1. VECTORES, PUNTOS, ÁREAS Y VOLÚMENES

1.1. Dados los vectores $\vec{u}(2,\ 3,\ 5)$ y $\vec{v}(1,\ 6,\ a)$ calcula a para que $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ sean ortogonales.

1.2. Dados los puntos $A(3{,}0{,}1)$, $B(1,-1{,}0)$, $C(1,-1{,}3)$ y $D(\lambda,\lambda-2,-\lambda)$, determina el valor de λ para que A, B, C y D sean coplanarios. ¿Para algún valor de λ son A, B, C y D vértices de un paralelogramo?

1.3. Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=2$, $\angle(\vec{u},\vec{v})=60^\circ$. Calcula $|\vec{u}+\vec{v}|$

1.4. Halla el valor de m para que los vectores $\vec{a}(3{,}0{,}1)$, $\vec{b}(0,\ m,-1)$ y el producto vectorial $\vec{a}\times\vec{b}$ determinen un paralelepípedo de volumen igual a $49\ u^3$.

1.5. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=2$ y que forman un ángulo de 60º. Calcula $|\vec{u}-\vec{v}|$.

1.6. Demuestra que los puntos $P(0{,}0{,}4)$, $Q(3{,}3{,}3)$, $R(2{,}3{,}4)$ y $S(3{,}0{,}1)$ son coplanarios. Calcula el área del triángulo $\triangle PQR$.

1.7. Dados los vectores $\vec{u}(2,\ 3,\ 5)$ y $\vec{v}(1,\ 6,\ a)$ calcula a para que $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ sean ortogonales.

1.8. Si $|\vec{v}|=6$, $|\vec{w}|=10$ y $|\vec{v}+\vec{w}|=14$, calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

1.9. Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=2$, $\angle(\vec{u},\vec{v})=60^\circ$. Calcula $|\vec{u}+\vec{v}|$

1.10. Halla el valor de m para que los vectores $\vec{a}(3{,}0{,}1)$, $\vec{b}(0,\ m,-1)$ y el producto vectorial $\vec{a}\times\vec{b}$ determinen un paralelepípedo de volumen igual a $49\ u^3$.

1.11. Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=4$, $|\vec{u}-\vec{v}|=5$. Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

1.12. ¿Son coplanarios los puntos $A(1{,}0{,}0)$, $B(3{,}1{,}0)$, $C(1{,}1{,}1)$ y $D(3{,}0,-1)$? Calcula el área del triángulo $\triangle ABC$.

1.13. Sean la recta $r:\dfrac{x-1}{m}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{2}$ y el plano $\pi: 2x-y+kz=0$, calcula m y k para que la recta sea perpendicular al plano.

1.14. De dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que son ortogonales y que $|\vec{u}|=6$ y $|\vec{v}|=10$. Halla $|\vec{u}+\vec{v}|$ y $|\vec{u}-\vec{v}|$.

1.15. Comprueba que los puntos $A(1,0,3)$, $B(-2,5,4)$, $C(0,2,5)$ y $D(-1,4,7)$ son coplanarios. Calcula el área del triángulo $\triangle ABC$.

1.16. Sean la recta $r : \dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{2}$ y el plano $\pi : 2x - y + kz = 0$, calcula m y k para que la recta esté contenida en el plano.

2. GEOMETRÍA, POSICIONES RELATIVAS, DISTANCIAS…

2.1. Estudia la posición relativa de las rectas $r : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$ y s que pasa por los puntos $P(0,2,1)$ y $Q(1,1,1)$. Calcula la distancia de r a s y obtén la ecuación implícita del plano π que es paralelo a r y contiene a s y obtén la ecuación implícita del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

2.2. Calcula el valor de m para que la recta $r : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{6} = \dfrac{z-2}{-4}$ no corte al plano $\pi : 5x + my + 4z = 5$. Para ese valor de m calcula la distancia de la recta al plano.

2.3. Dados los planos $\pi_1 : 2x - y + z - 1 = 0$; $\pi_2 : \begin{cases} x = -2 - 2\lambda \\ y = \quad\;\; -\lambda - 2\mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$, estudia su posición relativa y calcula el ángulo si son secantes, o la distancia si son paralelos.

2.4. Dadas las rectas $r : \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \;\;\, 3 + \lambda \\ z = \quad\;\; -\lambda \end{cases}$, estudia su posición relativa y calcula su distancia si se cruzan o su ángulo si son secantes.

2.5. Considera un plano $\pi : x + y + mz = 3$ y la recta $r : x = y - 1 = \dfrac{z-2}{2}$. Halla m para que r y π sean perpendiculares. ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π ?.

2.6. Dados los planos $\pi_1 : x - 2y + 2z - 1 = 0$; $\pi_2 : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda + 2\mu \\ y = \quad\;\; 2\lambda - 2\mu \\ z = 1 + \lambda - 3\mu \end{cases}$, estudia su posición relativa. Calcula la distancia entre ambos planos.

2.7. Dadas las rectas $r_1 : \begin{cases} 6x - y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ y $r_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \quad\;\; \lambda \\ z = \quad -\lambda \end{cases}$ se pide:

a) Estudia la posición relativa de las rectas r_1 y r_2.
b) Si se cortan, calcula el punto de corte y obtén la ecuación del plano que las contiene. Si se cruzan o son paralelas, calcula la distancia entre ambas.

2.8. Sean π el plano que pasa por los puntos A(1,-1,1), B(2,3,2), C(3,1,0) y r la recta dada por $r : \dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y+6}{-1} = \dfrac{z+3}{2}$

a) Estudia la posición relativa del plano y la recta.
b) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π.
c) Pasa r a forma paramétrica y calcula los puntos de r que distan 6 unidades del plano π.

2.9. Calcula la distancia del punto $P(1,\ 0,\ 1)$ al plano $\pi : x - y + z = 1$.

2.10. Calcula la ecuación de un plano perpendicular a la recta $r : \dfrac{x-3}{2} = y = \dfrac{z+2}{-1}$ y que contiene a $P(2,\ -1,\ 3)$.

2.11. Estudia la posición relativa de las rectas $r : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$ y s que pasa por los puntos $P(0,2,1)$ y $Q(1,1,1)$. Obtén la ecuación implícita del plano π que es paralelo a r y contiene a s.

2.12. Sea r la recta que pasa por el punto $P(1, -1, -2)$ y es perpendicular al plano $\alpha : x + 2y + 3z + 6 = 0$. Sea s la recta que pasa por los puntos $A(1,0,0)$ y $B(-1, -3, -4)$.

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

b) Si se cortan, calcula el punto de corte y obtén la ecuación del plano que las contiene. Si se cruzan o son paralelas, calcula la distancia entre ambas.

2.13. Dados el plano $\pi : 2x - y + z - 1 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} -2x + y - 1 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{cases}$, estudia la posición relativa de π y r y di el ángulo que forman el plano y la recta.

2.14. Encontrar la distancia del punto $P(1, -1,3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1,2,1)$ y $R(1,0, -1)$.

2.15. Dados los planos $\pi_1 : 2x + y - 2z = 1$, $\pi_2 : x - y + 2z = 1$. Estudia su posición relativa. Halla un punto y un vector de la recta que determinan.

2.16. Dadas la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto $(2, -5, 1)$ y tiene dirección $(-1,0, -1)$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.

b) Obtén en forma implícita la ecuación de un plano que sea paralelo a r y contenga a s.

2.17. Sea π el plano determinado por el punto $P(2,2,2)$ y los vectores $\overrightarrow{u}=(1,0,-1)$ y $\overrightarrow{v}=(1,1,0)$. Sea r la recta que pasa por los puntos $O(0,0,0)$ e $Q(2,-2,2)$. Estudia la posición relativa de π y r y di el ángulo que forman el plano y la recta.

2.18. Dados los puntos $A(1,0,0)$, $B(1,1,1)$, $C(-2,1,0)$ y $D(0,1,3)$, halla la distancia entre las rectas AC y BD.

3. PUNTO SIMÉTRICO RESPECTO A PLANO/RECTA

3.1. Determinar el punto simétrico de $P(1,2,3)$ respecto del plano $\pi : x-3y-2z+4=0$

3.2. Determinar el punto simétrico de $A(-3,1,-7)$ respecto de la recta

$$r : \begin{cases} x = -1 & +\lambda \\ y = \ \ 3 & +2\lambda \\ z = -1 & +2\lambda \end{cases}$$

3.3. Calcula el punto simétrico de $P(2,1,7)$ respecto del plano $\pi_2 : \begin{cases} x = 3+2\lambda+2\mu \\ y = \qquad 2\lambda-2\mu \\ z = 1+\ \ \lambda-3\mu \end{cases}$.

3.4. Determina el punto simétrico de $P(1,\ 0,\ 1)$ respecto del plano $\pi : x-y+z=1$

3.5. Calcula el punto simétrico de $O(0,0,0)$ respecto del plano $x-y+z-2=0$.

3.6. Dado el punto $P(2,1,7)$, calcula su simétrico respecto al plano

$$\pi_2 : \begin{cases} x = 3+2\lambda+2\mu \\ y = \qquad 2\lambda-2\mu \\ z = 1+\ \ \lambda-3\mu \end{cases}$$

4. PROBABILIDAD TEÓRICA / SUCESOS

4.1. Sean C y D dos sucesos de un espacio muestral. Sabiendo que $P(C)=0{,}4$, $P(D)=0{,}5$ y que C y D son incompatibles, determínese $P(C\cup D)$

4.2. Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral tal que $P(A)=0{,}8$; $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0{,}8$ y $P(A\cup B)=0{,}9$. ¿Son independientes los sucesos A y B?. Calcula $P(B/\overline{A})$

4.3. Sean A y B dos sucesos independientes cuyas probabilidades son $P(A)=0{,}6$ y $P(B)=0{,}2$. Calcula: $P(A\cup B)$, $P(\overline{A}\cup\overline{B})$, $P(\overline{A}\cap B)$, $P(\overline{A}/B)$

5. TABLAS DE CONTINGENCIA / DIAGRAMAS DE ÁRBOL

5.1. La directiva de un club de cine ha hecho un estudio sobre los gustos cinematográficos de sus socios. De los 300 socios del club, hay 150 a los que les gustan las películas de acción, 135 a los que les gustan las de suspense y 75 a los que no les gustan ninguno de estos géneros. Si se elige un socio cualquiera, calcular las probabilidades de que:

b1) Le guste al menos uno de los dos géneros.
b2) Le gusten las películas de acción pero no las de suspense.
b3) Sabiendo que le gustan las películas de acción, que no le gusten las de suspense.

5.2. En una ciudad, la probabilidad de que uno de sus habitantes censados vote al partido A es 0,4; la probabilidad de vote al partido B es 0,35 y la probabilidad de que vote al partido C es 0,25. Por otro lado, las probabilidades de que un votante de cada partido lea diariamente algún periódico son, respectivamente, 0,4; 0,4 y 0,6. Se elige una persona de la ciudad al azar:

b1) Calcúlese la probabilidad de que lea algún periódico.

b2) La persona elegida lee algún periódico, ¿cuál es la probabilidad de que sea votante del partido B?

5.3. En un estudio de arquitectura de Madrid trabajan personas de diferentes nacionalidades. El 80 % de las personas que trabajan en el estudio son españolas. El 40 % de los empleados del estudio son mujeres, de las cuales un 90 % son españolas. Calcúlese la probabilidad de que tomando a un empleado del estudio de arquitectura al azar:

c1) Sea español sabiendo que no es mujer. c2) Sea mujer o española.

5.4. En una cierta ciudad el 40% de la población tiene el pelo moreno, el 25% tiene los ojos oscuros, y el 15% tiene pelo y ojos oscuros. Se escoge una persona al azar. a) Calcula la probabilidad de que no tenga ni pelo ni ojos oscuros. b) Si tiene pelo moreno, calcula la probabilidad de que también tenga los ojos oscuros. c) Si tiene los ojos oscuros, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga pelo moreno?

5.5. La directiva de un club de cine ha hecho un estudio sobre los gustos cinematográficos de sus socios. De los 300 socios del club, hay 150 a los que les gustan las películas de acción, 135 a los que les gustan las de suspense y 75 a los que no les gustan ninguno de estos géneros. Si se elige un socio cualquiera, calcular las probabilidades de que:

a1) No le gusten las películas de acción.
a2) Le guste al menos uno de los dos géneros.
a3) Le gusten las películas de acción pero no las de suspense.
a4) Sabiendo que le gustan las películas de acción, que no le gusten las de suspense.

5.6. Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1,6%, mientras que para los de gama alta es del 0,9%. En un control de calidad preventa, se elige un vehículo al azar para examinarlo.
a) Calcula la probabilidad de que el vehículo elegido sea defectuoso.
b) Si el vehículo elegido es no defectuoso, calcula la probabilidad de que sea de gama baja.

5.7. Una compañía de mensajería tiene una probabilidad del 2% de dañar cada uno de sus envíos. Asumimos que las probabilidades de que varios envíos distintos resulten dañados son independientes entre sí. Se pide:
b1) Hallar la probabilidad de que en un lote de 10 paquetes hayan llegado con desperfectos 2 o más envíos.
b2) Hallar la probabilidad de que en un lote de 2000 paquetes hayan llegado exactamente 30 paquetes defectuosos.

5.8. Una compañía farmacéutica vende una pomada que alivia la dermatitis atópica en un 80% de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10%. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con la pomada y la otra mitad con el placebo.
b1) Determina la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.
b2) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

5.10. El 40% de los sábados Marta va al cine, el 30% va de compras y el 30% restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60% de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20% de las veces que va de compras y el 80% de las veces que juega a videojuegos. Se pide:
c1) Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.
c2) Si se sabe que Marta ha quedado con sus compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

6. BINOMIAL / NORMAL / APROXIMACIÓN

6.1. Una compañía de mensajería tiene una probabilidad del 2% de dañar cada uno de sus envíos. Asumimos que las probabilidades de que varios envíos distintos resulten dañados son independientes entre sí. Se pide:

a) Hallar la probabilidad de que en un lote de 10 paquetes hayan llegado con desperfectos 2 o más envíos.

b) Hallar la probabilidad de que en un lote de 2000 paquetes hayan llegado menos de 30 paquetes defectuosos.

6.2. Sabiendo que el peso de los estudiantes varones de segundo de bachillerato es una variable aleatoria con distribución normal, de media 74 kg y desviación típica 6 kg, se pide. c1) Determinar la probabilidad que un estudiante varón al azar pese entre 68 kg y 80 kg. c2) Calcular el porcentaje de alumnos con más de 80 kg. Si acuden 1500 estudiantes varones a las ABAU, ¿cuántos estudiantes pesarán más de 80 kg?

6.3. Una empresa de envíos realiza entregas en un barrio de la ciudad y ha determinado que el 15% de los paquetes entregados en este barrio tienen algún tipo de problema. Si hoy la empresa realiza 9 entregas en el barrio:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que más de 1 paquete presente algún tipo de problema?

b) Si se realizan 200 entregas, ¿cuál es la probabilidad de que haya problemas con menos de 35 paquetes?

6.4. Las alturas de los estudiantes de una escuela secundaria siguen una distribución normal con media de 170 cm y desviación estándar de 10 cm. Si se selecciona aleatoriamente un estudiante de la escuela ¿Cuál es la probabilidad de que su altura esté entre 160 cm y 180 cm? ¿Cuál es la altura a partir de la cual se encuentran el 5% de los estudiantes más altos?

6.5. El peso de las vacas de un ganadero se distribuye como una distribución normal de 500 kg de media y 45 kg de desviación típica. Calcula la probabilidad de que una vaca al azar pese entre 490 kg y 510 kg. Si hay 2000 vacas, ¿cuántas cabe esperar que estén dentro de ese rango?

6.6. La probabilidad de que un pez de una determinada especia sobreviva más de 5 años es del 10%.
a) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.
b) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos en este mismo año, usando una aproximación mediante la normal correspondiente, halla la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.
c) Halla, con la misma aproximación, la probabilidad de que sobrevivan entre 15 y 30 peces.