DETERMINISTA VS ALEATORIO

Un experimento se llama **determinista** cuando se puede conocer el resultado de antemano. Por ejemplo, si dejo caer un objeto que no genere resistencia desde 10 metros de altura, sabemos, por las fórmulas estudiadas en física, el tiempo que tardará en caer con gran exactitud.

Un experimento se llama **aleatorio** si es imposible predecir el resultado de antemano. Por ejemplo, saber si el resultado de un lanzamiento de una moneda antes de lanzarla, o si una persona escogida al azar dentro de un instituto usa gafas o no.

La probabilidad es la rama de las matemáticas que estudia los experimentos aleatorios. La estadística y la probabilidad se convierten en una importantísima herramienta para la toma de decisiones y el conocimiento del mundo que nos rodea, pues muchas de las realidades a estudiar son aleatorias y no deterministas.

ÁLGEBRA DE SUCESOS

Consideremos un experimento aleatorio. Lo primero que interesa es saber los posibles resultados. Es lo que se llama **espacio muestral**, conjunto de los posibles resultados de un experimento.

Ejemplos:

Lanzar una moneda $\implies E = \{C, +\}$

Lanzar un dado $\implies E = \{1,2,3,4,5,6\}$

Color de pelo der una persona elegida al azar $\implies E = \{$"rubio","pelirrojo","castaño","moreno"$\}$

A cada uno de los elementos del espacio muestral se le llama **suceso elemental**.
Un conjunto de varios elementos del espacio muestral se llama **suceso compuesto**.
Al conjunto de todos los elementos del espacio muestral se llama **suceso seguro**.
Al conjunto vacío o de elementos que no son del espacio muestral se le llama **suceso imposible**.
Dado un suceso A, se puede definir su **contrario** $\overline{A} = A^c = A'$, formado por todos los elementos del espacio muestral que no sean de A: $\overline{A} = E - A$

Ejemplo: el experimento es lanzar un dado común.

Suceso A:"resultado par".	$A = \{2,4,6\}$
Suceso B:"resultado menor que 3".	$B = \{1,2\}$
Contrario de A (par) será $\overline{A}$ ("resultado impar")	$\overline{A} = \{1,3,5\}$
Suceso seguro:	$E = \{1,2,3,4,5,6\}$
Suceso imposible:	$I = \emptyset$ ó $I = \{9,10,11\}$

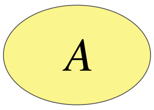
El conjunto de todas los posibles sucesos, con las operaciones de unión e intersección, se llama **álgebra de Boole**, muy importante en teoría de conjuntos, lógica, programación e informática, electrónica y, obviamente, probabilidad. Veamos en que consiste:

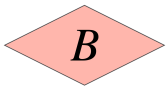
Operaciones con sucesos: unión e intersección

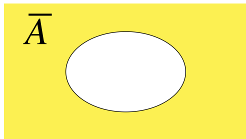
Unión ($\cup$): El suceso unión de otros dos sucesos A y B es el que contiene a todos los elementos de A y de B, aunque estén en uno solo de ellos. En lenguaje natural se corresponde con la conjunción disyuntiva "o".

Intersección ($\cap$): El suceso intersección es el que solo contiene a los elementos comunes a A y B. En lenguaje natural se corresponde con la conjunción copulativa "y".

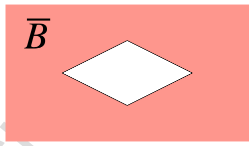
Conviene comprender las ideas de unión e intersección con diagramas, muy útiles en algunos ejercicios, y también con ejemplos:



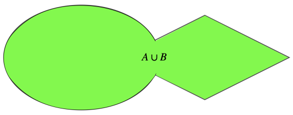




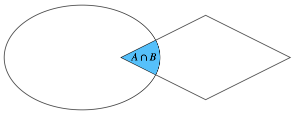
COMPLEMENTARIO DE A



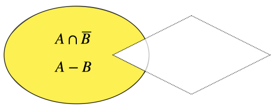
COMPLEMENTARIO DE B



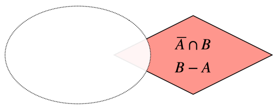
UNIÓN



INTERSECCIÓN



A MENOS B



B MENOS A

Ejemplo: el experimento es lanzar un dado común

Suceso A:"resultado par". $A = \{2,4,6\}$
Suceso B:"resultado menor que 3". $B = \{1,2\}$

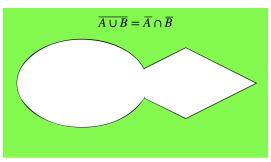
Complementario de A: $\overline{A}$: "resultado impar" $\overline{A} = \{1,3,5\}$
Complementario de B: $\overline{B}$: "mayor o igual que 3" $\overline{B} = \{3,4,5,6\}$

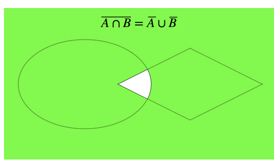
Unión: $A \cup B$: "par **o** menor que 3" $A \cup B = \{1,2,4,6\}$
Intersección: $A \cap B$: "par **y** menor que 3" $A \cap B = \{2\}$

Resta $A - B$: "par y no menor que 3" $A - B = A \cap \overline{B} = \{4,6\}$
Resta $B - A$: "menor que 3 y no par" $B - A = \overline{A} \cap B = \{1\}$

Dos sucesos se llaman **compatibles** si tienen algo en común ($A \cap B \neq \emptyset$) y e **incompatibles** si no tienen nada en común ($A \cap B = \emptyset$)

Leyes de Morgan:
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (el complementario de la unión es la intersección de los complementarios)
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (el complementario de la intersección es la unión de los complementarios)





PROBABILIDAD DE SUCESOS

La **probabilidad** de que ocurra un suceso en un experimento aleatorio es una medida que nos indica si es fácil o difícil que ocurra, teniendo en cuenta que una **probabilidad 0 significa imposible** y una **probabilidad 1 significa seguro**.

Regla de Laplace: cuando tenemos un **experimento aleatorio con sucesos elementales equiprobables**, se puede calcular la probabilidad de un suceso con la fórmula:

$$\boxed{P(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}}$$

Ejemplos:

- Lanzando un dado, $P(\text{"sale un 6"}) = \dfrac{1}{6} = 0{,}166....$ $\quad P(\text{"menor que 3"}) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} = 0{,}33...$
- Lanzando una moneda $P(\text{"cara"}) = \dfrac{1}{2}$

Definición de Bernoulli: Cuando no son sucesos elementales equiprobables, la probabilidad se considera como límite de las frecuencias relativas después de observar y estudiar los datos al repetir un experimento:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}.$$

Ejemplo: Sabemos mediante muestreo que de 10 000 personas hay 2450 miopes. Asumimos que la probabilidad de que un sujeto al azar de la población, sea miope, es $P(\text{"miope"}) = 0{,}245$

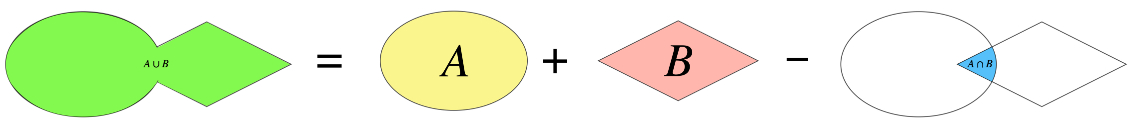
Axiomática de Kolmogorov: La probabilidad cumple los siguientes axiomas:

1. $0 \le P(A) \le 1$ (la probabilidad siempre es positiva)
2. $P(E) = 1$ (la probabilidad del suceso seguro es 1)
3. Si A y B son **incompatibles** ($A \cap B = \varnothing$), entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Y como consecuencia aparecen las siguientes propiedades:

1. $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$ (la probabilidad del contrario es uno menos la probabilidad original)
2. $P(\varnothing) = 0$ (la probabilidad del suceso imposible es cero)
3. $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

NOTA: la propiedad 3 se ve bien sobre el dibujo. Si sumamos la de A y la de B, estamos contando dos veces la parte que tienen en común, por eso hay que restar la intersección.



PROBABILIDAD CONDICIONADA

Imaginemos una urna con dos bolas azules y tres bolas rojas. Si sacamos una bola, y la volvemos a introducir, al realizar una segunda extracción, la probabilidad de que sea azul será exactamente igual que para la primera. Pero si la primera vez dejamos la bola fuera, la probabilidad de que salga azul la segunda vez dependerá del resultado de la primera extracción. A esto le llamamos **probabilidad condicionada**.

Se llama probabilidad de A condicionado a B a $\boxed{P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

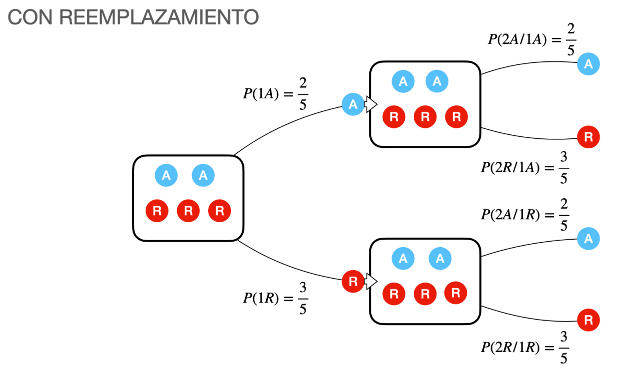
Dos sucesos se llaman **independientes** si:

$$P(A/B) = P(A) \implies \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Una situación como la del ejemplo de la urna se representa muy bien mediante un **diagrama de árbol**. Si volvemos a introducir las bolas, la segunda extracción será independiente con respecto a la primera. Si no volvemos a introducir las bolas, la segunda extracción será dependiente.

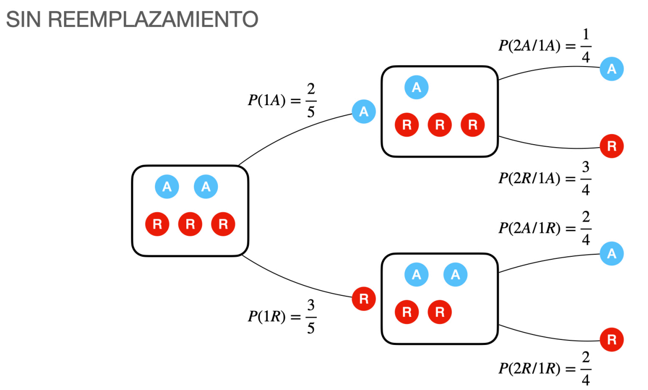
a) Dos extracciones **con reemplazamiento** (extracciones sucesivas **independientes**)

b) Dos extracciones **sin reemplazamiento** (extracciones sucesivas **dependientes**)



$P(\text{"dos bolas azules"}) = P(1A \cap 2A) = P(1A) \cdot P(2A/1A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 0{,}16$

En la práctica, multiplicamos las ramificaciones $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 0{,}16$



$P(\text{"dos bolas azules"}) = P(1A \cap 2A) = P(1A) \cdot P(2A/1A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

En la práctica, multiplicamos las ramificaciones $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

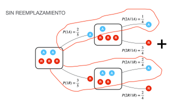
Teorema de las probabilidades totales

En el ejemplo, si queremos calcular la probabilidad de que el resultado sea "*la segunda bola es azul*", sin importar el orden, vemos que hay dos ramas que nos conducen a ese resultado {AA, RA}. Para calcular la probabilidad, tenemos que sumar todas esas ramas, incompatibles entre sí.

Sea el espacio muestral dividido en $E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ con A_i, incompatibles entre sí,

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

NOTA: ***Si nos movemos por una misma rama, se multiplican las probabilidades. Ramas distintas se suman entre sí***.

Ejemplo: Urna sin reemplazamiento, 

$$P(\text{"segunda azul"}) = P(1A) \cdot P(2A/1A) + P(1R) \cdot P(2A/1R) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{8}{20} = 0{,}4$$

Teorema de Bayes

Se llama teorema de Bayes a la fórmula que combina la probabilidad condicionada con las probabilidades totales. En la práctica, no es necesario utilizarlo como una fórmula independiente, basta con combinar las dos fórmulas citadas, pero es lo que completa nuestras herramientas para poder realizar problemas de probabilidad de este nivel:

Sustituyendo las propabilidades totales:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

En la fórmula de la probabilidad condicionada, queda:

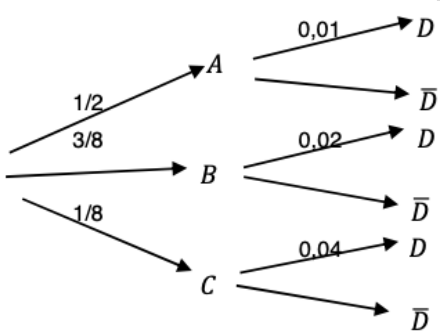
$$P(A_i/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

Ejercicio: ABAU JUN 2018 A 4

En las rebajas de unos grandes almacenes están mezcladas y a la venta 200 bufandas de la marca A, 150 de la marca B y 50 de la marca C. La probabilidad de que una bufanda de la marca A sea defectuosa es de 0,01; 0,02 si es de la marca B y 0,04 si es de la marca C. Una persona elige una bufanda al azar.

a) Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida sea de la marca A o defectuosa.
b) Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida no sea defectuosa ni de la marca C.
c) Si la bufanda elegida no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

Construímos el diagrama de árbol:



Definimos los sucesos
A: "la bufanda es de marca A",
B: "la bufanda es de marca B",
C: "la bufanda es de marca C"
D: "la bufanda es defectuosa"

a) Preguntan $P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D)$

$P(A) = 0{,}5,\ P(A \cap D) = 0{,}5 \cdot 0{,}01 = 0{,}005$

Calculamos $P(D)$ por las probabilidades totales:

$$P(D) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 + \frac{3}{8} \cdot 0{,}02 + \frac{1}{8} \cdot 0{,}04 = 0{,}0175$$

Y respondemos, la probabilidad de que una bufanda al azar sea de la marca A o defectuosa será:

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = 0{,}5 + 0{,}0175 + 0{,}005 = \mathbf{0{,}5125}$$

b) Preguntan $P(\overline{D} \cap \overline{C}) \overset{De\ Morgan}{=} P(\overline{D \cup C}) \overset{contrario}{=} 1 - P(D \cup C) = 1 - 0{,}1375 = \mathbf{0{,}8625}$

Calculamos $\boxed{P(D \cup C) = P(D) + P(C) - P(D \cap C) = 0{,}0175 + 0{,}125 - 0{,}125 \cdot 0{,}04 = \mathbf{0{,}1375}}$

c) Preguntan $P(B/\overline{D}) = \dfrac{P(B \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \dfrac{\frac{3}{8} \cdot 0{,}98}{1 - P(D)} = \mathbf{0{,}374}$

Tablas de contingencia

Las tablas de contigencia son, junto con los diagramas de árbol, la estrategia más usada para responder problemas de probabilidad del nivel. Consisten en recoger los datos del enunciado en una tabla donde se recogen las probabilidades de dos (o más) características de una población. Veamos un ejemplo:

Ejercicio: ABAU EXT 2021 7

En una determinada ciudad, el 8% de la población practica yoga, el 20% tiene mascota y el 3% practica yoga y tiene mascota. Si en esa ciudad se elige una persona al azar, calcule:
a) La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.
b) La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

Definimos los sucesos Y: "practicar yoga" y M: "tener mascota"

Construimos la tabla:

	M	$\overline{M}$	
Y	3 %		8 %
$\overline{Y}$			
	20 %		100 %

Y la completamos de forma que cuadren las sumas en filas y columnas:

	M	$\overline{M}$	
Y	3 %	5 %	8 %
$\overline{Y}$	17 %	75 %	92 %
	20 %	80 %	100 %

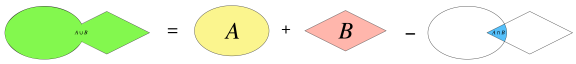
Respondemos:

a) $P(\overline{Y} \cap M) = 0{,}17$ probabilidad de que no practique yoga y tenga mascota (la intersección es el valor de la celda correspondiente)

b) $P(M/Y) = \dfrac{P(M \cap Y)}{P(Y)} = \dfrac{0{,}03}{0{,}08} = \mathbf{0,375}$ es la probabilidad de que tenga mascota si sabemos que practica yoga

RESUMEN DE FÓRMULAS ("CAJA DE HERRAMIENTAS")

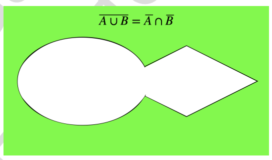
- $P(A) = \dfrac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$ **(Laplace, caso sucesos elementales equiprobables)**
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ **(contrario)**
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ **(unión)**

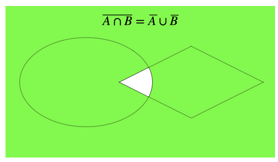


- $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ **(condicionada)**

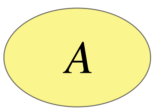
- A y B **independientes** si y solo si $P(A/B) = P(A) \implies \mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$
- A y B **incompatibles** si y solo si $\mathbf{P(A \cap B) = 0} \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

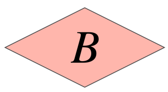
- **Leyes de Morgan:** $\begin{cases} P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) \\ P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B}) \end{cases}$

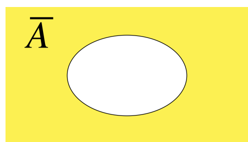




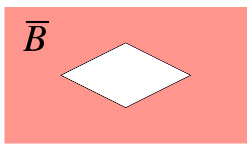
- $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ **(resta)**



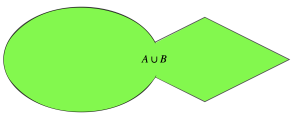




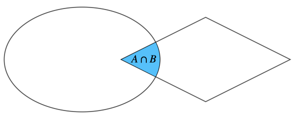
COMPLEMENTARIO DE A



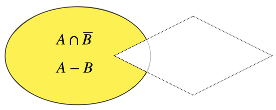
COMPLEMENTARIO DE B



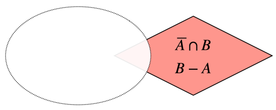
UNIÓN



INTERSECCIÓN



A MENOS B



B MENOS A