de la integral del arcotangente:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Aquí, $a = 1$ y $x = x + 1$:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \int \frac{1}{1 + (x+1)^2}\,dx$$

$$= \arctan(x+1) + C$$

## Ejercicio 8.42

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$$

Usamos la sustitución $u = \ln x$.

Entonces, $du = \frac{1}{x}\,dx$ y $dx = x\,du$.

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \int \frac{u}{x^2}\,du$$

Pero, $x = e^u$ entonces $x^2 = e^{2u}$:

$$= \int \frac{u}{e^{2u}}\,du$$

Usamos la fórmula de la integral de una potencia:

$$\int ue^{-2u}\,du$$

Usamos integración por partes. Sea $v = u$ y $dv = e^{-2u}\,du$.

Entonces, $du = du$ y $v = -\frac{1}{2}e^{-2u}$.

$$\int ue^{-2u}\,du = -\frac{1}{2}ue^{-2u} + \frac{1}{2}\int e^{-2u}\,du$$

$$= -\frac{1}{2}ue^{-2u} - \frac{1}{4}e^{-2u} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln x \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x^2} + C$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$$

## Ejercicio 8.43

$$\int \frac{3x-2}{x^3-x^2}\,dx$$

Simplificamos el denominador:

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

Entonces, tenemos:

$$\frac{3x-2}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

Multiplicamos ambos lados por el denominador común $x^2(x-1)$:

$$3x - 2 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$$

Expandiendo y agrupando términos:

$$3x - 2 = Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2$$

$$3x - 2 = (A + C)x^2 + (B - A)x - B$$

Igualamos coeficientes:

1. $A + C = 0$
2. $B - A = 3$
3. $-B = -2$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

1. De $-B = -2$, obtenemos $B = 2$.
2. De $B - A = 3$, sustituimos $B$ y obtenemos $2 - A = 3 \implies A = -1$.
3. De $A + C = 0$, sustituimos $A$ y obtenemos $-1 + C = 0 \implies C = 1$.

Entonces, tenemos:

$$\frac{3x-2}{x^2(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x-1}$$

Ahora integramos cada término por separado:

$$\int \frac{3x-2}{x^3-x^2}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x-1}\right)\,dx$$

$$= -\int \frac{1}{x}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= -\ln|x| - \frac{2}{x} + \ln|x-1| + C$$