IDEA DE APROXIMACIÓN A LA NOTACIÓN INTEGRAL: SUMA DE RIEMANN

Hasta ahora vimos los métodos de integración sin darles más sentido que la primitiva como "antiderivada" y la integral indefinida como el conjunto de todas las primitivas.

Pero la integral definida tiene un sentido geométrico muy claro y concreto: área bajo una curva, que aparece como aproximación a través de rectángulos (suma de Riemman).

Ambos enfoques conectan gracias al Teorema Fundamental del Cálculo que estudiaremos más adelante. Ahora la notación de la integral indefinida, adquiere más sentido:

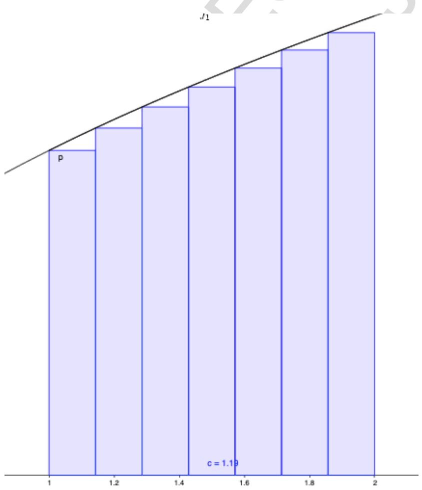
$$\sum \text{ : SUMA O SUMATORIO } \xrightarrow{n\to\infty} \int \text{ : SUMA INFINITA}$$

$$\Delta x \text{ : INCREMENTO } \xrightarrow{n\to\infty} dx \text{ : DIFERENCIAL}$$

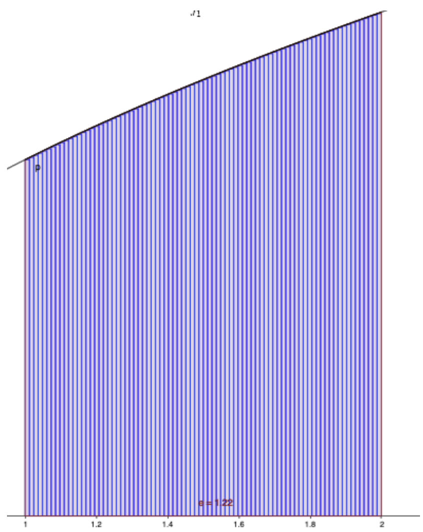
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \xrightarrow{n\to\infty} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(x)\,\Delta x \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx}$$

(La suma de los n rectángulos, cuando n tiende a infinito, se aproxima a la integral definida (al área))



$$\xrightarrow{n\to\infty}$$



INTEGRALES DEFINIDAS. CÁLCULO DE ÁREAS

La aplicación práctica de la integral definida va a ser fundamentalmente el cálculo de áreas, y el marco teórico que nos permite realizar los ejercicios son la Regla de Barrow, para el cálculo, y el Teorema Fundamental del Cálculo, que conecta la idea de área bajo una curva e integral. Los repasamos y vemos ejemplos:

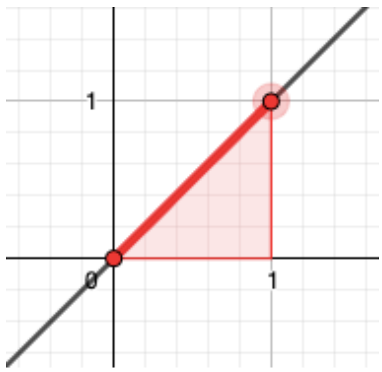
Regla de Barrow. Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y F una primitiva, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ADITIVIDAD: Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, para todo punto $c \in [a, b]$ se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Ejemplo 1. Triángulo rectángulo. Empecemos con **algo sencillo** para empezar a ver que funciona.



Área bajo $f(x) = x$ *entre* $[0, 1]$.

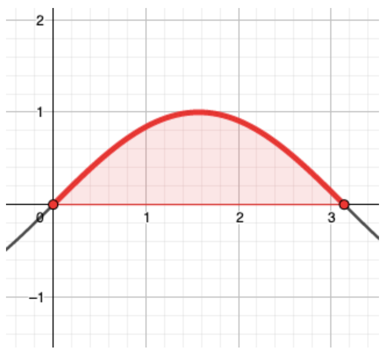
Gráficamente es el área de un triángulo rectángulo de base 1 y altura 1:

$$A = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0{,}5\ u^2$$

Usando integrales:

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ u^2$$

Ejemplo 2a. *Calculamos el área bajo una de las ondulaciones de la función seno.*



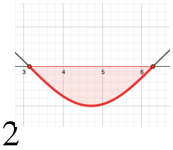
Área bajo $f(x) = \sin x$ *entre* $[0, \pi]$.

Aquí solo podemos usar integrales:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2\ u^2$$

Resulta llamativo que el área sea exactamente dos unidades, sin pi, ni expresiones decimales.

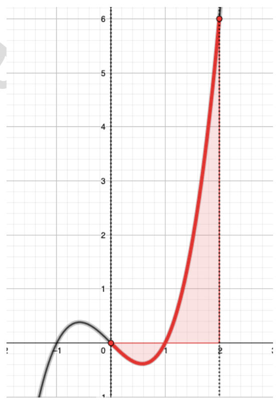
Ejemplo 2b. *Si calculamos el área sobre una de las ondulaciones inferiores,* siguiendo el mismo proceso, vemos:



$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos \pi) = -1 - (-(-1)) = -2$$

INTEGRALES DE REGIONES BAJO EL EJE, DAN RESULTADO NEGATIVO. Si queremos calcular el área, siempre que no cruce el eje, debemos cambiar el signo, o aplicar valor absoluto.

Ejemplo 3. **Área de funciones que cruzan el eje X**:



Área entre $y = x^3 - x$, el eje X, y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

SIEMPRE debemos tener una referencia gráfica de la situación, o, al menos, saber si la función que estamos manejando corta al eje X, y si en cada tramo está por encima o por debajo del mismo.

En este caso la representación gráfica completa es costosa, así que:

1. **Puntos de corte con el eje X:**

$f(x) = 0 \implies x^3 - x = 0 \implies x(x^2 - 1) = 0 \implies x = 0$ y $x = \pm 1$

2. Por aditividad de la integral definida:

$$\int_0^2 (x^3 - x)\, dx = \int_0^1 (x^3 - x)\, dx + \int_1^2 (x^3 - x)\, dx$$

3. Pero así, la primera integral, tendría valor negativo (la función es negativa en ese intervalo. Y eso no nos interesa. Para evitar los posibles cambios de signo, **ponemos cada una de la integrales entre valor absoluto**, así siempre sumamos áreas de las regiones resultantes.

$$\text{Área región} = \left| \int_0^1 (x^3 - x)\, dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - x)\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} - (0 - 0) \right] \right| + \left| \left[\frac{2^4}{4} - \frac{2^2}{2} \right] - \left[\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} \right] \right| = \left| -\frac{1}{4} \right| + \left| \frac{16}{4} - \frac{4}{2} - \left(-\frac{1}{4} \right) \right| =$$

$$= \frac{1}{4} + \left| 4 - 2 + \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}\, u^2$$

Ejemplo 4. Más funciones que cruzan el eje X.

Área entre $y = x^3 - 5x^2 + 6x$ *y el eje X*

La representación es costosa. Procedemos:

Puntos de corte con el eje X: $x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \implies x = 0,\ x = 2,\ x = 3$

Área región $= \left| \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x)\,dx \right| + \left| \int_2^3 (x^3 - 5x^2 + 6x)\,dx \right| = \dfrac{37}{12}\ u^2$

Ejemplo 5. Área de la región entre dos curvas.

Área entre las parábolas $y = \dfrac{x^2}{2}$ *e* $y^2 = 2x$.

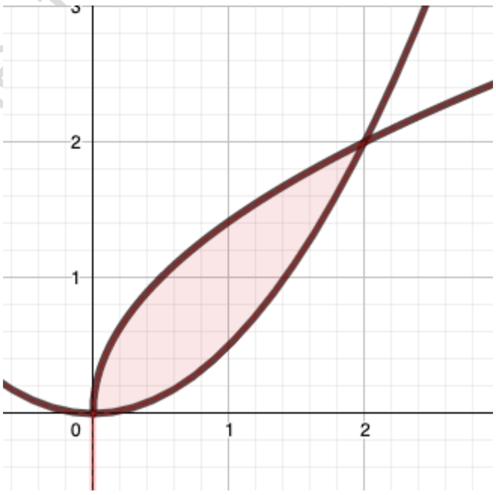
Es importante, si es posible, tener la representación gráfica. Usamos nuestros conocimientos de funciones elementales y calculamos si es necesario, **puntos de corte**, o tablas de valores.

$y = \dfrac{x^2}{2}$ parábola

$y^2 = 2x \implies y = \sqrt{2x}$ parábola “tumbada”

Se cortan en $\sqrt{2x} = \dfrac{x^2}{2} \implies x^4 - 8x = 0$

$\implies x = 0 (y = 0),\ x = 2 (y = 2)$



La función $y = \sqrt{2x}$ está por encima de $y = \dfrac{x^2}{2}$, así que el área será el resultado de:

$\int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \dfrac{x^2}{2} \right) dx$ o si no, sin importar en orden, usando valor absoluto:

$$\left| \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx \right| = \left| \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - \sqrt{2x} \right) dx \right| = \frac{4}{3}\ u^2$$

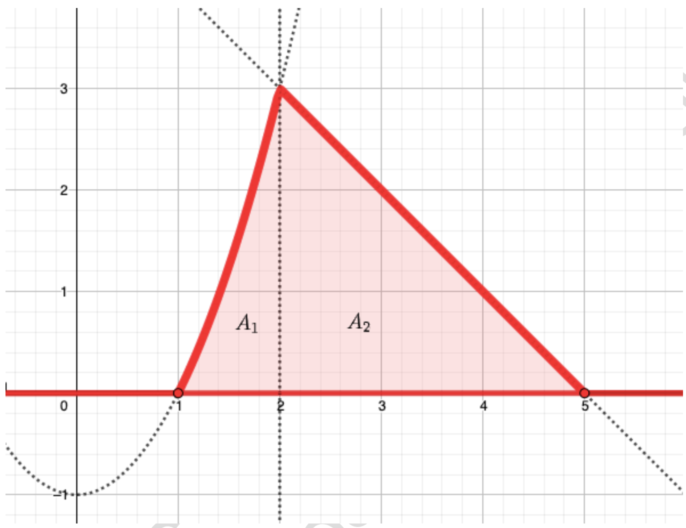
Ejemplo 6. Área de un recinto.

Área del recinto formado por $\begin{cases} y = 5 - x \\ y = x^2 - 1 \\ eje\ X\ (y = 0) \end{cases}$

Tenemos que representar gráficamente el recinto. Las dos primeras son funciones elementales que debemos saber representar con agilidad:

$y = 5 - x$ es recta de pendiente -1 y ordenada en el origen 5

$y = x^2 - 1$ es la parábola $y = x^2$ trasladada una unidad hacia abajo



Área región $= A_1 + A_2$. Los intervalos son [1,2] para A_1 y [2,5] para A_2

A_2: El área A_2 es un triángulo rectángulo de base 3 y altura 3: $A_2 = \dfrac{3 \cdot 3}{2} = \dfrac{9}{2}$

Si lo hiciéramos por integrales también saldría, pero con más trabajo:

$$A_2 = \int_2^5 (5 - x)\,dx = \left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_2^5 = (25 - \frac{25}{2}) - (10 - 2) = \frac{25}{2} - 8 = \frac{9}{2}$$

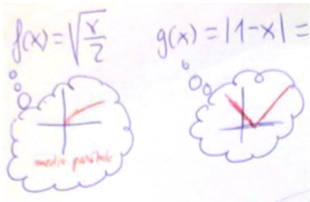
A_1: Resolvemos la integral:

$$A_1 = \int_1^2 (x^2 - 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = (\frac{8}{3} - 2) - (\frac{1}{3} - 1) = \frac{4}{3}$$

Y finalmente, calculamos el área: Área región $= A_1 + A_2 = \dfrac{4}{3} + \dfrac{9}{2} = \dfrac{35}{6}\ u^2$

Ejemplo 7. Casos de regiones algo más complejos.

Área del recinto encerrado entre $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$ *y* $g(x) = |1-x|$

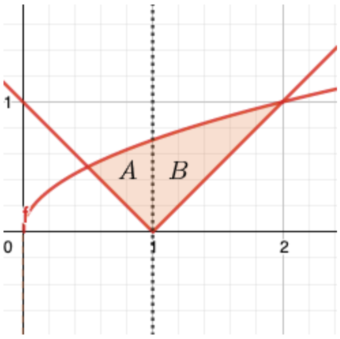


En primer lugar conviene tener una idea intuitiva de la gráfica:

Expresamos como función a trozos $g(x) = |1-x| = \begin{cases} x-1 & si\ \ x<1 \\ 1-x & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$

Para tener la gráfica detallada, y los trozos en los que subdividimos la región pedida, necesitamos los puntos de corte $f(x) = g(x)$:

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = |1-x| \overset{elev^2}{\Longrightarrow} \frac{x}{2} = (1-x)^2 \implies x = 2 - 4x + 2x^2 \implies 2x^2 - 5x + 2 = 0 \implies x = \frac{1}{2},\ x = 2$$



Los intervalos, por tanto, serán [1/2,1] para la región A y [1,2] para la B

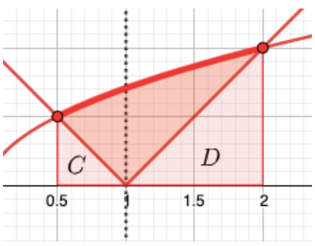
Calculamos el área de las regiones A y B por separado, siguiendo el procedimiento habitual (leer las gráficas de izquierda a derecha buscando zonas en la que dividir nuestra integral):

$$A = \int_{1/2}^{1} \left(\sqrt{\frac{x}{2}} - (1-x)\right) dx = \left[\frac{\sqrt{2x^3}}{3} - x + \frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{7}{24}$$

$$B = \int_{1}^{2} \left(\sqrt{\frac{x}{2}} - (x-1)\right) dx = \left[\frac{\sqrt{2x^3}}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_{1/2}^{1} = -\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{5}{6}$$

Y ahora el área total: $\quad$ Área región $= A + B = \cancel{\frac{\sqrt{2}}{3}} - \frac{7}{24} - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{3}} + \frac{5}{6} = \frac{13}{24}\ u^2$

ALTERNATIVA: Resulta mucho menos costoso pensar en otro enfoque sobre el dibujo: el área de la región como el área bajo la raíz entre 1/2 y 2 a la que le restamos dos triángulos rectángulos:



Área región $= A - C - D = \int_{1/2}^{2} \sqrt{\frac{x}{2}}\, dx - \frac{1/2 \cdot 1/2}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} =$

$$= \frac{7}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{13}{24}\ u^2$$

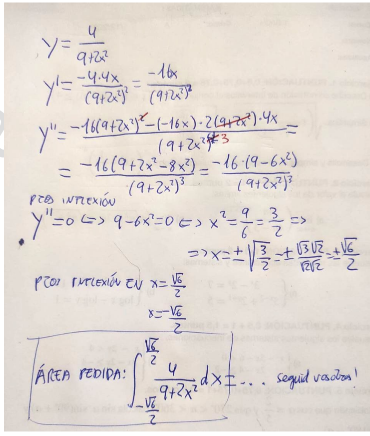
Ejemplo 8. Casos de áreas algo más complejos.

Área del recinto encerrado entre la curva $y = \dfrac{4}{9+2x^2}$*, el eje de abscisas, y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.*

Antes de integrar, necesitamos calcular los puntos de inflexión igualando la segunda derivada a 0:

Primera derivada: $y' = \dfrac{-16x}{(9+2x^2)^2}$ Segunda derivada: $y'' = \dfrac{-16(9-6x^2)}{(9+2x^2)^3}$

Igualamos a cero la segunda derivada: $y'' = 0 \implies x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$



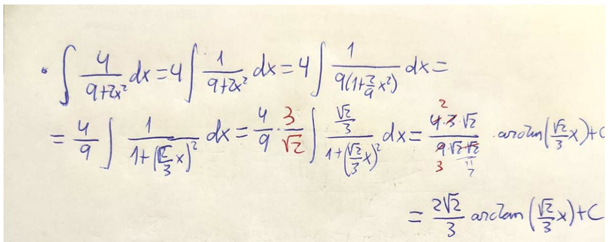
CÁLCULOS

Podemos comprobar que hay cambio de curvatura en esos puntos (sí lo hay, luego son puntos de inflexión).

Así, el área pedida es: $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \frac{4}{9+2x^2}\,dx$

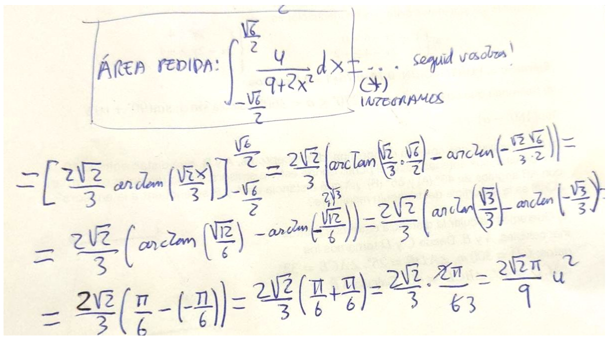
Calculamos primero la integral indefinida:

$$\int \frac{4}{9+2x^2}\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right) + C$$

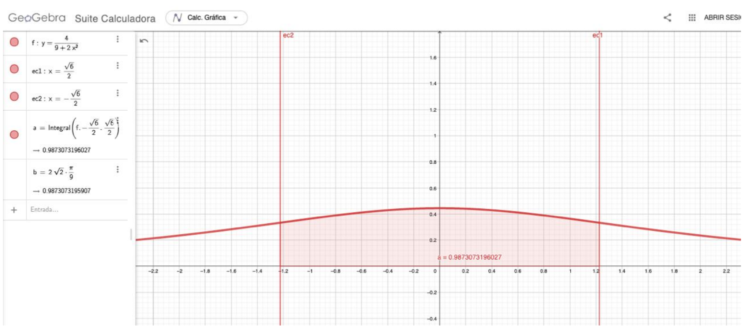


Y por fin la definida:

$$\text{Área} = \int_{-\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \frac{4}{9+2x^2}\,dx = \frac{2\sqrt{2}\pi}{9}\;u^2$$



No merece la pena hacer la representación completa, pero para acompañar el ejercicio, dejo la representación gráfica:



Aplicación del Teorema fundamental del cálculo integral

Teorema fundamental del cálculo integral. Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$, entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable y su derivada es $F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$

Ejemplo 1. *Obtén la derivada de* $F(x) = \int_5^x \sqrt{e^t + 1}\,dt$

Por el teorema: $F(x) = \int_5^x \sqrt{e^t + 1}\,dt \overset{TFC}{\Longrightarrow} F'(x) = \sqrt{e^x + 1}$

Ejemplo 2. *Obtén la derivada de* $F(x) = \int_0^{x^2} (t^2 + t)\,dt$

Por el teorema (en este caso hay que sustituir todas las t por x^2 y luego aplicar la regla de la cadena):

$$F(x) = \int_0^{x^2} (t^2 + t)\,dt \overset{TFC}{\Longrightarrow} F'(x) = \left(\left(x^2\right)^2 + x^2\right)\right) \cdot \left(x^2\right)' =$$

$$= \left(x^4 + x^2\right)\right) \cdot 2x = 2x^5 + 2x^3$$

Ejemplo 3. *Obtén la derivada de* $F(x) = \int_0^{\sin x} (1 + t)\,dt$

Igual que en el 2, $F(x) = \int_0^{\sin x} (1 + t)\,dt \overset{TFC}{\Longrightarrow} F'(x) = (1 + \sin x) \cdot (\sin x)' =$

$$= (1 + \sin x) \cdot \cos x$$