1. ÁREAS

1.1. Calcula el área delimitada entre el eje X y la gráfica de
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x & si \quad x \leq 2 \\ -x + 4 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

1.2. Considera la región limitada por la curva $y = x^3 - 5x^2 + 6x$ y la recta $y = 0$. Dibuja la gráfica de la región, exprésala usando integrales, y calcula su valor.

1.3. Sea R el recinto del plano limitado por $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$. Dibújalo y calcula área.

1.4. Sea R el recinto del plano limitado por las curvas $y = x(3 - x)$ y por $y = x^2$. Dibujar R y calcular su área.

1.5. Dibuja el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $f(x) = x^2 - 4x$ y la recta $y = x - 4$ (nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indicar los puntos de corte de los ejes, el vértice de la parábola y la concavidad o convexidad).

1.6. Dada la curva $y = x^2 + 2x + 2$, halla el área limitada por la curva, la recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo y la tangente a la curva con pendiente 6. Dibuja la región correspondiente. (Nota: para el dibujo de las gráficas de las parábolas, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad).

1.7. Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $f(x) = -x^2 + 9x$ y las rectas $y = 20$; $x - y + 15 = 0$. (Nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola, y la concavidad o convexidad)

1.8. Dada la parábola $y = 4 - x^2$, representa y calcula el área de la región delimitada por la parábola y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$, entre el eje de ordenadas, y la recta $x = a$, donde a es la abscisa del punto de corte entre la tangente y el eje OX.

1.9. Calcula el área de la región delimitada por las gráficas de $f(x) = xe^x$, $y = 0$ y $x = 1$.

1.10. Dada la parábola $y = x^2 - 4$, calcula el área de la región limitada por esa parábola, su tangente en el punto x=1, y el eje vertical. Nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad).

1.11. Dibuja y calcula el área del recinto limitado por las parábolas $y = x^2 - 4x$; $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ (Nota: para el dibujo de las gráficas de las parábolas, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad).

1.12. Calcula el área entre la gráfica de $f(x) = \begin{cases} x & si \;\; x \in [0,1) \\ 1 + \ln x & si \;\; x \in [1,e] \end{cases}$ y el eje en $(0,\ e)$.

1.13. Dibuja y calcula el área de la región del primer cuadrante limitada por la gráfica de la parábola $y = \dfrac{x^2}{2} + 1$, su recta normal en el punto de abscisa $x = 1$, y los ejes. (Nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad).

1.14. Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $y = 2 - \dfrac{x^2}{2}$, su recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$, y el eje OX. (Nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad).

2. TEORÍA + APLICACIONES (TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO)

2.1. Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral. IIIIII

2.2. Teorema del valor medio del Cálculo Integral IIIII

2.3. Enuncia la regla de Barrow. IIIII

2.4. Sea la función $F(x) = \displaystyle\int_0^x \log(t^2 + 4)\, dt$. Calcula $F'(x)$.

2.5. Se define $F(x) = \displaystyle\int_0^{e^x - x - 1} e^{-t^2}\, dt$. Calcula $F'(0)$

2.6. Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \cos t\, dt$. Halla los posibles extremos de dicha función en el intervalo $[0, \pi]$.

2.7. Se define $g(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1 + e^t}\, dt$. Calcula $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}$.

2.8. Halla los puntos donde se anula la derivada de la función
$f(x) = -2x + \displaystyle\int_0^{2x} e^{(t^2 - 10t + 24)}\, dt$

2.9. Considera la función $F : [0,\ +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^x (2t + \sqrt{t})\, dt$, halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

2.10.Dada la función $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$, ¿tiene $F(x)$ puntos de inflexión? Justifica la respuesta.

2.11. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x) = \int_0^x [2 + \cos(t^2)]\, dt$ en el punto de abscisa $x = 0$.

2.12. Sabiendo que $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt = x^2(x+1)$, calcula $f(2)$.

2.13. Calcula la derivada de $F(x) = \int_0^{x^2+x} \cos(t)\, dt$. Obtén los valores de $F(0)$ y $F'(0)$.

3. APLICACIÓN INTEGRAL DEFINIDA

3.1. Calcula el valor de a para que el área de $f(x) = x^2 + ax - 3$ sea $\frac{7}{3}$ en [3,4].

3.2. Calcula el valor positivo de p para el que $\int_0^p \frac{x}{x^2+1}\, dx = 1$

3.3. Sea la función $f(x) = xe^{3x}$. Sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de f y el eje OX entre $x = 0$ y $x = p$ $(p > 0)$ vale $1/9$, calcular el valor de p.

3.4. Halla el polinomio $P(x)$ de segundo grado que pasa por los puntos (0, 1) y (3, 0), sabiendo que $\int_0^3 P(x)\, dx = \frac{4}{3}$

3.5. Dadas la recta $y = mx$ y la curva $y = x^3$, calcula para que valores de x se cortan, y obtén el valor de m para que el área del recinto limitado por la recta y la curva sea 2.

3.6. Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que $P(0) = P(2) = 1$ y $\int_0^2 P(x) = \frac{1}{3}$

3.7. Sea la función $f(x) = \sin x$, calcular $a > 0$ tal que el área encerrada por la gráfica de f, los ejes $x = 0$ e $y = 0$, y la recta $x = a$, sea $\frac{1}{2}$. Calcular la ecuación de la recta tangente e la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$.

3.8. Sea f una función continua en el intervalo $[2, 3]$ y F una primitiva de f tal que $F(2) = 1$ y $F(3) = 2$, calcula $\displaystyle\int_2^3 (5f(x) - 7)\, dx$

3.9. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en $(0,0)$ y $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{5}{4}$. Calcula a, b, c, d.

4. MATRICES (OPERACIONES, INVERSA, RANGOS, POTENCIAS…)

4.1. Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, prueba que B siempre es invertible y calcula su inversa.

4.2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{128} y A^{2023}

4.3. Calcula $A - B$; A y B, sabiendo de las matrices cuadradas A y B que:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.4. Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -m \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -m & m \end{pmatrix}$

4.5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+1 & a^2 & a \\ 0 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula su rango según los valores de a.

4.6. Halla X e Y cumpliendo $\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$. Calcula, si es posible X^{-1} e Y^{-1}

4.7. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calcula A^{15} y A^{20}.

4.8. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m+1 & m+1 & m \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$, calcula su rango según los valores de m

4.9. Dadas dos matrices verificando $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$ y $A - B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -1/2 \end{pmatrix}$ calcula la matriz $A^2 - B^2$

4.10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2 - m \\ 1 & 0 & m^2 \end{pmatrix}$, calcula su rango según los valores de m.

4.11. Hallar, si existe, una matriz cuadrada 2×2, A, que cumpla que 1) coincide con su traspuesta; 2) verifica, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y 3) su determinante vale 9.

4.12. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide hallar A^n para todo entero positivo n y calcular, si existe, la inversa de la matriz A y de la matriz $I_3 + A$

4.13. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$, calcula su rango según los valores de k.

4.14. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a^2 & 1 & 0 \\ 1 & a^2 & a-1 \\ 2 & 2 & a-1 \end{pmatrix}$, calcula su rango según los valores de a.

4.15. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, ¿existe algún valor de a para el que la matriz sea simétrica? Razona la respuesta. Dada la misma matriz, calcula a para que se verifique $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

5. ECUACIONES MATRICIALES

5.1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación matricial $AX = 3B^t$ siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Qué valores de a hacen que C tenga inversa?
b) ¿Qué dimensiones debe tener una matriz B para que la ecuación $A \cdot B \cdot C = D$ tenga sentido? c) Calcula B para el valor $a = 1$.

5.3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, despeje X en la ecuación matricial $XA + B = A^2 + X$ y calcule su valor.

5.4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$, resolver la ecuación matricial $AX = B^t + X$, donde B^t es la traspuesta de B.

5.5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resolver la ecuación matricial $AX + 3B = B(A^t + 3I)$, donde A^t es la traspuesta de A e I la matriz identidad de orden 3.

5.6. Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -m \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -m & m \end{pmatrix}$. Para el valor $m = 1$ resuelve la ecuación matricial $AX = 3B^t$ siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.7. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, justifica, razonadamente, cual es la dimensión de la matriz X que verifica $X \cdot A - C^t = X \cdot B$. Calcula la matriz X.

5.8. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Resuelve la ecuación $6X = B - 3AX$

5.9. Dada $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica $X \cdot A + X - 2A = 0$

5.10. Resuelva la ecuación matricial $XA + XA^t = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.11. Determina la matriz X que verifica $AXA - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

5.12. Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica $BX - A = C^t$,

5.13. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica $X \cdot A + X - 2A = 0$

6. DETERMINANTES Y PROPIEDADES

6.1. Sean las matrices A y $B \in M_{3\times3}$ tales que $|A| = \dfrac{1}{3}$ y $|B| = -3$. Con estos datos calcula: $|A^{-1}|$; $|3AB^t|$; $|(B^{-1}A^{-1})^t|$

6.2. Si F_1, F_2 y F_3 son las tres filas de una matriz cuadrada cuyo determinante vale -2, se pide, de forma razonada, el determinante cuyas filas son $2F_2, -F_1 + 4F_3, 2F_3$

6.3. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 con $|A| = 2$ y $|B| = -\dfrac{1}{2}$, y $A = (C_1, C_2, C_3)$. a) Calcula $|(-2A^{-1}B^2)^t|$ b) $|C_1 + C_2,\ 3C_3 - C_2,\ 5C_1|$

6.4. Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcula el valor de los siguientes:

a) $\left|3(A^t)^{-1} \cdot A^2\right|$ b) $\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$

6.5. Si F_1, F_2, F_3 y F_4 son las cuatro filas de una matriz cuadrada A cuyo determinante vale -2, calcular, de forma razonada el determinante de $\dfrac{A^2}{2}$ y el determinante cuyas filas son $2F_2$, $-3F_1 + 4F_3$, $-F_4$ y $2F_3$.

6.6. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10$, calcula sin desarrollar $\begin{vmatrix} x & a-3 & -2a \\ y & b-6 & -2b \\ z & c-9 & -2c \end{vmatrix}$

6.7. Sean F_1, F_2 y F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3, con $det(M) = -2$.
a) Calcula el valor de los determinantes $|M^3|$ y $|3M^t \cdot M^{-1}|$
b) Calcula el valor del determinante que tiene por filas $F_1 - F_2, 2F_1, F_2 + F_3$.

6.8. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, calcula $\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix}$

6.9. Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A| = 5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes $|-A|$, $|A^{-1}|$, $|A^t|$, $|A^3|$

6.10. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$, calcula el valor de $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$

6.11. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden tres tales que $|A| = -3^{-2}$ y $|B| = 3$. Calcula b1) $|A^{-1}|$ b2) $|3A \cdot B^t|$ b3) $|(B^{-1} \cdot A^{-1})^t|$

6.12. Tenemos una matriz M, 3×3, cuyas columnas son $C_1,\ C_2,\ C_3$ y $det(M) = 2$.
a) Calcular $|2M^t \cdot (M^{-1})^2|$
b) Se considera la matriz A cuyas columnas son (de izquierda a derecha):
$-C_2,\ C_3 + C_2,\ 3C_1$, calcular razonadamente los determinantes de las matrices A y A^{-1} (en caso de que esta matriz inversa exista)

6.13. Dada una matriz cuadrada M de orden 3, con $det(M) = -2$, calcula el valor de los determinantes $|M^3|$ y $|3M^t \cdot M^{-1}|$

6.14. Sean $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d} \in \mathbb{R}^3$, vectores columna. Si $det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}) = -1$
Calcula razonadamente el determinante de $det(\overrightarrow{d} + \overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{d})$

6.15. El determinante de una matriz cuadrada de filas $F_1,\ F_2,\ F_3$ vale 7 unidades. Calcula el determinante de la matriz que tiene por filas $3F_1,\ F_1 + F_2,\ F_1 - F_3$

6.16. Sean C_1, C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3, con $det(M) = 7$.
a) Calcula el valor del determinantes $|4M^{-1} \cdot (M^t)^2|$ b) Calcula el valor del determinante que tiene por columnas $C_1 + 2C_3, C_2, 2C_3 - C_1$.

7. DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

7.1. Dado el sistema: $\left.\begin{array}{rcrcrcr} & & y & + & z & = & 1 \\ (k-1)x & + & y & + & z & = & k \\ x & + & (k-1)y & + & z & = & 0 \end{array}\right\}$ Se pide:

a) Discutir el sistema según los valores de k
b) Resolverlo para k=0 y k=1

7.2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a1) Calcula el rango de A según los diferentes valores de t.

a2) Razona para que valores de t, el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene más de una solución.

7.3. Dado el sistema $\left.\begin{array}{rcrcrcr} kx & + & y & + & kz & = & 1 \\ 2x & + & ky & & & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right\}$

b1) Discute el sistema según los valores de k. b2) Resuélvelo para $k = 1$ y $k = -1$.

7.4. Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a1) Determinar los valores del parámetro a para que la matriz M tenga inversa.

a2) Resolver el sistema homogéneo $MX = 0$ para $a = 1$.

7.5. Dado el sistema $\left.\begin{array}{rcrcrcr} (a-1)x & & & + & (a-1)z & = & 0 \\ & & (a+1)y & - & (a+1)z & = & 1 \\ x & & & + & 2az & = & 0 \end{array}\right\}$

b1) Discute el sistema según los valores de a.

b2) Resuélvelo para $a = 0$ y $a = 2$.

7.6. Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a1) Determinar los valores del parámetro a para que la matriz M tenga inversa.

a2) Hallar la inversa de M para $a = 2$.

a3) Resolver el sistema homogéneo $MX = 0$ para $a = 1$.

7.7. Dado el sistema $\left.\begin{array}{ccccccc} (a-1)x & + & 2y & + & (a-1)z & = & 1+a \\ & & (a+1)y & - & (a+1)z & = & 2 \\ x & + & y & + & az & = & a \end{array}\right\}$

b1) Discute el sistema según los valores de a.

b2) Resuélvelo para $a=0$.

7.8. Dadas $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x & 0 & z\\ 0 & y & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & -y & -z\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}0\\a\\a\end{pmatrix}$:

a1) Sabiendo que $(AB-C)D=2E$, plantea el sistema resultante de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (x, y, z) con un parámetro a.

a2) ¿Para algún valor del parámetro a existe solución única?

a3) Para $a=0$, encuentra una solución del sistema con $z\neq 0$.

7.9. Dado el sistema $\left.\begin{array}{ccccc} & & y & + & z=1 \\ (k-1)x & + & y & + & z=k \\ x & + & (k-1)y & + & z=0 \end{array}\right\}$

b1) Discute el sistema según los valores de k.

b2) Resuélvelo para $k=0$ y $k=1$.

7.10. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1. \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según los valores de m.

b) Resolverlo para m=1 y m=2